

А. Н. ШЕРСТНЕВ

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ**

Издание четвёртое

РЕКОМЕНДОВАНО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ
ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ УМО университетов России
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ И НАПРАВЛЕНИЙ УНИВЕРСИТЕТОВ

Казанское Математическое Общество

2009

Рецензенты 3-го издания:

д-р физ. мат. наук, проф. В. А. З о р и ч (Московский государственный университет),

кафедра математического анализа Уральского государственного университета (зав. кафедрой д-р физ. мат. наук, проф. В. В. А р е с т о в).

В учебном пособии реализована идея изложения курса математического анализа (включая курс функционального анализа) в виде компактного пособия-конспекта, содержащего, тем не менее, весь излагаемый на лекциях материал. Уровень подробности доказательств рассчитан на студента, активно работающего над лекциями. Опущена часть иллюстративного материала (определяемая вкусом лектора).

Пособие, не заменяя собой обстоятельных учебников, может быть полезным для текущей работы над курсом и при подготовке к экзаменам. Рекомендуется студентам физико-математических специальностей университетов.

Данное, четвёртое издание незначительно отличается от предыдущего: несколько расширено приложение 1, внесены изменения в три параграфа, исправлены опечатки.

© Шерстнев А.Н., 2009 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом математического анализа является изучение функций с помощью процессов предельного перехода. Смысл этой фразы студентам приходится постигать в течение всего периода изучения курса.

В данном учебном пособии реализована идея изложения курса математического анализа (включая курс функционального анализа) в виде компактного пособия-конспекта, содержащего, тем не менее, весь излагаемый на лекциях материал. Уровень подробности доказательств рассчитан на студента, активно работающего над лекциями. Опущена часть иллюстративного материала (определяемая вкусом лектора).

Таким образом, пособие, не заменяя собой обстоятельных учебников, может быть полезным для текущей работы над курсом и при подготовке к экзаменам. Учебное пособие написано на основе лекций, неоднократно читанных автором для студентов-математиков механико-математического факультета Казанского университета. Оно может быть рекомендовано студентам физико-математических специальностей университетов.

Несколько замечаний о структуре пособия. Основной текст разбит на разделы (без нумерации) и параграфы со сквозной нумерацией. Каждый параграф разбит на пункты. Цифры 16.2 означают ссылку на §16, пункт 2. Основному тексту предпослана Программа, которая может использоваться в качестве программы экзамена по курсу, она же является подробным оглавлением Конспекта. После основного текста помещены 4 приложения: 2-е носит справочный характер, а остальные могут быть использованы для факультативной работы.

Данное, четвёртое, издание незначительно отличается от предыдущего: несколько расширено приложение 1, внесены изменения в три параграфа, исправлены опечатки.

Приведём перечень общих для всей книги соглашений и обозначений. Через \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} обозначаются соответственно множества натуральных, целых рациональных, рациональных, действительных, комплексных чисел. В записи высказываний используются логические символы:

\exists — существует,

\forall — для любого,

\Rightarrow — влечёт.

Применяются также обычные теоретико-множественные обозначения: \in , \subset , \cap , \cup , \setminus . Аббревиатура “ттогда” означает “тогда и только тогда, когда” (логический символ \Leftrightarrow). Знаки \P и \square означают соответственно начало и конец доказательства; знак (!) заменяет фразу “убедитесь в этом (проверьте это) самостоятельно”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В. А. *Математический анализ*. В 2 ч. – М.: Наука, 1981 – 1984. – Ч. I. – 543 с.; Ч. II. – 640 с.
2. Никольский С. М. *Математический анализ*. В 2 т. – М.: Наука, 1973 – 1975. – Т. 1. – 432 с.; Т. 2. – 408 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. – М: Наука, 1976. – 543 с.

ПРОГРАММА

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Определение функции. Числовые функции и способы их задания (§1,3). График функции (§3). Обратная функция. Достаточное условие существования обратной функции (§4). Операции над функциями: арифметические операции, суперпозиция (§5). Биекция. Равномощные множества, счётные множества (§1).

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Аксиоматическое определение действительных чисел. Аксиома непрерывности (§6). Грани ограниченного числового множества. Характеристическое свойство верхней грани (§6). Топология числовой прямой (окрестности, открытые и замкнутые множества, изолированные и предельные точки множества). Теорема Вейерштрасса (§7). Расширенная числовая прямая (§8).

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность. Предел числовой последовательности (§2,9). Подпоследовательность числовой последовательности (§9). Элементарные свойства предела (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, арифметические свойства, свойство зажатой последовательности) (§10). Основные свойства предела последовательности (существование сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности, сходимость монотонной ограниченной последовательности, лемма о вложенных отрезках). Фундаментальные последовательности. Критерий Коши существования предела последовательности (§11). Пределы в расширенной числовой прямой. Верхний и нижний пределы последовательности и их свойства (§12).

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Числовой ряд и его сумма. Критерий сходимости знакопостоянного ряда. Критерий Коши сходимости ряда (§13). Признаки сходимости знакопостоянных рядов (признаки сравнения, Даламбера, Коши) (§14). Абсолютно сходящиеся ряды и их основное свойство (§15). Ряд Лейбница (§13). Двойные ряды. Перемножение абсолютно сходящихся рядов (§16). Повторные ряды (§17).

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Определение предела функции в точке (§18). Односторонние пределы, пределы в расширенной числовой прямой (§20). Свойства предела функции в точке. Критерий Коши существования предела (§19). Число “ e ” (§11,20). Асимптотика. Эквивалентные функции и их свойства. Замечательные эквивалентности (§21). Непрерывность функции в точке. Основные свойства функции, непрерывной в точке (ограниченность в окрестности, сохранение знака, арифметические свойства, непрерывность суперпозиции) (§22). Точки разрыва (§23). Свойства функций непрерывных на отрезке (ограниченность, достижение граней, условие обращения в нуль в промежуточной точке отрезка, равномерная непрерывность) (§24). Теорема о продолжении по непрерывности (§25). Непрерывность обратной функции (§26). Важнейшие элементарные функции (показательная, логарифмическая, степенная, гиперболические) (§27).

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Касательная к кривой. Мгновенная скорость (§28). Производная функции в точке. Касательное отображение и дифференциал функции. Односторонние производные (§29). Техника дифференцирования (арифметические свойства, дифференцирование суперпозиции, дифференцирование обратной функции, таблица производных) (§30). Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница (§31). Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Коши, формула Лагранжа) (§32).

ПРИЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Правило Лопиталя (§33). Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа (§34). Локальная формула Тейлора. Единственность разложения функции с остатком в форме Пеано

(§35). Ряд Тейлора. Ряды Тейлора основных элементарных функций (§36). Аналитические функции (§37). Возрастание и убывание функций на отрезке (§38). Локальный экстремум (§39). Выпуклые функции. Выпуклость функции в точке. Точки перегиба (§40). Неравенства Гёльдера, Минковского, Коши-Буняковского, Шварца (§41).

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразная и неопределённый интеграл от непрерывной функции (§42). Свойства неопределённого интеграла (интегрирование по частям, замена переменной). Таблица первообразных от некоторых элементарных функций (§43). Представление рациональной функции в виде суммы элементарных рациональных дробей (§44). Интегрирование рациональных функций (§43,44).

ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Определения интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости (§46). Множества лебеговой меры нуль на числовой прямой и их свойства (§47). Теорема Лебега (формулировка). Интегрируемость монотонной функции (§48). Свойства интеграла Римана (линейность, интегрируемость произведения интегрируемых функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, аддитивность интеграла как функции отрезка) (§49). Свойства интеграла, связанные с неравенствами. Теорема о среднем (§50). Интеграл как функция своего верхнего предела (§51). Теорема о существовании первообразной для непрерывной функции (§51). Формула Ньютона-Лейбница (§52). Обобщённая формула Ньютона-Лейбница (§53). Формулы интегрирования по частям и замены переменной в интеграле Римана (§54). Верхний и нижний интегралы Дарбу (§55). Критерий Дарбу интегрируемости функции. Интегрируемость непрерывной функции (§56). О приближённом вычислении интегралов (формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона) (§57).

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Формула Тейлора с остатком в интегральной форме (§58). Интегральный признак сходимости числового ряда (§59). Логарифмическая и показательная функции (§61). Геометрические приложения: площадь плоской фигуры (§45,60), длина кривой (§60,83), площадь поверхности вращения (§60).

ОТОБРАЖЕНИЯ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Понятие векторного пространства. Евклидово пространство (§62). Топология евклидова пространства. Расширенное евклидово пространство (§63). Компактные множества в евклидовом пространстве. Необходимое и достаточное условие компактности множества. Теорема Вейерштрасса (§64). Типы отображений в евклидовых пространствах. Предел векторной последовательности и его свойства (§65). Предел функции в точке (§66). Свойства предела (арифметические свойства, аналог свойства сохранения знака, критерий Коши) (§67). Предел по направлению (§68). Непрерывные функции и их локальные свойства (§69). Свойства непрерывных функций на компактных множествах (§70).

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Линейные отображения векторных пространств. Векторное пространство всех линейных отображений из одного векторного пространства в другое (§71). Матричное представление линейного отображения евклидовых пространств (§72). Обратимые линейные отображения (§73). Операторная и евклидова нормы линейного отображения (§74).

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

Касательное отображение в точке. Дифференциал функции в точке. Свойства касательного отображения. Дифференцирование суперпозиции отображений (§75). Частные производные функции нескольких переменных и их геометрический смысл (§76). Матрица Якоби касательного отображения. Формула полной производной. Арифметические свойства производной для функций нескольких переменных (§77). Условия дифференцируемости отображений (§78). Касательная плоскость (§79). Непрерывно дифференцируемые отображения. Производная функции в области (§80). Интеграл от непрерывной вектор-функции

(§81). Оценочная формула Лагранжа (§82). Необходимое условие локального экстремума (§84). Теорема о дифференцировании обратной функции (§85). Частные производные высших порядков. Независимость от порядка дифференцирования (§86). Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остатками в формах Лагранжа и Пеано (§87). Локальный экстремум функции (§88). Теорема о существовании неявной функции (§89). Локальный относительный экстремум функции (§90). Метод Лагранжа исследования функции на относительный локальный экстремум (§91).

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

Отношения в множестве. Отношения эквивалентности, порядка, направленности (прил. I, §101). Принцип выбора. Аксиома Цермело. Принцип трансфинитной индукции. Индуктивные множества. Теорема Цорна (прил. III). Открытые множества в метрических пространствах и их свойства (§92). Топологическое пространство (§93). Окрестность точки в топологическом пространстве. Определение топологии посредством семейств окрестностей. Сравнение топологий (§94). Рабочие понятия (замкнутые множества, внутренние точки и внутренность множества, предельные и граничные точки множества) (§95). Непрерывные отображения (§96). Гомеоморфные топологические пространства. Топологические свойства. Локальный гомеоморфизм (§97). Пересечение топологий. Топология, порожденная семейством множеств. Система образующих и база топологии (§98). Прообраз топологии относительно семейства отображений. Индуцированная топология. Произведение топологических пространств (§99). Финальная топология. Фактор-топология (§100). Сходимость сетей в топологическом пространстве. Топологические пространства с 1-й аксиомой счётности (§101). Отделимые топологические пространства (§102). Предел отображения в точке (§103). Регулярные топологические пространства. Продолжение отображения по непрерывности (§104). Компактные топологические пространства (§105). Непрерывные отображения компактных пространств (§106). Теорема Тихонова о произведении компактных пространств (§107). Локально компактные пространства. Погружение локально компактного пространства в компактное (§108). Связные и линейно связные топологические пространства (§109, 110).

МЕРА ЖОРДАНА

Элементарные множества (§111). Мера на классе элементарных множеств (§112). Свойство счётной аддитивности меры (§113). Измеримые по Жордану множества. Множества жордановой меры нуль и множества лебеговой меры нуль (§114). Критерий измеримости множества по Жордану (§115). Свойства измеримых по Жордану множеств (§116).

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА

Определение кратного интеграла (§117). Связь между интегрируемостью функции и её ограниченностью (§118). Критерий интегрируемости Дарбу. Интегрируемость непрерывной функции (§119). Колебание функции в точке (§120). Теорема Лебега (§121). Свойства кратного интеграла (интегрирование по замыканию области, арифметические свойства, аддитивность интеграла как функции области, теорема о среднем) (§122). Связь кратного интеграла с повторным (§123). Замена переменных в кратном интеграле (§124). Площадь поверхности (§125, 186).

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интеграл с особенностью в одном из концов (§126). Несобственный интеграл (общий случай). Интеграл в смысле главного значения (§131). Свойства интеграла с особенностью. Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов (§127). Признаки сходимости (критерий Коши, сходимость интегралов от неотрицательных функций) (§127, 128). Связь несобственных интегралов с рядами (§129). Абсолютно сходящиеся интегралы (§130). Признаки сходимости Дирихле и Абеля (§130). Кратные несобственные интегралы (§132).

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Собственные интегралы, зависящие от параметра. Свойство непрерывности интеграла по параметру (§133). Интегрирование и дифференцирование собственных интегралов по параметру (§133, 134). Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Признаки равномерной сходимости (§135). Непрерывность несобственного интеграла по параметру. Интегрирование и дифференцирование несобственных интегралов по параметру (§136). Бэ́та-функция Эйлера. Гамма-функция Эйлера (§137).

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ ФУНКЦИЙ

Равномерная сходимость последовательности функций (§138). Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций (§139). Равномерная сходимость рядов функций. Критерий Коши равномерной сходимости ряда (§140). Признаки равномерной сходимости рядов (Вейерштрасса, Дирихле, Абеля) (§140,141). Почленное интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов. Дзета-функция Римана (§142). Степенные ряды в комплексной плоскости. 1-я теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда (§143). Формула Коши-Адамара (§144). Дифференцирование степенного ряда (§145). Аналитическая функция. Экспонента (§146). Вещественные степенные ряды. 2-я теорема Абеля. Интегрирование вещественных степенных рядов (§147).

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Нормированные и банаховы пространства (§148). Банахово пространство всех ограниченных числовых функций. Банаховы пространства непрерывных функций (§149). Факторизация. Пространство $R_1(\Omega)$ (§150). Унитарные пространства. Неравенства Коши-Буняковского и Шварца (§152). Пространство $R_2(\Omega)$ (§153). Теоремы о плотности (§151,153). Гильбертово пространство. Пространство ℓ^2 (§154). Полные и замкнутые ортонормированные системы векторов в унитарном пространстве. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Неравенство Парсеваля. (§155). 2π -периодические функции. Пространства $\tilde{C}, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ (§156). Тригонометрический ряд Фурье (§157). Осцилляционная лемма (§158). Оценка остатка ряда Фурье (§159). Класс функций $Lip \alpha$. Условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (§160). Полнота тригонометрической системы функций (§161). Полиномы Чебышева. Полнота системы полиномов (§162). Комплексная форма ряда Фурье (§163). Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье (§164). Простой интеграл Фурье (§166). Теорема о сходимости интеграла Фурье (§167). Преобразование Фурье и его свойства. Производная и преобразование Фурье (§168).

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Пространства основных функций \mathcal{D} и \mathcal{S} (§170). Непрерывные линейные отображения в пространствах основных функций (дифференцирование, умножение на бесконечно дифференцируемую функцию, преобразование Фурье в пространстве \mathcal{S}) (§171). Пространства \mathcal{D}' и \mathcal{S}' обобщённых функций. Примеры обобщённых функций, δ -функция (§172). Сходимость обобщённых функций (§173). Действия над обобщёнными функциями (§174, 175). Преобразование Фурье обобщённых функций из \mathcal{S}' (§176). Простейшие дифференциальные уравнения в классе обобщённых функций (§177).

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО МНОГООБРАЗИЯМ

Гладкие кривые. Параметризация гладкой кривой. Натуральная параметризация (§178). Криволинейный интеграл 1-го рода (§179). Работа векторного поля. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл 2-го рода (§180). Градиент. Потенциальное векторное поле. Условие потенциальности поля в терминах криволинейного интеграла (§181). Ротор. Условие потенциальности поля в терминах ротора (§182). Ориентация плоской области (§183). Формула Грина (§184). Гладкие поверхности в \mathbb{R}^3 (§185). Поверхностный интеграл 1-го рода (§186). Поток вектора через ориентированную поверхность (§187). Поверхностный интеграл 2-го рода (§188). Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция и её физический смысл (§189). Формула Стокса (§190).

МЕРА ЛЕБЕГА

Полукольца множеств и их свойства (§191). Мера на полукольце (§192). Кольца и алгебры множеств. Кольцо, порождённое семейством множеств. Борелевские алгебры (§193). Продолжение меры с полукольца на порождённое им кольцо. Критерий σ -аддитивности конечно-аддитивной меры на полукольце (§194). Внешняя мера и её свойства (§195). Класс $L(\mathfrak{S}, m)$ измеримых по Лебегу множеств (случай полукольца с 1). Теорема о продолжении меры с полукольца с 1 на класс измеримых по Лебегу множеств. Мера Лебега (§196). Конструкция $L(\mathfrak{S}, m)$ для полукольца без 1 (§197). Свойство непрерывности σ -конечной меры по отношению к монотонным последовательностям множеств. Множества лебеговой меры нуль и их свойства. Свойство полноты меры Лебега (§197). Мера Лебега-Стилтьеса. Описание конечных мер на борелевской алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (§198). Разложение меры Лебега-Стилтьеса на дискретную и непрерывную компоненты (§199). Абсолютно непрерывные и сингулярные меры. Критерий абсолютной непрерывности меры (§200).

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Прообраз кольца относительно отображения (§201). Измеримые функции и их свойства. В-измеримые функции (§202,203). Измеримые функции на пространстве с мерой (§204). Сходимость почти всюду. Теорема Егорова (§205). Сходимость по мере. Взаимосвязи между различными типами сходимости (§206).

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Определение интеграла Лебега. Свойства интеграла (§207). Предельный переход под знаком интеграла (теоремы Лебега, Леви, Фату) (§208). Замена переменной в интеграле Лебега (§209). Сравнение интеграла Римана и интеграла Лебега (§210). Неопределённый интеграл Лебега. Заряды. Свойство ограниченности заряда. Теорема Хана (§211). Абсолютно непрерывные функции множества. Теорема Радона-Никодима. Абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты меры (§212). Произведение полукольцев множеств. Меры в произведениях множеств (§213). Теорема Фубини (§214). Интеграл по σ -конечной мере (§215).

ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пополнение метрического пространства. Теорема о существовании и единственности пополнения (§216). Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра (§217). Принцип сжимающих отображений. Обобщённый принцип сжимающих отображений. Применения к интегральным уравнениям (§218). Вполне ограниченные множества в метрическом пространстве. Критерий компактности метрического пространства. Критерий предкомпактности множества в пространстве непрерывных функций (§219).

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

Конечномерные нормированные пространства (эквивалентность норм, полнота). Существование элемента наилучшего приближения относительно конечномерного подпространства (§220). Шкала банаховых пространств $L_p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) (§221). Операции над банаховыми пространствами (прямая сумма, фактор-пространство) (§222). Нормированное пространство всех ограниченных линейных операторов из одного нормированного пространства в другое. Изометрический изоморфизм нормированных пространств (§223). Пополнение нормированного пространства. Простейшая теорема вложения (§224). Сопряжённое пространство (§225). Пространства $L^p(\mu)^*$ ($1 \leq p < \infty$) (§226). Продолжение ограниченных линейных отображений по непрерывности (§227). Теорема Хана-Банаха и её следствия (§228). Второе сопряжённое пространство (§229). Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха-Штейнгауза) и её следствия (§230). Теорема об открытом отображении и её следствия (теоремы об обратном операторе, об эквивалентности норм, о замкнутом графике) (§231).

ОГРАНИЧЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Существование и единственность элемента наилучшего приближения относительно подпространства. Теорема об ортогональном разложении (§232). Ортогональные суммы гильбертовых пространств (§233). Размерность гильбертова пространства (§234). Процесс орто-

гонализации Грама. Сепарабельные гильбертовы пространства (§235). Изоморфные гильбертовы пространства. Условия изоморфизма гильбертовых пространств (§236). Теорема Рисса. Сопряжённое пространство к пространству Гильберта. Принцип равномерной ограниченности для гильбертовых пространств (§237). Билинейные формы в гильбертовом пространстве и их связь с операторами (§238). Сопряжённый оператор к ограниченному линейному оператору. Свойства сопряжённого оператора (§239). Алгебра $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве (§240). Ортопроекторы (§241). Унитарные операторы. Оператор Фурье-Планшереля (§242). Конечномерные операторы и их представление (§243). Компактные операторы. Некомпактность тождественного оператора в бесконечномерном пространстве (§244). Свойства компактных операторов в гильбертовом пространстве (оператор, сопряжённый к компактному; замкнутость класса компактных операторов относительно предельного перехода по норме; полнота пространства компактных операторов; аппроксимация компактных операторов конечномерными операторами; замкнутость линейала $\mathcal{K}(1 - A)$ для компактного оператора A) (§245). Интегральные компактные операторы (§246).

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Плотно заданные (неограниченные) операторы в гильбертовом пространстве и операции над ними. График линейного оператора, расширение линейного оператора. Замкнутые и замыкаемые операторы и их свойства. Замыкание оператора (§247). Сопряжённый оператор к плотно заданному линейному оператору и его свойства (§248). Эрмитовы и самосопряжённые операторы. Условие самосопряжённости оператора. Операторы умножения на независимую переменную и дифференцирования в $L_2(\mathbb{R})$ (§249). Аналитические вектор-функции и их свойства (§250). Резольвентное множество и спектр замкнутого оператора. Свойства резольвентного множества и резольвента замкнутого оператора. Спектр самосопряжённого ограниченного оператора. Спектр унитарного оператора (§251).

УРАВНЕНИЯ С КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Теорема Фредгольма (§251). Теорема Рисса-Шаудера. Теорема Гильберта-Шмидта (спектральная теорема для самосопряжённого компактного оператора). Каноническая форма компактного оператора (§253). Уравнения Фредгольма 1-го и 2-го родов (интегральная и операторная формы). Теоремы Фредгольма (§254). Случай симметричных и вырожденных ядер (§255).

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Производная Фреше отображения и её свойства (§256). Локальный экстремум функционала. Необходимое условие локального экстремума (§257). Оценочная формула Лагранжа (§258). Интеграл от вектор-функции со значениями в банаховом пространстве (§259). Производные высших порядков. Формула Тейлора. Достаточное условие локального экстремума функционала (§260).

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

§1. Функция

1. Пусть E и F — два множества и задано правило f , которое каждому элементу $x \in E$ сопоставляет некоторый элемент $f(x) \in F$. В этом случае говорят, что на множестве E определена *функция* f , принимающая значения в множестве F ; говорят также, что f — *отображение* множества E в множество F и пишут $f : E \rightarrow F$ или $E \xrightarrow{f} F$. Множество E называется *областью определения* функции f . Две функции $f_1 : E_1 \rightarrow F$, $f_2 : E_2 \rightarrow F$ называются равными ($f_1 = f_2$), если $E_1 = E_2$, $f_1(x) = f_2(x)$ ($x \in E_1$). Если $A \subset E$ и $f : E \rightarrow F$ — некоторая функция, то через $f|A$ обозначают функцию $A \xrightarrow{f|A} F$, действующую по правилу $(f|A)(x) = f(x)$ ($x \in A$). Функция $f|A$ называется *ограничением* функции f на множество A .

Пусть $f : E \rightarrow F$ — отображение множества E в множество F , $A \subset E$, $B \subset F$. Множество $f(A) \equiv \{f(x) \mid x \in A\}$ называется *образом* множества A при отображении f — это часть множества F . Множество

$$f^{-1}(B) \equiv \{x \in E : f(x) \in B\}$$

называется *полным прообразом* множества B при отображении f — это часть множества E .

2. П р и м е р. Пусть $A \subset E$; отображение $i_A : A \rightarrow E$, действующее по формуле $i_A(x) = x$ ($x \in A$), называется *тождественным вложением* A в E . Для $X \subset E$: $i_A^{-1}(X) = X \cap A$.

3. Отображение $f : E \rightarrow F$ называется *инъекцией*, если $x \neq y$ ($x, y \in E$) $\Rightarrow f(x) \neq f(y)$; оно называется *сюръекцией*, если $f(E) = F$. Если отображение является инъекцией и сюръекцией одновременно, то оно называется *биекцией*. Множества E и F называются *равномощными*, если существует биекция $f : E \rightarrow F$. Множество E называется *счётным*, если существует биекция $f : \mathbb{N} \rightarrow E$.

4. П р и м е р. Множество \mathbb{Q} всех рациональных чисел счётно. Действительно, его можно представить в виде таблицы

0	1/1	1/2	1/3	...
	-1/1	-1/2	-1/3	...
		2/1	2/2	...
		-2/1	-2/2	...
			3/1	...
			-3/1	...
			...	

Искомая биекция может быть определена следующим образом: $f(1) = 0$, $f(2) = 1/1$, $f(3) = -1/1, \dots, f(10) = 3/1, \dots$ (встречавшиеся ранее числа в дальнейшей нумерации не участвуют).

5. Мы будем первое время иметь дело в основном с числовыми функциями: $E \subset \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$. В связи с этим говорят о двух числовых переменных: независимой переменной x , “пробегающей” множество E ; зависимой переменной $y = f(x)$

— функции переменной x . Отсюда традиционные обозначения для функции: $y = f(x)$ ($x \in E$) или $f(x)$ ($x \in E$).

Ещё один тип функций, с которыми мы скоро встретимся, — числовые функции, заданные на числовой плоскости, или функции двух переменных $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}^2$). В этом случае каждой точке множества E , то есть каждой упорядоченной паре чисел $(x, y) \in E$, ставится в соответствие число $f(x, y)$.

Примеры 6. $y = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$).

7. $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$).

8. $y = \operatorname{sgn} x \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ (signum — знак).

9. $y = [x]$ ($x \in \mathbb{R}$) (антье x), — наибольшее целое число, не превосходящее x .

10. Пусть E — множество и $A \subset E$. Функция $\chi_A : E \rightarrow \mathbb{R}$, определённая равенством

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A, \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества A .

11. З а м е ч а н и е. Впервые современное определение функциональной зависимости дано выдающимся казанским геометром Н. И. Лобачевским: “Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе” (Уч. зап. Императорск. Казанского ун-та, 1834, с. 183).

§2. Последовательность

1. *Последовательностью* в множестве E называется функция $x : \mathbb{N} \rightarrow E$. Традиционные обозначения для последовательности:

$$x_1, x_2, \dots, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (x_n).$$

Элементы x_n называются *членами последовательности*. Последовательность в множестве \mathbb{R} называется *числовой*. Числовые последовательности часто задаются формулами общего члена или рекуррентными формулами.

Примеры 2. $x_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$, $x_1 = x_2 = 1$.

4. Последовательность 3, 1, 4, 1, 5, ... цифр в десятичной записи числа π (ни аналитической, ни рекуррентной формул нет).

§3. График числовой функции

1. *Графиком функции* $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in E\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Под кривой на плоскости будем понимать непустое множество $\gamma \subset \mathbb{R}^2$. Вопрос: какие из указанных кривых на Рис. 1 являются графиками функций?

Приведём простое необходимое и достаточное условие того, что кривая является графиком некоторой функции.

2. Кривая γ является графиком некоторой функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда каждая прямая, параллельная оси OY , пересекает γ не более чем в одной точке. В этом случае $E = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} ((x, y) \in \gamma)\}$.

З а м е ч а н и я. 3. Пусть Γ — график функции $y = f(x)$ ($x \in E$) и $(x, a) \in \Gamma$. Тогда $a = f(x)$.

4. Соответствие типа $y = \operatorname{Arcsin} x$ называется многозначной функцией. Это не функция в смысле нашего определения (см. 1.1). В такого сорта соответствиях обычно выделяют ветви, где соответствие однозначно (см. Рис. 2).

5. Нам придётся также иметь дело с функциями, заданными неявно. Пусть $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) — функция двух переменных. Равенство

$$F(x, y) = 0 \tag{*}$$

выделяет часть множества Ω : $\Gamma = \{(x, y) \in \Omega : F(x, y) = 0\}$. Пусть $\Gamma \neq \emptyset$. С помощью критерия п. 2 можно проверить, определяет ли кривая Γ функцию $y = f(x)$. Если это так, то говорят, что функция $f(x)$ определена неявно равенством (*). Чтобы найти зависимость $y = f(x)$, нужно разрешить уравнение (*) относительно y .

6. Для задания кривых на плоскости часто полезна полярная система координат. В этой системе каждая точка A плоскости характеризуется парой (r, φ) , где r — расстояние A до отмеченной точки O , а φ — угол, под которым отрезок OA

наклонён к отмеченному лучу, выходящему из точки O (луч $\varphi = 0$). При этом угол отсчитывается против часовой стрелки (Рис. 3). Соответствие между точками плоскости и парами (r, φ) уже не является биективным: например, $O = (0, \varphi)$ при любом φ ; $(r, \varphi) = (r, \varphi + 2\pi)$ при любых r и φ .

§4. Обратная функция

1. Пусть Γ — график числовой функции $y = f(x)$ ($x \in E \subset \mathbb{R}$), причём каждая прямая, параллельная оси OX , пересекает Γ не более чем в одной точке. Тогда каждой точке $y \in f(E)$ соответствует единственная точка $g(y) \in E$ такая, что $f(g(y)) = y$. Итак, на множестве $F = f(E)$ определена функция $x = g(y)$ ($y \in F$); она называется *обратной* к функции $y = f(x)$ ($x \in E$); её удобно записывать, поменяв местами x и y : $y = g(x)$ ($x \in F$). В этом случае график Γ' обратной функции на плоскости XOY получается зеркальным отражением графика Γ относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (Рис. 4). Отметим достаточное условие существования обратной функции.

2. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ строго возрастает (то есть $x < x' (x, x' \in E) \Rightarrow f(x) < f(x')$) или строго убывает (то есть $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$). Тогда обратная функция $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ существует и строго возрастает (соответственно убывает).

¶ Пусть, например, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ строго возрастает, и Γ — её график. Допустим, что некоторая прямая, параллельная оси OX , пересекает Γ более чем в одной точке: $(x_1, y), (x_2, y) \in \Gamma, x_1 < x_2$. Тогда $y = f(x_1) = f(x_2)$, что противоречит строгому возрастанию f . Итак, обратная функция существует; она строго возрастает (!!). □

Примеры. 3. Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$), $\Gamma = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$. Кривая Γ не является графиком никакой функции (Рис. 5).

4. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ($y \geq 0$). Соответствующая кривая определяет функцию $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$). Однако обратная функция не существует.

5. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ($x, y \geq 0$). В этом случае определена функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$); обратная функция существует и совпадает с исходной (Γ симметрична относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (Рис. 6)).

6. $y = \operatorname{tg} x$ ($x \neq \frac{\pi(2k+1)}{2}, k \in \mathbb{Z}$). Обратная функция не существует (говорят о многозначной функции $y = \operatorname{Arctg} x$).

7. $y = \operatorname{tg} x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$). Обратная функция $y = \operatorname{arctg} x$ ($x \in \mathbb{R}$).

8. Понятие обратной функции может быть определено для абстрактных функций. Пусть E, G — множества и функция $f : E \rightarrow G$ такова, что $\forall x, y (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$. Пусть $F = f(E)$. Функция $g : F \rightarrow E$, определённая равенством $g(f(x)) = x (x \in E)$, называется *обратной к функции f* . При этом функция f в свою очередь является обратной к g , и говорят, что f и g взаимно обратны. Итак, взаимно обратные функции $f : E \rightarrow G$, $g : F \rightarrow E$ (где $F = f(E)$) характеризуются равенствами

$$g(f(x)) = x (x \in E), \quad f(g(x)) = x (x \in F).$$

§5. Операции над функциями

1. *Арифметические операции.* Пусть функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ заданы на одном и том же множестве E . Определим новые функции:

сумма (разность): $(f \pm g)(x) \equiv f(x) \pm g(x) (x \in E)$;

произведение: $(f \cdot g)(x) \equiv f(x)g(x) (x \in E)$;

частное: $(f/g)(x) \equiv f(x)/g(x) (x \in E_0 = \{x \in E : g(x) \neq 0\})$.

2. *Суперпозиция функций.* Пусть E, F, G — множества и определены функции $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$. Тогда равенством $h(x) \equiv g(f(x)) (x \in E)$ определяется новая функция $h : E \rightarrow G$, которая называется *суперпозицией функций f и g* и обозначается $g \circ f$.

Можно определить суперпозицию трёх и более функций. Пусть, например, заданы функции $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow H$; суперпозиция $h \circ g \circ f : E \rightarrow H$ определяется равенством $(h \circ g \circ f)(x) \equiv h(g(f(x))) (x \in E)$ (обозначение корректно в силу непосредственно проверяемого равенства $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$).

3. П р и м е р. Пусть $f(x) = x^2 (x \in \mathbb{R})$, $g(x) = 1 - x (x \in \mathbb{R})$. Тогда $(g \circ f)(x) = 1 - x^2 (x \in \mathbb{R})$, $(f \circ g)(x) = (1 - x)^2 (x \in \mathbb{R})$.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§6. Аксиоматическое определение действительных чисел

1. Множество \mathbb{R} называется *множеством действительных (вещественных) чисел*, если выполнены аксиомы (I) — (V):

(I) *Аксиомы порядка.* В \mathbb{R} задано отношение $<$ (то есть для каждой пары элементов $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ установлено, выполняется ли $\alpha < \beta$ или нет). При этом выполнены условия:

(I₁) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеет место одно из трёх: $\alpha = \beta$ или $\alpha < \beta$ или $\beta < \alpha$;

(I₂) “ $\alpha < \beta, \beta < \gamma$ ” $\Rightarrow \alpha < \gamma$;

(I₃) $\alpha < \beta \Rightarrow \exists \gamma (\alpha < \gamma < \beta)$.

По определению запись $\alpha > \beta$ эквивалентна записи $\beta < \alpha$.

(II) \mathbb{R} — поле (то есть кольцо, ненулевые элементы которого образуют коммутативную группу по умножению).

Ноль кольца обозначается через 0, единица мультипликативной группы обозначается через 1. Таким образом, возникает натуральный ряд $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, где $2 \equiv 1 + 1$, $3 \equiv 2 + 1$, и т.д. Отметим в качестве теоремы утверждение: $2 \cdot 2 = 4$.

(III) *Согласованность (I) и (II):*

(III₁) $\alpha < \beta \Rightarrow \forall \gamma (\alpha + \gamma < \beta + \gamma)$,

(III₂) $\alpha < \beta \Rightarrow \forall \gamma > 0 (\alpha\gamma < \beta\gamma)$.

(IV) *Аксиома Архимеда.* $\forall \alpha > 0 \exists n \in \mathbb{N} (\alpha < n)$.

Чтобы сформулировать последнюю аксиому, введём ряд понятий. Множество $E(\subset \mathbb{R})$ называется *ограниченным сверху*, если существует $\beta \in \mathbb{R}$ такое, что $\alpha \leq \beta$ для любого $\alpha \in E$ ($\alpha \leq \beta$ означает, что $\alpha = \beta$ или $\alpha < \beta$). Число β в этом случае называется *мажорантой* множества E . Аналогично определяется *миноранта ограниченного снизу* множества. Если, в частности, E ограничено сверху и снизу, то говорят, что E *ограничено*. Говорят, что множество E обладает наименьшим элементом $\alpha_0(\in E)$, если $\forall \beta \in E (\alpha_0 \leq \beta)$.

(V) *Аксиома непрерывности.* Если $E(\subset \mathbb{R})$ не пусто и ограничено сверху, то среди мажорант множества E существует наименьшая.

Наименьшая мажоранта ограниченного сверху множества E называется *верхней гранью* и обозначается одним из следующих символов $\sup E$, $\sup_{\alpha \in E} \alpha$ (supremum — наивысшее). Аналогично, *нижняя грань* ограниченного снизу множества E есть наибольшая миноранта; обозначения: $\inf E$, $\inf_{\alpha \in E} \alpha$ (infimum — наинизшее).

З а м е ч а н и я. 2. Грани $\sup E$, $\inf E$ не обязаны принадлежать множеству E . Например, для $E = \{\alpha \mid \alpha > 0\}$: $\inf E = 0 \notin E$ (!!).

3. Множество \mathbb{Q} с обычным отношением $<$ между рациональными числами удовлетворяет требованиям (I)–(IV), но не удовлетворяет требованию (V) (например, среди мажорант множества $\{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$ нет наименьшей (в \mathbb{Q}) (!!)).

Установим полезное характеристическое свойство верхней грани числового множества.

4. Пусть α_0 — мажоранта множества $E (\neq \emptyset)$. Следующие условия эквивалентны:

- (а) $\alpha_0 = \sup E$;
- (б) $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in E (\alpha_0 - \varepsilon < \alpha)$.

¶ (а) \Rightarrow (б). Пусть $\alpha_0 = \sup E$, но условие (б) нарушается. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ число $\alpha_0 - \varepsilon$ является мажорантой множества E , меньшей чем α_0 , что невозможно.

(б) \Rightarrow (а). Пусть выполнено (б) и β — мажоранта E такая, что $\beta < \alpha_0$. Тогда при $\varepsilon = \alpha_0 - \beta$ условие (б) нарушается, что противоречит предположению. \square

5. Из наглядно-геометрических соображений множество \mathbb{R} действительных чисел называют также *числовой прямой*. Отметим, что необходимо ещё доказать непротиворечивость системы (I)–(V). Для этого достаточно построить модель \mathbb{R} , в которой выполнялись бы все эти аксиомы. В Приложении I дано исчерпывающее изложение одной такой модели, приведён эскиз интересной модели А. Н. Колмогорова, а также доказана эквивалентность различных моделей. Это Приложение рекомендуется читать после изучения раздела “Предел числовой последовательности”.

У п р а ж н е н и я. 6. Выведите из аксиом (I) — (III), что для любого $n \in \mathbb{N}$: $n > 0$.

- 7. Выведите аксиому (I_3) из остальных аксиом (I) — (III).
- 8. Покажите, что $\alpha < \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{Q} (\alpha < \gamma < \beta)$ (усиление (I_3)).
- 9. Выведите аксиому Архимеда из остальных аксиом действительных чисел.

§7. Топология числовой прямой

1. Среди множеств на числовой прямой \mathbb{R} мы часто будем иметь дело с промежутками:

- $(\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$ — интервал;
- $[\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ — отрезок;
- $[\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$;
- $(\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$;
- $(-\infty, \beta] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \beta\}$;
- $(\alpha, +\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x\}$.

2. *Окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}$ называется всякий интервал (c, d) , содержащий точку a . Окрестность точки будет обозначаться через $U(a)$. В частности, ε -окрестностью точки a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Проколотой окрестностью (\sim -окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $\check{U}(a) \equiv U(a) \setminus \{a\}$, где $U(a)$ — некоторая окрестность a . Таким образом, \sim -окрестности точки a суть множества вида $(c, a) \cup (a, d)$.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$. *Окрестностью* (соответственно \sim -окрестностью) в E точки a называется множество вида $U(a) \cap E$ (соответственно $\check{U}(a) \cap E$).

3. З а м е ч а н и е. Всякие две различные точки $a, b \in \mathbb{R}$ обладают непересекающимися окрестностями.

4. Множество $E(\subset \mathbb{R})$ называется *открытым*, если оно вместе с каждой точкой содержит и некоторую окрестность этой точки, то есть $\forall x \in E \exists U(x) (U(x) \subset E)$. Например, \mathbb{R} , (a, b) , \emptyset — открытые множества. Множество $F \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Точка $a \in E$ называется *изолированной точкой* множества E , если существует окрестность $U(a)$ такая, что $\check{U}(a) \cap E = \emptyset$. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества E , если $\forall U(a) (\check{U}(a) \cap E \neq \emptyset)$. Предельная точка множества сама может ему и не принадлежать.

У п р а ж н е н и я. **5.** Пусть $E = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$. Найти все изолированные точки множества E , все его предельные точки. Открыто или замкнуто E ?

6. Точка a — предельная точка множества E тогда всякая окрестность $U(a)$ содержит бесконечное множество точек из E .

7. Пусть E' — множество всех предельных точек множества E . Тогда $(E')' \subset E'$.

8. Если E открыто и замкнуто одновременно, то $E = \emptyset$ либо $E = \mathbb{R}$.

Следующая теорема является фундаментальной для математического анализа на числовой прямой.

9. Т е о р е м а [К. Вейерштрасс]. *Бесконечное ограниченное множество $E(\subset \mathbb{R})$ обладает по крайней мере одной предельной точкой.*

¶ Так как E ограничено, то существует $M > 0$ такое, что $E \subset [-M, M]$. Пусть $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{множество } E \cap (-\infty, x) \text{ конечно}\}$. Тогда $F \neq \emptyset$ (например, $\{-M\} \in F$) и ограничено сверху (например, M — мажоранта F). По аксиоме непрерывности существует $\alpha = \sup F$. Покажем, что α — искомая предельная точка множества E . Пусть $U(\alpha) = (c, d)$ — произвольная окрестность точки α . Надо лишь убедиться, что $\check{U}(\alpha) \cap E \neq \emptyset$. Пусть, напротив,

$$\check{U}(\alpha) \cap E = [(c, \alpha) \cup (\alpha, d)] \cap E = \emptyset \quad (*)$$

и $\beta \in (c, \alpha)$. Так как $\beta < \alpha = \sup F$, множество $E \cap (-\infty, \beta)$ конечно. Но тогда из $(*)$ следует, что $E \cap (-\infty, d)$ конечно, то есть $d \leq \alpha$, и значит, $\alpha \notin (c, d)$ — противоречие. \square

§8. Расширенная числовая прямая

1. Часто бывает удобно присоединять к числовой прямой \mathbb{R} так называемые несобственные числа $\pm\infty$. Множество $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ назовём *расширенной числовой прямой* при следующих соглашениях:

$$\begin{aligned}
-\infty < a < +\infty \quad (a \in \mathbb{R}), & \quad a \pm \infty \equiv \pm\infty \quad (a \in \mathbb{R}), \\
a \cdot (\pm\infty) \equiv \pm\infty \quad (0 < a \in \mathbb{R}), & \quad a \cdot (\pm\infty) \equiv \mp\infty \quad (0 > a \in \mathbb{R});
\end{aligned}$$

\sim -окрестностью точки $\{+\infty\}$ (соответственно $\{-\infty\}$) назовём всякое множество вида $(M, +\infty)$ (соответственно $(-\infty, M)$), $M \in \mathbb{R}$.

2. Иногда удобно присоединять к числовой прямой одну несобственную точку $\{\infty\}$ (бесконечность без знака); \sim -окрестностью точки $\{\infty\}$ назовём всякое множество вида $(-\infty, N) \cup (M, +\infty)$. Соглашений о порядковых и арифметических свойствах точки $\{\infty\}$ не делается.

3. З а м е ч а н и е. Каждое непустое подмножество расширенной числовой прямой $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ обладает верхней и нижней гранями (эти грани определяются аналогично 6.1).

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§9. Определение предела последовательности

1. Число a называется *пределом числовой последовательности* (x_n) , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное число N такое, что для всякого $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$ и говорят, что (x_n) сходится (или стремится) к a .

З а м е ч а н и я. 2. $x_n \rightarrow a$ означает, что любая окрестность $U(a)$ точки a является “ловушкой” последовательности (x_n) , то есть в $U(a)$ попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Приведём записи равенства $\lim x_n = a$ в кванторах:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n - a| < \varepsilon),$$

$$\forall U(a) \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n \in U(a)).$$

В частности, $x_n \rightarrow 0$ означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n| < \varepsilon)$, то есть $x_n \rightarrow 0$ тогда $|x_n| \rightarrow 0$.

3. $x_n \rightarrow a$ тогда $x_n - a \rightarrow 0$.

4. Изменение конечного числа членов последовательности не влияет на её сходимость.

5. Пусть $n_1 < n_2 < \dots (n_k \in \mathbb{N})$. Последовательность $y_k \equiv x_{n_k} (k \in \mathbb{N})$ называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n) .

6. Если (x_n) сходится, то любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу.

¶ Пусть $x_n \rightarrow a$ и $y_k = x_{n_k}$ — подпоследовательность последовательности (x_n) , $n_1 < n_2 < \dots$. Очевидно, $n_k \geq k$. Пусть далее $N \in \mathbb{N}$ таково, что $|x_n - a| < \varepsilon (n > N)$. Тогда $k > N \Rightarrow n_k > N$ и, следовательно, $|y_k - a| = |x_{n_k} - a| < \varepsilon (k > N)$, то есть $y_k \rightarrow a$. □

П р и м е р ы. 7. $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ {для любого $\varepsilon > 0$ выберем $N > 1/\varepsilon$ (такое N существует по аксиоме Архимеда (см. 6.1)). Тогда $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$ }.

8. $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0$.

9. Последовательность $0, 1, 0, 1, \dots$ не сходится.

У п р а ж н е н и я. 10. Что значит, что (x_n) не сходится? Запишите в кванторах.

11. Охарактеризовать сходящиеся последовательности, у которых N в определении предела не зависит от ε .

12. Если $x_n \rightarrow a$ и $x_n \leq M (n \in \mathbb{N})$, то $a \leq M$.

13. Если $x_n \rightarrow a$ и $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — биекция, то $x_{f(n)} \rightarrow a$.

14. Если $x_n \rightarrow 0$ и $x_n > 0$, то $\sqrt{x_n} \rightarrow 0$.

15. Если $x_n \rightarrow a$ и $y_n = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) (n \in \mathbb{N})$, то $y_n \rightarrow a$.

§10. Элементарные свойства предела

1. Предел последовательности единствен.

Свойство “зажатой” последовательности:

2. Если $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow a, x_n \leq z_n \leq y_n$ ($n \in \mathbb{N}$), то $z_n \rightarrow a$.

3. Если $x_n \rightarrow a$, то $|x_n| \rightarrow |a|$.

¶ Для доказательства 1-го утверждения допустим, напротив, что для последовательности (x_n) : $x_n \rightarrow a, x_n \rightarrow b, a \neq b$. Пусть $U(a), U(b)$ — непересекающиеся окрестности точек a и b (см. 7.3). Согласно п. 2 обе они обязаны быть ловушками последовательности (x_n) , что невозможно.

Доказательство п. 2: если $\varepsilon > 0$ произвольно, то при достаточно большом N

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad (n > N).$$

Следовательно, $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$ ($n > N$), что и требовалось (см. подчёркнутый текст). Третье утверждение следует из оценки $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$. □

4. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что $|x_n| \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$).

5. Если $x_n \rightarrow 0$, а последовательность (y_n) ограничена, то $x_n y_n \rightarrow 0$.

¶ Следует из оценки $0 \leq |x_n y_n| \leq M |x_n|$ и свойств 2, 3. □

6. Сходящаяся последовательность ограничена.

¶ Пусть $x_n \rightarrow a$. Положим $\varepsilon = 1$ в определении предела, и пусть N таково, что $|x_n - a| < 1$ ($n > N$). Тогда

$$|x_n| \leq \max\{|a| + 1, |x_1|, \dots, |x_N|\} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad \square$$

Согласно 5.1 над последовательностями определены арифметические операции. Например, последовательность $(x_n y_n)$ является произведением последовательностей (x_n) и (y_n) .

7. Если $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$, то

(а) $x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$,

(б) $x_n y_n \rightarrow ab$,

(в) $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ ($y_n \neq 0, b \neq 0$).

¶ Свойство (б) следует из оценки (с учётом п. 6)

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b|.$$

Пусть $b \neq 0$ и N таково, что $|y_n| > |b|/2$ ($n > N$). Тогда

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|y_n| |b|} |y_n - b| < \frac{2}{|b|^2} |y_n - b| \quad (n > N).$$

Отсюда с учётом (б) следует (в). □

Примеры. 8. $\lim(n)^{1/n} = 1$: $z_n = (n)^{1/n} - 1 (> 0) \Rightarrow$

$$n = (1 + z_n)^n = 1 + nz_n + \frac{n(n-1)}{2}z_n^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2}z_n^2 \Rightarrow 0 \leq z_n \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2},$$

а значит, $z_n \rightarrow 0$.

9. $\lim a^{1/n} = 1$ ($a > 0$). Выводится из п. 8.

10. $\lim q^n = 0$ при $|q| < 1$.

§11. Основные свойства предела

1. Каждая ограниченная последовательность обладает сходящейся подпоследовательностью.

¶ Если множество $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ значений¹ последовательности (x_n) конечно, то утверждение очевидно. Пусть E бесконечно. В силу 7.9 множество E обладает предельной точкой $a \in \mathbb{R}$. Положим $n_1 = \min\{p : x_p \in (a-1, a+1)\}$. Если n_1, \dots, n_{k-1} выбраны, положим $n_k = \min\{p : p > n_{k-1}, x_p \in (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})\}$. Тогда $y_k \equiv x_{n_k}$ ($k \in \mathbb{N}$) — искомая сходящаяся к a подпоследовательность последовательности (x_n) . □

2. Последовательность (x_n) называется *неубывающей* (соответственно *невозрастающей*), если $x_n \leq x_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) (соответственно $x_n \geq x_{n+1}$). Последовательность называется *монотонной*, если она невозрастающая или неубывающая.

3. Всякая ограниченная монотонная последовательность сходится.

¶ Пусть, например, (x_n) не убывает и ограничена. Тогда существует $M = \sup_n x_n$. Покажем, что $x_n \rightarrow M$. Пусть $U(M) = (a, b)$ — произвольная окрестность точки M , то есть $a < M < b$. По определению верхней грани найдётся N такое, что $a < x_n \leq M$. Но тогда $x_n \in U(M)$ ($n > N$) и остаётся воспользоваться 9.2. □

4. Л е м м а [о вложенных отрезках]. Пусть $I_n = [a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$), причём $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ и $b_n - a_n \rightarrow 0$. Тогда существует и единственная точка $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

¶ Последовательность (a_n) левых концов наших отрезков не убывает и ограничена сверху (например, числом b_1). В силу п. 3 существует $a = \lim a_n$. Аналогично, последовательность (b_n) правых концов не возрастает и существует

$$\lim b_n = \lim[(b_n - a_n) + a_n] = a \quad (*)$$

Следовательно, $a_n \leq a \leq b_n$ для любого n , то есть $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Если теперь c — ещё одна точка такая, что $a_n \leq c \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$), то из (*) следует с учётом 10.2, что $c = a$. □

5. Числом e называется предел $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182\dots$

¹Здесь числа, стоящие в фигурных скобках, не обязательно попарно различны. Вообще не следует путать последовательность с множеством её значений: число членов последовательности бесконечно, хотя множество её значений может быть конечным.

¶ Докажем существование этого предела. Последовательность $y_n \equiv (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ не возрастает:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{n}{n+1} > 1,$$

и по свойству п. 3 существует $\lim y_n$. Следовательно,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim y_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim y_n. \quad \square$$

6. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N (|x_n - x_m| < \varepsilon)$$

или, эквивалентно, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p (|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon)$.

7. К р и т е р и й [О. Коши]. Чтобы последовательность (x_n) сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $x_n \rightarrow a$, $\varepsilon > 0$ — произвольно и $N \in \mathbb{N}$ таково, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$ ($n > N$). Тогда для любых $n, m > N$ имеем

$$|x_n - x_m| = |x_n - a - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon,$$

то есть (x_n) фундаментальна.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть (x_n) фундаментальна. Тогда (x_n) ограничена. Действительно, если N таково, что $|x_n - x_m| < 1$ ($n, m > N$), то

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

По свойству п. 1 существует сходящаяся подпоследовательность (x_{n_k}) : $x_{n_k} \rightarrow a$. Покажем, что $x_n \rightarrow a$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $N, N' \in \mathbb{N}$ такие, что $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ ($n, m > N$), $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ ($n_k > N'$). Для $n > N'' = \max(N, N')$ имеем

$$|x_n - a| \leq \{ \text{выбираем какое-либо } n_k > N'' \} \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon. \quad \square$$

8. У п р а ж н е н и е. Докажите, что $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

§12. Пределы в расширенной числовой прямой

1. Будем говорить, что числовая последовательность (x_n) стремится к $+\infty$ в $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (обозначение: $x_n \rightarrow +\infty$), если всякая \sim -окрестность точки $+\infty$ — ловушка для (x_n) , то есть

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n > M),$$

Аналогично определяется символ $x_n \rightarrow -\infty$.

2. Подобным же образом определяется сходимость числовой последовательности (x_n) к точке ∞ в расширенной числовой прямой $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$: $x_n \rightarrow \infty$, если всякая \sim -окрестность точки ∞ является ловушкой для последовательности (x_n) , то есть

$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n| > M).$$

3. В расширенной числовой прямой $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ точку ξ назовём *частичным пределом* последовательности (x_n) , если существует подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow \xi$. Пусть $L(x_n)$ — множество всех частичных пределов последовательности (x_n) .

4. Множество $L(x_n)$ не пусто и обладает наибольшим и наименьшим элементами.

¶ Если (x_n) ограничена, то $L(x_n)$ не пусто в силу 11.1. Если (x_n) не ограничена сверху (соответственно снизу), то множеству $L(x_n)$ принадлежит точка $+\infty$ (соответственно $-\infty$). Покажем, например, что $L(x_n)$ обладает наибольшим элементом. В силу 8.3 существует $\xi_0 = \sup L(x_n)$. Покажем, что $\xi_0 \in L(x_n)$. Утверждение очевидно, если $\xi_0 = +\infty$ (!!). Пусть $\xi_0 \in \mathbb{R}$. В силу 6.4 для любого $N \in \mathbb{N}$ выберем $\xi_N \in L(x_n)$ так, чтобы $\xi_0 - \frac{1}{N} < \xi_N$. Пусть x_{n_1} таково, что

$$\xi_0 - 1 < x_{n_1}$$

(n_1 существует, так как существует подпоследовательность последовательности (x_n) , сходящаяся к некоторому $\xi_1 > \xi_0 - 1$). Если $x_{n_1}, \dots, x_{n_{N-1}}$ уже выбраны, найдём индекс n_N из условия:

$$n_N > n_{N-1}, \quad \xi_0 - \frac{1}{N} < x_{n_N}$$

(снова n_N существует, т. к. существует подпоследовательность последовательности (x_n) , сходящаяся к $\xi_N > \xi_0 - \frac{1}{N}$). По построению $\xi \in L(x_{n_N}) \Rightarrow \xi \geq \xi_0$. Остаётся заметить, что $L(x_{n_N}) \subset L(x_n)$. \square

5. *Верхним* (соответственно *нижним*) *пределом* последовательности (x_n) называется наибольший (соответственно наименьший) элемент множества $L(x_n)$; он обозначается $\overline{\lim} x_n$ (соответственно $\underline{\lim} x_n$).

6. *Верхний и нижний пределы существуют и $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$. При этом $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$ тогда существует $\lim x_n$ (и тогда $\lim x_n = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$).*

¶ 1-е утверждение следует из п. 4. Если $\lim x_n$ существует, то $L(x_n)$ одноэлементно, а значит, $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$. Обратно, пусть $L(x_n)$ одноэлементно: $L(x_n) = \{\xi\}$. Покажем, что любая окрестность точки ξ является ловушкой для (x_n) . Если, например, $\xi = +\infty$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ произвольно, то вне интервала $(\lambda, +\infty)$ лежит лишь конечное число членов последовательности (x_n) (в противном случае нашлась бы подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow \eta \leq \lambda$, что противоречит одноэлементности $L(x_n)$). Пусть теперь $\xi \in \mathbb{R}$ и $a < \xi < b$. Снова в промежутках $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$ может лежать лишь конечное число членов последовательности (x_n) , т. е. (a, b) — ловушка для (x_n) . \square

7. П р и м е р. Для $x_n = \frac{1}{n}[2 + (-1)^n]^n : \underline{\lim} x_n = 0, \overline{\lim} x_n = +\infty$.

У п р а ж н е н и я. 8. Покажите, что $\overline{\lim} x_n = \limsup_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}, \underline{\lim} x_n = \liminf_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$.

9. Если один из пределов $\overline{\lim} x_n, \overline{\lim} y_n$ конечен или $\overline{\lim} x_n = \overline{\lim} y_n$, то $\overline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$. В аналогичных предположениях $\underline{\lim} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$.

10. Если $x_n \rightarrow a > 0$, то $\overline{\lim} x_n y_n = a \cdot \overline{\lim} y_n, \underline{\lim} x_n y_n = a \cdot \underline{\lim} y_n$.

11. Пусть $x_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Доказать, что $\underline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{x_n}, \overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§13. Элементарные свойства числовых рядов

1. Пусть (x_n) — числовая последовательность. Формальная сумма

$$x_1 + x_2 + \dots \quad (\text{или короче: } \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_n x_n, \sum x_n) \quad (1)$$

называется *числовым рядом*; числа x_n называются членами ряда. Числа $s_n = x_1 + \dots + x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) называются частными суммами ряда (1). Ряд (1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность (s_n) его частных сумм. Число $s = \lim s_n$ называется в этом случае суммой ряда (1); сумма ряда обозначается так же, как и сам ряд: $s = \sum x_n$.

2. **З а м е ч а н и е.** Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

3. Если ряды $\sum x_n$, $\sum y_n$ сходятся, то сходятся ряды $\sum(x_n \pm y_n)$, $\sum \lambda x_n$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), причём

$$\sum \lambda x_n = \lambda \sum x_n, \quad \sum(x_n \pm y_n) = \sum x_n \pm \sum y_n.$$

¶ Например, $\sum(x_n + y_n) = \lim_k \sum_{n=1}^k (x_n + y_n) = \lim_k \sum_{n=1}^k x_n + \lim_k \sum_{n=1}^k y_n = \sum x_n + \sum y_n$. □

4. **З а м е ч а н и е.** Из сходимости ряда $\sum(x_n + y_n)$, конечно, не следует сходимость рядов $\sum x_n$, $\sum y_n$.

Отметим два важных критерия сходимости числовых рядов.

5. **К р и т е р и й** [О. Коши]. Ряд (1) сходится тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p (|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon). \quad (2)$$

6. Ряд (1) с неотрицательными членами сходится тогда последовательность его частных сумм ограничена.

¶ П.5. Ряд (1) сходится тогда сходится последовательность (s_n) его частных сумм. Так как $s_{n+p} - s_n = x_{n+1} + \dots + x_{n+p}$, в силу 11.7 это эквивалентно условию (2).

Утверждение 6 следует из 11.3, применённого к последовательности частных сумм ряда (1). □

Полагая в п. 5 $p = 1$, получаем необходимое условие сходимости ряда:

7. Если ряд $\sum x_n$ сходится, то $x_n \rightarrow 0$.

8. *Рядом Лейбница* называется ряд вида $x_1 - x_2 + x_3 - \dots$, где $x_n > 0$, причём $x_1 \geq x_2 \geq \dots$, $x_n \rightarrow 0$. Ряд Лейбница всегда сходится и его сумма $\leq x_1$.

¶ Из представлений

$$\begin{aligned} s_{2n} &= x_1 - (x_2 - x_3) - \dots - (x_{2n-2} - x_{2n-1}) - x_{2n} \leq x_1, \\ s_{2n} &= (x_1 - x_2) + \dots + (x_{2n-1} - x_{2n}) \end{aligned}$$

следует, что последовательность (s_{2n}) ограничена сверху и не убывает, так что существует $s = \lim s_{2n} \leq x_1$. Кроме того, $\lim s_{2n+1} = \lim(s_{2n} + x_{2n+1}) = s$, откуда $\lim s_n = s$. \square

Примеры 9. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится.

10. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ расходится при $|x| \geq 1$, так как x^n не стремится к 0 (см. п. 7). При $|x| < 1$ ряд сходится: $s_n = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \rightarrow (1-x)^{-1}$.

11. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ называется *гармоническим*. Он расходится, так как для него нарушается критерий п. 5: $|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

12. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ сходится (это ряд Лейбница).

§14. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1. Пусть $\sum x_n, \sum y_n$ — ряды с неотрицательными членами.

(а) Если $x_n \leq y_n$ ($n \in \mathbb{N}$), то из сходимости $\sum y_n$ следует сходимость $\sum x_n$, а из расходимости $\sum x_n$ — расходимость $\sum y_n$.

(б) Если $\lim \frac{x_n}{y_n} = A > 0$, то оба ряда $\sum x_n, \sum y_n$ сходятся или расходятся одновременно.

¶ (а) следует из 13.6, поскольку $t_k = \sum_{n=1}^k y_n \geq \sum_{n=1}^k x_n = s_k, k \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $0 < \varepsilon < A$ и $|\frac{x_n}{y_n} - A| < \varepsilon$ ($n > N$), то есть $0 < (A - \varepsilon)y_n < x_n < (A + \varepsilon)y_n$ ($n > N$). Теперь (б) следует из (а). Например, если $\sum x_n$ сходится, то сходится ряд $\sum \frac{x_n}{A - \varepsilon}$ (см. 13.3) и, так как $y_n < \frac{x_n}{A - \varepsilon}$ ($n > N$), сходится ряд $\sum y_n$. \square

2. [Признак Даламбера]. Пусть $x_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

(а) Если $\overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, то ряд $\sum x_n$ сходится.

(б) Если $\underline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, то ряд $\sum x_n$ расходится.

3. [Признак Коши]. Пусть $x_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

(а) Если $\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} < 1$, то ряд $\sum x_n$ сходится.

(б) Если $\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} > 1$, то ряд $\sum x_n$ расходится.

4. З а м е ч а н и е. Условие (а) признака Даламбера (соответственно признака Коши) эквивалентно условию:

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \text{ (соответственно } \sqrt[n]{x_n} \leq q < 1) \right).$$

¶ 2(а). В силу п. 4 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1$ при $n \geq n_0$. Без ограничения общности можно считать, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $x_{n+1} = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq x_1 q^n$, но при $q < 1$ ряд $x_1 q + x_1 q^2 + x_1 q^3 + \dots$ сходится, и утверждение следует из п. 1(а).

3(б). Пусть r таково, что $\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} > r > 1$. Тогда существует подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) такая, что $x_{n_k} > 1$ ($k \in \mathbb{N}$). В силу 13.7 ряд $\sum x_n$ расходится. Аналогично устанавливаются 2(б) и 3(а). \square

5. У п р а ж н е н и е. Исследовать на сходимость ряды: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

6. З а м е ч а н и е. Полезно иметь в виду, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Последнее следует из расходимости гармонического ряда, первое будет установлено позднее (см. 59.2).

§15. Абсолютно сходящиеся ряды

1. Особо важное значение для математического анализа и его приложений имеют числовые ряды, наследующие известное для конечных сумм правило “от перестановки слагаемых сумма не меняется”. В этом параграфе мы рассмотрим такие ряды. Ряд

$$\sum x_n \quad (*)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |x_n|$.

2. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

¶ Воспользуемся 13.5. Пусть ряд $\sum |x_n|$ сходится и $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда $\exists N \forall n > N \forall p (|x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon)$. Следовательно, для любого $n > N$ и любого p имеем $|x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| < |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon$, то есть для (*) выполнен критерий 13.5. \square

3. З а м е ч а н и е. Как показывают примеры 13.11 и 13.12, ряд может сходиться, но не абсолютно.

4. Т е о р е м а. Если ряд (*) сходится абсолютно, то сходится ряд $\sum x'_n$, полученный из (*) какой-либо перестановкой его членов, причём $\sum x'_n = \sum x_n$.

Обратно, если для сходящегося ряда (*) сходится всякий ряд $\sum x'_n$, полученный из (*) какой-либо перестановкой его членов, то ряд (*) сходится абсолютно.

¶ Пусть (*) сходится абсолютно и $x_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Пусть $s = \sum x_n$ и $s'_k = \sum_{n=1}^k x'_n$. Тогда $s'_k \leq s$ ($k \in \mathbb{N}$) и $\sum x'_n$ сходится в силу 13.6, причём $\sum x'_n \leq s$. Аналогично $\sum x_n \leq \sum x'_n$.

В общем случае (ряд (*) знакопеременный) положим

$$x_n^+ = \begin{cases} x_n, & \text{если } x_n \geq 0, \\ 0, & \text{если } x_n < 0, \end{cases} \quad x_n^- = \begin{cases} -x_n, & \text{если } x_n \leq 0, \\ 0, & \text{если } x_n > 0, \end{cases}$$

так что $x_n = x_n^+ - x_n^-$. Ряды $\sum x_n^+$, $\sum x_n^-$ (с неотрицательными членами) сходятся, так как $x_n^\pm \leq |x_n|$ ($n \in \mathbb{N}$). Используя доказанную выше возможность переставлять члены знакопостоянного сходящегося ряда, имеем

$$\begin{aligned} \sum x_n &= \sum (x_n^+ - x_n^-) = \sum x_n^+ - \sum x_n^- = \sum x_n'^+ - \sum x_n'^- \\ &= \sum (x_n'^+ - x_n'^-) = \sum x'_n. \end{aligned}$$

Переходим к доказательству обратного утверждения теоремы. Пусть, напротив, ряд (*) сходится не абсолютно. Достаточно установить, что при подходящей перестановке его членов полученный ряд $\sum x'_n$ будет расходиться. Для ряда (*) рассмотрим два вспомогательных ряда: $y_1 + y_2 + \dots$, $z_1 + z_2 + \dots$. Членами 1-го (соответственно 2-го) ряда являются положительные (соответственно неположительные) члены ряда (*), занумерованные в порядке возрастания индексов. Один из этих знакопостоянных рядов расходится. (На самом деле они, как нетрудно видеть, расходятся оба.) Действительно, если они оба сходятся, то это означает, что абсолютно сходится ряд (*). Теперь нетрудно выписать искомым расходящийся ряд $\sum x'_n$. В качестве него можно, например, взять ряд вида

$$y_1 + \dots + y_{n_1} + z_1 + y_{n_1+1} + \dots + y_{n_2} + z_2 + y_{n_2+1} + \dots + y_{n_3} + z_3 + \dots,$$

где последовательность индексов $n_1 < n_2 < \dots$ выбрана из условий

$$\begin{aligned} y_1 + \dots + y_{n_1} &> 1, \\ y_1 + \dots + y_{n_2} &> 2 - z_1, \\ &\dots \dots \dots \\ y_1 + \dots + y_{n_k} &> k - (z_1 + \dots + z_{k-1}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Подпоследовательность $\{s'_{n_k+k-1}\}$ последовательности $\{s'_n\}$ частных сумм ряда $\sum x'_n$ обладает свойством $s'_{n_k+k-1} > k$ ($k \in \mathbb{N}$), так что ряд $\sum x'_n$ расходится. \square

§16. Двойные ряды

1. Рассмотрим бесконечную таблицу чисел

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Двойным рядом называется формальная сумма

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} u_{ik} \quad (\text{или короче } \sum_{i,k} u_{ik}). \quad (*)$$

Числа $s_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n u_{ik}$ называются частными суммами ряда (*). Число α называется суммой ряда (*) (пишут $\alpha = \sum_{i,k} u_{ik}$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N (|s_{mn} - \alpha| < \varepsilon).$$

В этом случае ряд (*) называется *сходящимся*.

2. П р и м е р. Пусть задана таблица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & \dots \\ -1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Хотя $s_{nn} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), ряд $\sum_{i,k} u_{ik}$ расходится.

3. У п р а ж н е н и е. Если $u_{ik} \geq 0$ ($i, k \in \mathbb{N}$) и $\alpha = \sup_{m,n} s_{mn}$, то $\sum_{i,k} u_{ik} = \alpha$.

4. З а м е ч а н и е. Над двойными рядами можно производить те же арифметические операции, что и над обычными (см. 13.3).

5. Ряд $(*)$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{i,k} |u_{ik}|$.

6. Если ряд $(*)$ сходится абсолютно, то он сходится.

¶ Проверяется, как и для обычных рядов, с помощью должным образом сформулированного критерия Коши для двойных рядов (см. ниже п. 9). □

7. Если ряд $(*)$ сходится абсолютно, и его члены перенумерованы (любым способом) одним индексом v_1, v_2, \dots , то $\sum_j v_j = \sum_{i,k} u_{ik}$.

¶ Из неравенства $\sum_{j=1}^n |v_j| \leq \sum_{i,k} |u_{ik}|$ ($n \in \mathbb{N}$) следует, что ряд $\sum v_j$ сходится абсолютно. Переставим члены ряда $\sum v_j$ так, чтобы получился ряд

$$\sum v'_j = u_{11} + (u_{12} + u_{21} + u_{22}) + (u_{13} + u_{23} + u_{33} + u_{32} + u_{31}) + \dots$$

Обозначив через s'_n частную сумму ряда $\sum v'_j$, имеем

$$\sum v_j = \sum v'_j = \lim s'_n = \lim s'_{n^2} = \lim_n \sum_{i,k=1}^n u_{ik} = \sum_{i,k} u_{ik}$$

(последнее равенство в цепочке верно, так как $(*)$ сходится). □

В качестве приложения понятия двойного ряда получим теорему о перемножении абсолютно сходящихся рядов.

8. Если ряды $\sum u_i$, $\sum v_k$ сходятся абсолютно, то

$$\left(\sum u_i\right)\left(\sum v_k\right) = \sum_{i,k} u_i v_k,$$

причём ряд в правой части сходится абсолютно.

¶ Последнее утверждение следует из оценки

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |u_i v_k| = \left(\sum_{i=1}^m |u_i|\right) \left(\sum_{k=1}^n |v_k|\right) \leq \left(\sum |u_i|\right) \left(\sum |v_k|\right).$$

Теперь 1-е утверждение является следствием цепочки равенств:

$$\left(\sum u_i\right)\left(\sum v_k\right) = \left(\lim_n \sum_{i=1}^n u_i\right) \left(\lim_n \sum_{k=1}^n v_k\right) = \lim_n \left(\sum_{i=1}^n u_i\right) \left(\sum_{k=1}^n v_k\right) = \lim_n \sum_{i,k=1}^n u_i v_k.$$

9. У п р а ж н е н и е. Докажите, что двойной ряд $(*)$ сходится тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m, p, q > N (|s_{mn} - s_{pq}| < \varepsilon).$$

§17. Повторные ряды

1. Повторными рядами называются формальные суммы вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik} \right).$$

Повторный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \right)$ называется *сходящимся*, если при каждом i сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}$, причём сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$, где $v_i \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}$; сумма $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ называется суммой данного повторного ряда.

2. Если двойной ряд $\sum_{i,k} u_{ik}$ сходится абсолютно, то

$$\sum_{i,k} u_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik} \right).$$

¶ 1-й случай: $u_{ik} \geq 0$. Пусть $\alpha = \sum_{i,k} u_{ik}$. Тогда $\sum_{k=1}^n u_{ik} \leq \alpha$. Отсюда $\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}$ сходится при любом i . Зафиксируем m . Тогда

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^m u_{ik} \right) = \lim_n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^m u_{ik} \right) \leq \alpha.$$

Так как m произвольно, $\beta \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \right) \leq \alpha$. С другой стороны, $s_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n u_{ik} \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \right) \leq \beta$, то есть $\alpha = \sup_{m,n} s_{mn} \leq \beta$.

2-й случай (общий). Пусть

$$u_{ik}^+ = \begin{cases} u_{ik}, & \text{если } u_{ik} \geq 0, \\ 0, & \text{если } u_{ik} < 0, \end{cases} \quad u_{ik}^- = \begin{cases} -u_{ik}, & \text{если } u_{ik} \leq 0, \\ 0, & \text{если } u_{ik} > 0. \end{cases}$$

Тогда $u_{ik} = u_{ik}^+ - u_{ik}^-$, $|u_{ik}| = u_{ik}^+ + u_{ik}^-$ и ряды $\sum_{i,k} u_{ik}^{\pm}$ сходятся, так как сходится ряд $\sum_{i,k} |u_{ik}|$. Следовательно,

$$\sum_{i,k} u_{ik} = \sum_{i,k} u_{ik}^+ - \sum_{i,k} u_{ik}^- = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}^+ \right) - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}^- \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \right).$$

3. З а м е ч а н и е. Утверждение, обратное доказанному, неверно (постройте соответствующий пример).

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

§18. Определение предела функции в точке

В этом разделе начинается изучение локального поведения числовых функций. Следующее центральное определение придаёт точный математический смысл типичной ситуации, когда при приближении точки x к точке a значение функции $f(x)$ приближается к числу α .

1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) и a — предельная точка множества E . Число α называется *пределом функции f в точке a* , если $x_n \rightarrow a$ ($a \neq x_n \in E$) влечёт $f(x_n) \rightarrow \alpha$. В этом случае пишут $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Отметим, что f может быть и не определена в точке a .

2. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ и a — предельная точка E . Следующие условия эквивалентны:

(а) $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$,

(б) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$,

(в) $\forall U(\alpha) \exists V(a) (f(V(a) \cap E) \subset U(\alpha))$.

¶ Ясно, что (б) \Leftrightarrow (в). Покажем, что (а) \Rightarrow (б). Если (б) не выполняется, то

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E (0 < |x - a| < \delta, |f(x) - \alpha| \geq \varepsilon).$$

В частности, для последовательности $\delta_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) существует последовательность (x_n) ($x_n \in E$) такая, что $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon$, так что $x_n \rightarrow a$ ($a \neq x_n \in E$), но $f(x_n) \not\rightarrow \alpha$.

(б) \Rightarrow (а). Пусть $x_n \rightarrow a$ ($a \neq x_n \in E$), $\varepsilon > 0$ — произвольно и $\delta > 0$ таково, что $\forall x \in E (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$. Если N таково, что $|x_n - a| < \delta$ ($n > N$), то $|f(x_n) - \alpha| < \varepsilon$ ($n > N$), то есть $f(x_n) \rightarrow \alpha$. □

П р и м е р ы. 3. $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$. (С учётом неравенства $|\sin x| \leq |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) имеем $|\cos x - \cos a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \cdot \sin \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|$. Остаётся применить 2(б).)

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует: $x_n = \frac{2}{\pi(2n+1)} \rightarrow 0$, но $\sin \frac{1}{x_n} = (-1)^n$ не сходится.

§19. Свойства предела функции

1. *Предел функции единствен.*

¶ Если, напротив, α и β — два различных числа, являющихся пределами функции f в точке a , выберем непересекающиеся окрестности $U(\alpha)$ и $U(\beta)$ этих чисел (это можно сделать в силу 7.3). Мы приходим тогда к противоречию с условием 18.2(в). □

2. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ограниченной на множестве* $A \subset E$, если $f(A)$ — ограниченное множество. Следующее свойство гласит, что из существования предела функции в точке следует её ограниченность в окрестности этой точки:

Если $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, то существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что f ограничена на множестве $U(a) \cap E$.

¶ Пусть $U(a)$ такова, что $|f(x) - \alpha| < 1$ ($x \in \check{U}(a) \cap E$). Тогда $|f(x)| \leq |\alpha| + 1$ ($x \in \check{U}(a) \cap E$). □

3. Пусть $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\beta = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \alpha \pm \beta,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

4. [Критерий Коши]. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ и a — предельная точка множества E ; $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U(a) \forall x', x'' \in \check{U}(a) \cap E (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon). \quad (*)$$

5. Пусть f, g, h заданы на множестве $E \subset \mathbb{R}$, причём существует окрестность $U(a)$ такая, что $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ($x \in \check{U}(a) \cap E$) и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$.

¶ Свойства п. 3 получаются из подходящих свойств для пределов последовательностей (!!). Докажем ещё два утверждения.

4 (достаточность). Пусть $x_n \rightarrow a$ ($a \neq x_n \in E$), $\varepsilon > 0$ — произвольно и N таково, что $x_n \in U(a)$ при $n > N$, так что в силу (*) $\forall n, m > N (|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon)$. Итак, последовательность $(f(x_n))$ фундаментальна и, следовательно, обладает пределом. Остаётся заметить, что этот предел не зависит от выбора последовательности (x_n) . (Допустив, что для (x'_n) последовательность $(f(x'_n))$ сходится к другому пределу, приходим к противоречию со свойством единственности предела, если возьмём новую последовательность $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots$)

5. Пусть $x_n \rightarrow a$ ($a \neq x_n \in E$). Тогда $\exists n_0 \forall n > n_0 (x_n \in U(a))$ и, следовательно, $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ ($n > n_0$). Теперь по свойству 10.2 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$. □

Примеры. 6. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$. (Площадь сектора

ОАМ < площ. Δ_{OMN} (см. Рис. 7), то есть $\frac{1}{2}|\varphi| < \frac{1}{2}MN$

или $|\varphi| < |\operatorname{tg} \varphi|$. Поэтому $\cos \varphi < \frac{\sin \varphi}{\varphi} < 1$ ($\varphi \in \check{U}(0)$).

Остаётся учесть 18.3 и п. 5.)

$$\mathbf{7.} \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} = 1.$$

8. З а м е ч а н и е. Тригонометрические, степенная, показательная и логарифмическая функции обладают свойством $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Для тригонометрических

— это следствие 18.3 и п. 3. Для остальных типов функций это свойство будет установлено позднее. Следует оговориться, что упоминавшиеся выше элементарные функции нами строго не определены. Позднее (§27) этот пробел будет частично восполнен — будут аккуратно введены показательная, логарифмическая и степенная функции.

У п р а ж н е н и я. 9. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \neq 0$, то для некоторой окрестности $U(a)$ функция f на множестве $\check{U}(a)$ сохраняет знак числа α .

10. Если $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна и ограничена, то $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ существует.

§20. Видоизменения понятия предела функции

1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) и a — предельная точка множества $E \cap (a, +\infty)$. Число α называется *пределом функции f в точке a справа* (пишут $\alpha = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$), если $x_n \rightarrow a$ ($a < x_n, x_n \in E$) $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow \alpha$. Аналогично определяется $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ — предел функции f в точке a слева.

2. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, E не ограничено. Число α называется *пределом функции f в ∞* (пишут $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$), если $x_n \rightarrow \infty$ ($x_n \in E$) влечёт $f(x_n) \rightarrow \alpha$. Аналогично определяются пределы $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

3. Наконец, можно считать, что α — несобственная точка. Например, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ при $a \in \mathbb{R}$ означает, что для функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ точка a предельная для E и $x_n \rightarrow a$ ($a \neq x_n \in E$) $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и я. 4. С определением п. 2 согласуется определение предела последовательности (§9) (вспомним, что последовательность есть функция, заданная на \mathbb{N}).

5. Для введённых видоизменений понятия предела функции в точке остаются справедливыми (за очевидными исключениями) свойства предела, рассмотренные в §19.

П р и м е р ы. 6. $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ не существует.

7. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|\sin x|}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|\sin x|}{x} = -1$.

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Достаточно доказать равенство для случаев $x \rightarrow \pm\infty$. В случае $x \rightarrow +\infty$ равенство является следствием неравенств

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

с учётом свойств 19.5 и 11.5. В случае $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e. \end{aligned}$$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ (следствие примера 8).

10. Имеется некоторое количество Ω радиоактивного вещества. Известен коэффициент распада k — отношение количества атомов, распадающихся в единицу времени, к общему количеству атомов вещества. Согласно законам ядерной физики k зависит лишь от вещества. Требуется узнать количество Ω_t вещества, которое останется по прошествии времени t . В качестве приближённого значения можно взять величину $\Omega - kt\Omega$, то есть $\Omega_t \approx (1 - kt)\Omega$. Однако это значение не точно, так как за время t количество вещества не остаётся постоянным, а уменьшается. Разделим промежуток t на n частей. Тогда

$$\Omega_{t/n} \approx \left(1 - k\frac{t}{n}\right)\Omega, \quad \Omega_{2t/n} \approx \left(1 - k\frac{t}{n}\right)\Omega_{t/n} \approx \left(1 - k\frac{t}{n}\right)^2\Omega, \dots, \quad \Omega_t \approx \left(1 - k\frac{t}{n}\right)^n\Omega.$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ мы получим искомую величину

$$\Omega_t = \lim_n \left(1 - k\frac{t}{n}\right)^n \Omega = \lim_n \left[\left(1 + \frac{1}{(-n/kt)}\right)^{-n/kt} \right]^{-kt} \Omega = e^{-kt}\Omega.$$

11. У п р а ж н е н и е. Выпишите приведённые выше определения пп. 1,2,4 в терминах “ $\varepsilon - \delta$ ” и \sim -окрестностей.

§21. Асимптотика

1. Часто функция определена в окрестности некоторой точки a , но, возможно, не определена в самой точке a . Возникает вопрос, как ведёт себя эта функция вблизи точки a ? Для сложных функций желательно иметь хорошую аппроксимацию с помощью простых функций. Введём несколько технических понятий, полезных при решении указанных задач.

Пусть функции f и g определены в некоторой \sim -окрестности точки a . Тогда

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \text{ означает: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \text{ означает: } \exists U(a) \exists C > 0 \forall x \in \check{U}(a) (|f(x)| \leq C|g(x)|),$$

$$f(x) \cong g(x) \quad (x \rightarrow a) \text{ означает: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Отметим некоторые свойства асимптотических равенств.

2. $f(x) \cong g(x) \quad (x \rightarrow a)$ тогда $f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$.

¶ $f(x) \cong g(x) \quad (x \rightarrow a) \Rightarrow f(x) = g(x) + r(x)$, где $r(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right]g(x)$, причём

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] = 0. \text{ Обратно, } f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \text{ влечёт}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right] = 1. \quad \square$$

3. Если $f(x) \cong g(x) \quad (x \rightarrow a)$ и существует $\lim_{x \rightarrow a} g(x)\psi(x)$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\psi(x)$ существует и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)\psi(x)$.

¶ Действительно, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}g(x)\psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)\psi(x). \quad \square$

4. Аналогично определяются асимптотические равенства, соответствующие видоизменениям понятиям предела (§20). Для них также справедливы свойства 2, 3.

П р и м е р ы [замечательных эквивалентностей].

5. $\sin x \cong x \quad (x \rightarrow 0),$

6. $1 - \cos x \cong \frac{1}{2}x^2 \quad (x \rightarrow 0),$

7. $\ln(1+x) \cong x \quad (x \rightarrow 0),$

8. $a^x - 1 \cong \ln a \cdot x \quad (x \rightarrow 0),$

9. $e^x - 1 \cong x \quad (x \rightarrow 0),$

10. $\sqrt[k]{1+x} - 1 \cong \frac{x}{k} \quad (x \rightarrow 0).$

¶ 5. Это пример 19.6.

6. Используя п. 5, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2/2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\frac{1}{2}x)^2}{x^2/2} = 1.$$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = 1$ (см. 20.9, 19.8).

9. Для $\varphi(x) = e^x - 1$ в силу 19.8 имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. Поэтому с учётом п. 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\ln(1 + \varphi(x))} = 1.$$

10. Указание: положить $\varphi(x) = \sqrt[k]{1+x} - 1$ и использовать формулу бинома Ньютона. □

У п р а ж н е н и я. **11.** Если $f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \rightarrow a), g(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \rightarrow a)$, то $f(x) \pm g(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \rightarrow a)$.

12. Пусть $f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \rightarrow a), \varphi(x) = o(\psi(x)) \quad (x \rightarrow a)$. Тогда $f(x) = o(\psi(x)) \quad (x \rightarrow a)$.

§22. Непрерывность функции в точке

1. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $a \in E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

или если $\forall U(f(a)) \exists V(a) (f(V(a) \cap E) \subset U(f(a)))$.

В частности, если a — изолированная точка E , то каждая функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в a . Если a — не изолированная точка E , то непрерывность f в точке a эквивалентна равенству $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

С учётом 18.1 можно сформулировать условие непрерывности функции в точке на языке последовательностей: функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$ тогда из $x_n \rightarrow a \quad (x_n \in E)$ следует $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

2. З а м е ч а н и е. Если a — не изолированная точка множества E , то $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в a тогда $f(a+h) - f(a) = o(1) \quad (h \rightarrow 0)$.

Рассмотрим свойства функций, непрерывных в точке.

3. Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

4. Если f непрерывна в a и $f(a) \neq 0$, то f сохраняет знак числа $f(a)$ в некоторой окрестности точки a .

5. Пусть f, g непрерывны в точке a . Тогда в этой точке непрерывны также функции $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (если $g(a) \neq 0$).

6. [Непрерывность суперпозиции]. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : F \rightarrow \mathbb{R}$, $f(E) \subset F$. Пусть далее f непрерывна в точке a и g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в a .

¶ П.3 следует из 19.2, п. 4 — из 19.9, п. 5 — из 19.3. Докажем п. 6. Пусть $a \in E$ и $x_n \rightarrow a$ ($x_n \in E$). Тогда $f(x_n) \rightarrow f(a)$, так как f непрерывна в a . Следовательно, $g \circ f(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$, так как g непрерывна в $f(a)$. □

7. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке $x \in E$.

8. Примеры непрерывных функций.

(а) Постоянная функция $f(x) = \lambda$ ($x \in \mathbb{R}$).

(б) Линейная функция $f(x) = \lambda x$ ($x \in \mathbb{R}$).

(в) Полином $p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$).

(г) Рациональная функция $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ($q(x) \neq 0$), где p, q — полиномы.

(д) Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (их непрерывность следует из 18.3).

§23. Точки разрыва

1. Точка $a \in E$ называется *точкой разрыва* для функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, если f не непрерывна в a . Полезна следующая простая классификация точек разрыва: $a \in E$ называется точкой разрыва 1-го рода для функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ и хотя бы один из них отличен от $f(a)$; точка разрыва называется точкой разрыва 2-го рода, если она не является точкой разрыва 1-го рода.

Примеры. 2. Точка 0 является точкой разрыва 1-го рода для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

3. Точка 0 — точка разрыва 2-го рода для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Упражнение. 4. У монотонной функции точки разрыва могут быть только 1-го рода.

5. Функция Римана $R(x)$ определена соглашениями: $R(0) = 0$, $R(x) = 0$ при иррациональном x , $R(p/q) = 1/q$, если $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$ и p/q — несократимая дробь. Показать, что $R(x)$ непрерывна в иррациональных точках и только в них. Какого рода точки разрыва этой функции?

§24. Свойства функций, непрерывных на отрезке

1. Выше мы изучили локальные свойства (то есть свойства, связанные с поведением функции в малой окрестности точки из области определения) непрерывной функции. Отметим, что и само понятие непрерывности функции в точке является локальным свойством. Тем более примечательно, что для определённого класса числовых множеств можно говорить о глобальных свойствах непрерывных функций (то есть свойствах, связанных с поведением функции на всей области её определения). Пока мы ограничимся изучением глобальных свойств непрерывных функций, заданных на отрезке.

2. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда

- (а) функция f ограничена,
- (б) функция f достигает своих граней (то есть существуют $c, d \in [a, b]$ такие, что $f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, $f(d) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$),
- (в) если числа $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ имеют разные знаки, то существует $c \in (a, b)$ такое, что $f(c) = 0$,
- (г) если $f(a) < \gamma < f(b)$, то найдётся $c \in (a, b)$ такое, что $f(c) = \gamma$.

¶ (а). Пусть, напротив, $\forall n \exists x_n \in [a, b]$ ($|f(x_n)| > n$). Последовательность (x_n) содержит сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}) , $x_{n_k} \rightarrow c$ (см. 11.1). Следовательно $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$, но это противоречит тому, что $|f(x_{n_k})| > n_k$ ($k \in \mathbb{N}$).

(б). По свойству (а) существует $\alpha = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Пусть $x_n \in [a, b]$ таковы, что $\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \alpha$ ($n \in \mathbb{N}$) и (x_{n_k}) — сходящаяся подпоследовательность: $x_{n_k} \rightarrow c$. Тогда $\alpha - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq \alpha$ ($k \in \mathbb{N}$), $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$ ($k \rightarrow \infty$). Отсюда по свойству 10.2 $\alpha = f(c)$.

(в). Пусть для определённости $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ и

$$F = \{x \in [a, b] : f(y) > 0, y \in [a, x]\}.$$

Множество $F \neq \emptyset$ (например, $a \in F$) и ограничено. Поэтому существует $c = \sup F$. Точка c искомая: неравенство $f(c) > 0$ противоречит (в силу 22.4) тому, что c — мажоранта F , а $f(c) < 0$ невозможно, так как c — наименьшая мажоранта F .

(г). Положим $g(x) = f(x) - \gamma$ и применим к g свойство (в). \square

Примеры. 3. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ ($0 < x < 1$) непрерывна, но не ограничена; она ограничена снизу, но не достигает своей нижней грани.

4. Уравнение $x = \cos x$ обладает корнем на отрезке $[0, 1]$ (применим 2(в) к функции $f(x) = x - \cos x$).

5. У п р а ж н е н и е. Пусть E — один из промежутков (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ (включая несобственные) и $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает. Тогда $f(E)$ является промежутком того же типа.

6. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) называется *равномерно непрерывной* на E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in E (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Равномерно непрерывная функция, очевидно, непрерывна. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ ($0 < x < 1$) непрерывна, но не равномерно (для $x = \delta$, $y = \frac{\delta}{2} : |x - y| < \delta$, $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| > \frac{1}{\delta} > 1$ для всех $\delta \in (0, 1)$).

7. Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то она и равномерно непрерывна.

¶ Пусть напротив, $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in E (|x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$. Тогда для $\delta_k = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$) найдутся $x_k, y_k \in [a, b]$ такие, что

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k}, \quad |f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (*)$$

Последовательность (x_k) , будучи ограниченной, обладает сходящейся подпоследовательностью $(x_{k_j}) : x_{k_j} \rightarrow c \in [a, b]$. Тогда $y_{k_j} = (y_{k_j} - x_{k_j}) + x_{k_j} \rightarrow c$. Так как f непрерывна в c , то $f(x_{k_j}) - f(y_{k_j}) \rightarrow f(c) - f(c) = 0$, что противоречит (*). □

§25. Продолжение по непрерывности

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на E , и E' — множество всех предельных точек множества E . Тогда f допускает равномерно непрерывное продолжение на $E \cup E'$.

¶ Требуется доказать, что существует $\tilde{f} : F \rightarrow \mathbb{R}$, равномерно непрерывная на $F \equiv E \cup E'$ и такая, что $\tilde{f}|_E = f$. Для каждой точки $a \in E'$ по критерию Коши 19.4 существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Положим

$$\tilde{f}(a) = \begin{cases} f(a), & \text{если } a \in E, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & \text{если } a \in E' \setminus E. \end{cases}$$

Убедимся, что $\tilde{f} : F \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. По условию $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in E (|x' - x''| < 3\delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon/3)$. Пусть $y, z \in F$ таковы, что $|y - z| < \delta$. Тогда найдутся δ', δ'' ($0 < \delta', \delta'' < \delta$) такие, что

$$\begin{aligned} |x' - y| < \delta' &\Rightarrow |f(x') - \tilde{f}(y)| < \varepsilon/3 \quad (x' \in E), \\ |x'' - z| < \delta'' &\Rightarrow |f(x'') - \tilde{f}(z)| < \varepsilon/3 \quad (x'' \in E). \end{aligned}$$

Теперь, выбрав $x' \in (y - \delta', y + \delta') \cap E$, $x'' \in (z - \delta'', z + \delta'') \cap E$, получим

$$|\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z)| \leq |\tilde{f}(y) - f(x')| + |f(x') - f(x'')| + |f(x'') - \tilde{f}(z)| \leq \varepsilon$$

(мы учитываем, что $|x' - x''| \leq |x' - y| + |y - z| + |z - x''| < 3\delta$). Утверждение доказано (см. подчёркнутый текст). \square

§26. Непрерывность обратной функции

1. Пусть E — промежуток в \mathbb{R} (см. 7.1) и $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ строго возрастает (убывает) и непрерывна. Тогда обратная функция $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ строго возрастает (соответственно убывает) и непрерывна.

¶ В силу 4.2 нужно установить непрерывность g в каждой точке $\gamma \in F$. Пусть для определённости $E = [a, b]$. Пусть $c \in [a, b]$ таково, что $f(c) = \gamma$ (см. 24.2(г)). Пусть γ_n — произвольная последовательность такая, что $\gamma_n \rightarrow \gamma$ ($\gamma_n \in F$) и $c_n \in E$ таковы, что $f(c_n) = \gamma_n$. Покажем, что $c_n \rightarrow c$. Если c_n не сходится к c , то существует подпоследовательность (c_{n_k}) , что $c_{n_k} \rightarrow c' \neq c$; $f(c') \neq f(c)$ (из строгой монотонности f). С другой стороны, $f(c_{n_k}) = \gamma_{n_k} \rightarrow \gamma = f(c)$, $f(c_{n_k}) \rightarrow f(c')$, что невозможно. Поэтому $g(\gamma_n) = g(f(c_n)) = c_n \xrightarrow{\gamma_n \rightarrow \gamma} c = g(f(c)) = g(\gamma)$. Утверждение доказано (см. подчёркнутый текст). \square

Примеры. 2. Функция $f(x) = \arcsin x$ ($|x| \leq 1$) непрерывна. Непрерывны и другие обратные тригонометрические функции.

3. Функция $f(x) = x^n$ ($x \geq 0$) для $n \in \mathbb{N}$ непрерывна и строго возрастает. Поэтому обратная функция $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает. Итак, для каждого $a \geq 0$ существует единственное число $b \geq 0$ такое, что $b^n = a$. Это число обозначается $a^{1/n}$ или $\sqrt[n]{a}$ и называется арифметическим корнем n -ой степени из числа a . Таким образом, доказаны существование и непрерывность степенной функции $g(x) = x^{1/n}$ ($x \geq 0$) для $n \in \mathbb{N}$.

Упражнения. 4. Доказать теорему п. 1 для случаев $E = (a, b), [a, b)$.

5. Если E — не промежуток, то теорема п. 1 неверна. Постройте соответствующие примеры.

§27. Важнейшие элементарные функции

1. Показательная функция. Пусть $a > 0$. Показательная функция $y = a^x$ ($x \in \mathbb{R}$), $a^0 \equiv 1$, характеризуется свойствами:

- (а) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- (б) она строго возрастает (убывает) при $a > 1$ (при $a < 1$),
- (в) она непрерывна,
- (г) $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и $a^{1/q}$ определено в 26.3.

Для показательной функции с основанием e мы будем иногда пользоваться обозначением $e^x \equiv \exp\{x\}$.

¶ Докажем существование показательной функции. В силу 26.3 определена функция $f(p) = a^p$ ($p \in \mathbb{Q}$). Функция f обладает свойствами (а) и (б) (!!). Покажем, что f равномерно непрерывна на каждом отрезке $[-N, N] \cap \mathbb{Q}$. Пусть например, $a > 1$. Если $p < q$ ($p, q \in [-N, N] \cap \mathbb{Q}$), то $0 < a^q - a^p = a^p(a^{q-p} - 1) < a^N(a^{q-p} - 1)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $n_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $n > n_0 \Rightarrow |a^{1/n} - 1| < \varepsilon a^{-N}$ (см. 10.9). Тогда

$$\forall p, q \in [-N, N] \cap \mathbb{Q} \ (|p - q| < \frac{1}{n_0} \Rightarrow |a^p - a^q| < \varepsilon),$$

что и требовалось. Но каждая точка $x \in \mathbb{R}$ является предельной для \mathbb{Q} , и в силу §25 определена непрерывная функция $a^x \equiv \lim_{p \rightarrow x, p \in \mathbb{Q}} a^p$ ($x \in \mathbb{R}$). Эта функция также обладает свойствами (а) и (б) (!!). \square

2. Логарифмическая функция. Функция, обратная к показательной $y = a^x$ ($x \in \mathbb{R}$), $a \neq 1$, называется логарифмической и обозначается $y = \log_a x$ ($x > 0$) ; при $a = e$ пишут $y = \ln x$. Имеют место без труда проверяемые тождества:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \quad (x > 0), & \log_a a^x &= x \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0), & \log_a(x^y) &= y \log_a x \quad (x > 0). \end{aligned}$$

3. Степенная функция. Это функция $y = x^b$ ($x > 0$), где по определению считается, что $x^b \equiv e^{b \ln x}$ ($x > 0$). Таким образом, степенная функция непрерывна и обладает свойствами:

$$(x \cdot y)^b = x^b y^b, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^b = 0 \quad (b > 0), \quad \lim_{x \rightarrow \infty+} x^b = +\infty \quad (b > 0).$$

4. Гиперболические функции. Это функции, определённые равенствами:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ — синус гиперболический,} \\ \operatorname{ch} x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ — косинус гиперболический,} \\ \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ — тангенс гиперболический,} \\ \operatorname{cth} x &= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad (x \neq 0) \text{ — котангенс гиперболический.} \end{aligned}$$

5. С помощью введённых выше функций может быть определён класс элементарных функций, состоящий из показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций, а также функций, получающихся из перечисленных выше с помощью арифметических операций и операции суперпозиции, применённых конечное число раз. Из 22.5, 22.6 следует, что любая элементарная функция непрерывна на своей области определения.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§28. Задачи, приводящие к определению производной

1. *Задача определения касательной к кривой.* Рассмотрим график функции $y = f(x)$ ($x \in E$). Зафиксируем точку x_0 и будем проводить через точку с координатами $(x_0, f(x_0))$ прямые с различными угловыми коэффициентами $k = \operatorname{tg} \alpha$. В точках, близких к x_0 , эти прямые аппроксимируют нашу кривую. Соответствующая погрешность аппроксимации в точке $x_0 + h$ равна (Рис. 8)

$$r(h) = f(x_0 + h) - [f(x_0) + kh].$$

Если f непрерывна в x_0 , то $r(h) = o(1)$ ($h \rightarrow 0$), т. е. погрешность стремится к нулю вместе с h . Если среди прямых есть такая, для которой погрешность аппроксимации имеет высший, по сравнению с h , порядок малости, т. е. $r(h) = o(h)$ ($h \rightarrow 0$), то такая прямая единственна. Она называется касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 .

¶ Условие существования касательной в точке x_0 имеет вид $f(x_0 + h) - [f(x_0) + k_0 h] = o(h)$ ($h \rightarrow 0$); отсюда угловой коэффициент касательной $k_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_0 + h) - f(x_0)]$. Из единственности предела (см. 19.1) теперь следует единственность касательной, если она существует. \square

Итак, искомое уравнение касательной

$$y - f(x_0) = k_0(x - x_0), \quad k_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_0 + h) - f(x_0)].$$

2. *Мгновенная скорость.* Пусть $s(t)$ — путь, пройденный материальной точкой за время t . Средняя скорость на участке времени $[t_0, t_0 + h]$ ($[t_0 + h, t_0]$, если $h < 0$) есть $v_{\text{ср.}} = \frac{1}{h} [s(t_0 + h) - s(t_0)]$. Мгновенной скоростью (в момент времени t_0) называется величина $v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [s(t_0 + h) - s(t_0)]$.

§29. Определение производной

1. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) называется дифференцируемой в точке $x \in E$, если в E содержится некоторая окрестность точки x и

$$f(x + h) - f(x) = Ah + o(h) \quad (h \rightarrow 0). \quad (*)$$

Число A , которое обозначается также $f'(x)$, однозначно определяется равенством (*) и называется *производной функции f в точке x* . Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)].$$

2. З а м е ч а н и е. Если f дифференцируема в точке x , то она непрерывна в x . Это следует из (*) с учётом 22.2.

3. Если f дифференцируема в точке x , то определено отображение $L_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L_x(h) = f'(x)h$ ($h \in \mathbb{R}$), связанное с точкой x и заданное на смещениях h . Это отображение (оно линейно по h) называется *производным (касательным) отображением к f в точке x* . Значение производного отображения на смещении h называется *дифференциалом* функции f в точке x : $L_x(h) = f'(x)h$. Смещение h традиционно обозначают символом dx (нужно помнить, что dx не зависит от x), а дифференциал функции f в точке x обозначают $df(x)$. Итак, $df(x) = f'(x)dx$.

4. Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в каждой точке множества E (это значит, в частности, что E — открытое множество), то определена функция $x \rightarrow f'(x)$ ($x \in E$), которая называется *производной функции f* и обозначается f' или $\frac{df}{dx}$.

5. Если функция f дифференцируема в точке x_0 , то уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 задаётся уравнением (см. 28.1)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

На Рис. 9 виден геометрический смысл дифференциала функции f : $df(x_0) = f'(x_0)dx = AC$, $f(x_0 + dx) - f(x_0) = df(x_0) + o(dx) = AB$.

П р и м е р ы. **6.** $f(x) = C$ ($x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow f'(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

7. $(\sin x)' = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$).

¶ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\sin(x+h) - \sin x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \sin \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{2x+h}{2} = \cos x$. □

8. $(\cos x)' = -\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$).

9. $(a^x)' = a^x \ln a$ ($x \in \mathbb{R}$). В частности, $(e^x)' = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$).

¶ $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1) \cong a^x \ln a \cdot h$ ($h \rightarrow 0$) (см. 21.8). □

10. Понятие дифференциала часто используется в приближённых вычислениях. “По всему земному шару выпало 1 мм осадков. Оценить выпавшее количество воды.”

Объём шара радиуса x равен $v(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$, приращение объёма

$$v(x+dx) - v(x) \approx dv(x) = v'(x)dx = 4\pi x^2 dx = \frac{(2\pi x)^2}{\pi} dx$$

(мы использовали формулу для производной от степенной функции (см. ниже 30.5)). В нашем случае $dx = 10^{-6}$ км., $2\pi x \approx 4 \cdot 10^4$ км. Поэтому $v(x+dx) - v(x) \approx \frac{16}{\pi} \cdot 10^2 \text{ км}^3 \approx 510 \text{ км}^3$.

11. Часто приходится рассматривать видоизменения понятия производной. Рассмотрим асимптотические равенства:

$$f(x+h) - f(x) = A_1 h + o(h) \quad (h \rightarrow 0+),$$

$$f(x+h) - f(x) = A_2 h + o(h) \quad (h \rightarrow 0-).$$

Если имеет место 1-е (соответственно 2-е) равенство, то говорят, что функция f обладает правой (соответственно левой) производной в точке x . Обозначения: $A_1 = f'(x+)$, $A_2 = f'(x-)$.

12. З а м е ч а н и е. Функция f дифференцируема в точке x тогда $f'(x+) = f'(x-)$.

13. У п р а ж н е н и е. Пусть $f(x) = |x|$ ($x \in \mathbb{R}$). Найти $f'(x)$ при $x \neq 0$, найти $f'(0+)$, $f'(0-)$.

§30. Техника дифференцирования

1. Пусть f, g дифференцируемы в точке x . Тогда в x дифференцируемы $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (если $g(x) \neq 0$), причём

$$(a) \quad (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x), \quad d(f \pm g)(x) = df(x) \pm dg(x),$$

$$(б) \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$d(f \cdot g)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x),$$

$$(в) \quad (f/g)'(x) = \frac{1}{g^2(x)}[f'(x)g(x) - g'(x)f(x)],$$

$$d(f/g)(x) = \frac{1}{g^2(x)}[g(x)df(x) - f(x)dg(x)].$$

¶ Формулы для дифференциалов являются очевидным следствием соответствующих формул для производных. Формулы для производных следуют из вычислений:

$$\begin{aligned} (f+g)(x+h) - (f+g)(x) &= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)] \\ &= f'(x)h + o(h) + g'(x)h + o(h) = [f'(x) + g'(x)]h + o(h) \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) + f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1/g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{h} [g(x+h) - g(x)] \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \right] = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \quad \square \end{aligned}$$

2. [Следствие]. $(cf)'(x) = cf'(x)$, $c = \text{const}$.

3. [Дифференцирование суперпозиции функций]. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g: F \rightarrow \mathbb{R}$, $f(E) \subset F$, f дифференцируема в $x \in E$, а g дифференцируема в $f(x)$. Тогда $g \circ f$ дифференцируема в x , причём

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x), \quad d(g \circ f)(x) = g'(f(x))df(x).$$

¶ Действительно,

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= g(f(x) + [f(x+h) - f(x)]) - g(f(x)) \\ &= g'(f(x))[f(x+h) - f(x)] + o(f(x+h) - f(x)). \end{aligned}$$

Так как $o(f(x+h) - f(x)) = o(h)$ ($h \rightarrow 0$), имеем отсюда

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)h + o(h) \quad (h \rightarrow 0). \quad \square$$

4. [Дифференцирование обратной функции]. Пусть f и g — взаимно обратные функции. Пусть g непрерывна в точке x , а f дифференцируема в точке $g(x)$, причём $f'(g(x)) \neq 0$. Тогда g дифференцируема в точке x и

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

¶ Так как g непрерывна в x , величина $g(x+h) - g(x)$ мала, если мало смещение h . Поэтому справедлива выкладка

$$\begin{aligned} h &= x+h-x = f(g(x+h)) - f(g(x)) \\ &= f(g(x) + g(x+h) - g(x)) - f(g(x)) \\ &= f'(g(x))(g(x+h) - g(x)) + o(g(x+h) - g(x)) \\ &= (g(x+h) - g(x))(f'(g(x)) + o(1)) \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [g(x+h) - g(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} [f'(g(x)) + o(1)]^{-1} = \frac{1}{f'(g(x))}. \quad \square$$

5. [Таблица производных элементарных функций]. Часть приведённых ниже формул получена ранее. Остальные получаются с помощью доказанных выше утверждений (пп. 1–4). Дадим несколько иллюстраций.

Положим $f(x) = a^x$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(x) = \log_a x$ ($x > 0$). Согласно п. 4

$$(\log_a x)' = (a^{\log_a x} \cdot \ln a)^{-1} = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0).$$

В силу п. 3 и 29.13 $(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

Положим $f(x) = \sin x$ ($|x| < \frac{\pi}{2}$), $g(x) = \arcsin x$ ($|x| < 1$). Тогда (п. 4)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

Формула $(x^b)' = bx^{b-1}$ ($x \in \mathbb{R}$) легко получается по индукции для $b = 0, 1, 2, \dots$. Если $b = -1, -2, \dots$, то

$$(x^b)' = (1/x^{-b})' = -(x^{-b})'/x^{-2b} = bx^{b-1} \quad (x \neq 0).$$

Если, наконец, b произвольно, то формула $(x^b)' = bx^{b-1}$ ($x > 0$) есть следствие представления $x^b = e^{b \ln x}$.

6. З а м е ч а н и е. Для вычисления производных функций вида $f(x) = u(x)^{v(x)}$ ($u(x) > 0$) следует воспользоваться представлением $f(x) = e^{v(x) \ln u(x)}$.

$(\sin x)' = \cos x \ (x \in \mathbb{R})$	$(a^x)' = a^x \ln a \ (x \in \mathbb{R})$
$(\cos x)' = -\sin x \ (x \in \mathbb{R})$	$(e^x)' = e^x \ (x \in \mathbb{R})$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \ (\cos x \neq 0)$	$(\ln x)' = 1/x \ (x \neq 0)$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \ (\sin x \neq 0)$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (x < 1)$	$(x \neq 0, 0 < a \neq 1)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (x < 1)$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \ (x \in \mathbb{R})$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \ (x \in \mathbb{R})$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \ (x \in \mathbb{R})$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \ (x \in \mathbb{R})$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \ (x \in \mathbb{R})$
$(x^b)' = bx^{b-1} \ (x > 0)$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \ (x \neq 0)$

У п р а ж н е н и я. Найти производные функций:

7. $\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$,

8. $\arcsin \frac{x}{a}$ (ответ: $(a^2 - x^2)^{-1/2} \cdot \operatorname{sgn} a$),

9. $\arcsin \frac{1}{x}$ (ответ: $-[x(x^2 - 1)^{-1/2}] \cdot \operatorname{sgn} x \ (|x| > 1)$),

10. x^x ,

11. $\ln |\operatorname{tg} x|$,

12. $f(x) = \begin{cases} \exp\{-1/x^2\}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

§31. Производные высших порядков

1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в каждой точке E , то есть определена функция $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$. Если f' дифференцируема в точке x_0 , то число $(f')'(x_0)$ называется 2-й производной f в точке x_0 и обозначается $f''(x_0)$ или $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$. Пусть, в частности, f' дифференцируема в каждой точке множества E . Тогда на E определена функция $f''(x) \equiv (f')'(x) \ (x \in E)$, которая называется 2-й производной функции f и обозначается f'' или $\frac{d^2 f}{dx^2}$. По индукции определяется производная n -ого порядка в точке x_0 ; обозначение $f^{(n)}(x_0)$. Если f n раз дифференцируема в точке x , то равенством $d^n f(x) \equiv f^{(n)}(x)dx^n$ определяется дифференциал n -ого порядка функции f в точке x .

2. [Формула Лейбница]. Пусть u, v — функции, n раз дифференцируемые в точке x . Тогда (считая $u^{(0)} \equiv u$) имеем

$$(uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Здесь $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, $0! \equiv 1$.

¶ Доказательство по индукции. При $n = 1$ — это формула 30.1(б). Если формула верна для всех натуральных чисел $\leq n$, то

$$\begin{aligned}
 (uv)^{(n+1)}(x) &= ((uv)^{(n)})'(x) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} \right)'(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [u^{(k+1)}(x) v^{(n-k)}(x) + u^{(k)}(x) v^{(n-k+1)}(x)] \\
 &= u^{(0)}(x) v^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] u^{(k)}(x) v^{(n-k+1)}(x) \\
 &\quad + u^{(n+1)}(x) v^{(0)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(k)}(x) v^{(n+1-k)}(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

П р и м е р ы. **3.** $(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + \frac{\pi n}{2} \right)$.

4. $(x \cdot \cos x)^{(100)} = x(\cos x)^{(100)} + 100(\cos x)^{(99)} = x \cdot \cos x + 100 \sin x$.

§32. Основные теоремы

1. Т е о р е м а [М. Ролль]. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и на (a, b) дифференцируема, причём $f(a) = f(b)$. Тогда существует c ($a < c < b$) такое, что $f'(c) = 0$.

¶ Теорема очевидна, если f постоянна на $[a, b]$. Пусть $f \neq \text{const}$ и существует $x \in (a, b)$ такое, что, например, $f(x) > f(a)$. Тогда (см. 24.2(б)) найдётся $c \in (a, b)$ такое, что $f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. При этом

$$f'(c+) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad f'(c-) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Следовательно, $f'(c) = f'(c+) = f'(c-) = 0$ (см. 29.12). \square

2. Т е о р е м а [О. Коши]. Пусть $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и на (a, b) дифференцируемы, причём $f'(x), g'(x)$ не равны нулю одновременно и $g(b) \neq g(a)$. Тогда существует c ($a < c < b$) такое, что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

¶ Функция $h(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому существует $c \in (a, b)$ такое, что

$$h'(c) = g'(c)[f(b) - f(a)] - f'(c)[g(b) - g(a)] = 0.$$

Заметим, что $g'(c) \neq 0$, ибо иначе $f'(c) = 0$, что противоречит предположению теоремы. Отсюда следует искомое равенство. \square

3. [Формула Лагранжа (конечных приращений)]. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и на (a, b) дифференцируема. Тогда существует c ($a < c < b$) такое, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

¶ Положим в теореме Коши $g(x) = x$ ($a \leq x \leq b$). \square

4. Следствие. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и на (a, b) дифференцируема, причём $f'(x) = 0$ ($a < x < b$). Тогда $f = \text{const}$.

¶ Для любого $x \in (a, b)$: $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$. □

Замечания. 5. В условиях формулы Лагранжа для любого $x \in (a, b)$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h \quad (0 < \theta < 1, \theta = \theta(h)). \quad (*)$$

Это соотношение полезно сопоставить с равенством

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \quad (h \rightarrow 0).$$

Если f' непрерывна на (a, b) , то из 1-го равенства следует второе, так как $f'(x+\theta h) = f'(x) + o(1)$ ($h \rightarrow 0$). Однако для справедливости (*) не необходимо, чтобы f' была непрерывной на (a, b) .

6. Геометрический смысл формулы Лагранжа: существует внутренняя точка отрезка, касательная в которой параллельна стягивающей хорде (см. Рис. 10).

Упражнения. 7. Справедлива ли формула конечных приращений Лагранжа для функции

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \in \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } x = 0? \end{cases}$$

8. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойством: для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ ($x_1 < x_2$) существует $y \in (x_1, x_2)$ такое, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(y)(x_2 - x_1)$. Следует ли отсюда, что f дифференцируема на (a, b) ?

9. Пусть f дифференцируема для всех $x \in \mathbb{R}$ и $f(x+h) - f(x) = f'(x)h$ при всех $x, h \in \mathbb{R}$. Покажите, что тогда $f(x) = ax + b$ ($x \in \mathbb{R}$).

10. Пусть f непрерывна на промежутке $[a, b)$, дифференцируема на (a, b) , причём существует $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Покажите, что в точке a определена правая производная и $f'(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$.

ПРИЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§33. Правило Лопиталя

1. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и f, g определены и дифференцируемы в некоторой \sim -окрестности U точки a , причём $g(x), g'(x) \neq 0$ и выполнено одно из условий

$$(0/0) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

$$(\infty/\infty) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, коль скоро существует предел (быть может, несобственный) в правой части. Правило верно также для случаев $a = \infty, \pm\infty, x \rightarrow a \pm$.

¶ Разберём несколько типичных случаев.

1⁰. $(0/0)$, $U = (a, \lambda)$, $x \rightarrow a+$. Определим функции f и g в точке a : $f(a) = g(a) = 0$. Тогда f и g непрерывны в a и применима теорема Коши 32.2 к отрезку $[a, x]$ ($x < \lambda$). Следовательно,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < c < x, c = c(x)),$$

то есть $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

2⁰. $(0/0)$, $U = (\lambda, a)$, $x \rightarrow a-$. Разбирается аналогично. Теперь из 1⁰ и 2⁰ утверждение следует для случая

3⁰. $(0/0)$, $U = (b, a) \cup (a, c)$, $x \rightarrow a$.

4⁰. $(0/0)$, $a = \infty$. Положим $y = \frac{1}{x}$. Функции $F(y) \equiv f(\frac{1}{y})$, $G(y) \equiv g(\frac{1}{y})$ дифференцируемы в некоторой \sim -окрестности нуля, причём $G(y), G'(y) \neq 0$. Теперь

$$\lim_{y \rightarrow 0} F(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} G(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})}{g'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(в предпоследнем равенстве мы воспользовались уже разобранным случаем $(0/0)$ для собственной точки $a = 0$).

5⁰. (∞/∞) , $U = (a, \lambda)$, $x \rightarrow a+$. Пусть $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$. Для x , достаточно близких к a , имеем (с учётом теоремы Коши для отрезка $[x, \delta] \subset (a, \lambda)$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)[g(\delta) - g(x)]}{g(x)[f(\delta) - f(x)]} \cdot \frac{f(\delta) - f(x)}{g(\delta) - g(x)} = h(\delta, x) \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $x < c < \delta$ и $h(\delta, x) = [1 - \frac{f(\delta)}{f(x)}]^{-1}(1 - \frac{g(\delta)}{g(x)})$. Параметром δ в правой части равенства мы можем распоряжаться. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно ($\varepsilon < 1$) и δ таково, что $|\frac{f'(y)}{g'(y)} - \frac{f'(x)}{g'(x)}| \leq \varepsilon/3$ для всех $x, y \in (a, \delta)$. В силу условия (∞/∞) существует $N > 0$ такое, что

$$|h(\delta, x) \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha| < \varepsilon/3, \quad |h(\delta, x) - 1| < \varepsilon/3 \quad (|x| > N).$$

Тогда для $|x| > N$

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha| = |(h(\delta, x) - 1)(\frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(x)}{g'(x)}) + \frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(x)}{g'(x)} + h(\delta, x) \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha| < \varepsilon,$$

то есть $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. \square

З а м е ч а н и я. 2. Обратное утверждение в правиле Лопиталя уже неверно. Например, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = 0$, но отношение $\frac{(x^2 \sin(1/x))'}{(\sin x)'} = \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$ никуда не сходится при $x \rightarrow 0$.

3. Типы неопределённостей $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ приводятся к типам $(0/0)$, (∞/∞) . Например, для $\infty - \infty$: $f(x) - g(x) = \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/f(x)g(x)}$. Для раскрытия неопределённостей последних трёх типов полезно использовать представление $f(x)^{g(x)} = \exp\{g(x) \cdot \ln f(x)\}$.

П р и м е р ы. 4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} b(1+x)^{b-1} = b$ ($b \neq 0$).

§34. Формула Тейлора

1. Уравнение касательной (см. 29.5) доставляет локальную аппроксимацию дифференцируемой функции линейной функцией. На формулу Лагранжа 32.5(*) можно смотреть как на глобальную аппроксимацию дифференцируемой функции линейной функцией. Естественно задуматься над тем, нельзя ли улучшить аппроксимацию, рассмотрев вместо линейных полиномиальные функции. Здесь мы получим подходящее обобщение формулы Лагранжа конечных приращений. В §35 будет получено обобщение на полиномиальный случай формулы производной 29.1(*).

2. [Формула Тейлора]. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (U открыто) $n-1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, x] \subset U$ ² и n раз дифференцируема на (a, x) . Тогда существует $c \in (a, x)$ такое, что имеет место равенство

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \quad (1)$$

²то есть $f^{(n-1)}$ определена и непрерывна в каждой точке отрезка $[a, x]$.

Величина $r_n(x) \equiv \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-a)^n$ называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

¶ Положим для $a \leq z \leq x$

$$g(z) = f(x) - [f(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}f^{(k)}(z)(x-z)^k + \lambda(x-z)^n] \quad (2)$$

и выберем λ так, чтобы $g(a) = 0$. К функции g применима теорема Ролля 32.1 ($g(x) = 0$ по построению, так что $g(a) = g(x)$). Следовательно, существует $c \in (a, x)$ такое, что $g'(c) = 0$. Прямой подсчёт даёт

$$g'(c) = -\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(c)(x-c)^{n-1} + n\lambda(x-c)^{n-1},$$

откуда $\lambda = \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)$. Так как $g(a) = 0$, из (2) получаем (1). \square

3. Для полинома $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ имеем $r_{n+1}(x) = 0$, так что $p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(a)(x-a)^n$. Эта формула даёт, в частности, рецепт представления данного полинома по степеням $x-a$.

П р и м е р ы (используется формула (1) при $a = 0$).

4. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}$ ($x \in \mathbb{R}$, $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$).

5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x + \frac{2n+1}{2}\pi)$
($x \in \mathbb{R}$, $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$).

6. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos(\theta x + n\pi)$
($x \in \mathbb{R}$, $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$).

7. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(1+\theta x)^n}$ ($x > -1$, $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$).

8. $(1+x)^b = 1 + bx + \dots + \frac{1}{(n-1)!}b(b-1)\dots(b-n+2)x^{n-1} + \frac{1}{n!}b(b-1)\dots(b-n+1)x^n(1+\theta x)^{b-n}$ ($x > -1$, $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$).

§35. Локальная формула Тейлора

1. Если f n раз дифференцируема в точке a , то

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a).$$

Эта формула называется формулой Тейлора с остатком в форме Пеано.

¶ Достаточно доказать утверждение для случая, когда

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0. \quad (*)$$

(Если $(*)$ не имеет места, то полагая

$$h(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k,$$

имеем $h(a) = h'(a) = \dots = h^{(n)}(a) = 0$.) Итак, пусть выполнено $(*)$. При $n = 1$: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) = o(x-a)$ ($x \rightarrow a$), то есть утверждение верно. Пусть оно верно для всех $k \leq n-1$. Положим $g(x) = f'(x)$. Тогда $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n-1)}(a) = 0$, и по предположению индукции $g(x) = o((x-a)^{n-1})$ ($x \rightarrow a$). Используя правило Лопиталя 33.1, имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0. \quad \square$$

2. Разложение с остатком в форме Пеано единственно.

¶ Пусть имеет место ещё одно представление

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a).$$

Вычитая отсюда равенство, доказанное в п. 1, имеем

$$0 = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a),$$

где $c_k = a_k - \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$, $0 \leq k \leq n$. Переходя здесь к пределу при $x \rightarrow a$, получаем $c_0 = 0$. Таким образом,

$$0 = c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a).$$

Разделив обе части этого равенства на $x-a$ и перейдя к пределу при $x \rightarrow a$, получим $c_1 = 0$. Аналогично получим последовательно $c_2 = \dots = c_n = 0$. \square

§36. Ряд Тейлора

1. Если $f(x)$ ($x \in U(a)$) n раз дифференцируема в точке a , то при подходящем выборе $r_n(x)$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_n(x).$$

Допустим теперь, что f имеет в точке a производные сколь угодно высоких порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots$$

естественно назвать *рядом Тейлора* функции f по степеням $x-a$. Важен случай, когда ряд Тейлора сходится к $f(x)$.

2. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$ тогда $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

¶ Пусть $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$ — частные суммы ряда Тейлора, так что $f(x) = s_n(x) + r_n(x)$. Если $r_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), то $\lim_n s_n(x) = \lim_n [f(x) - r_n(x)] = f(x)$. Обратно, если ряд Тейлора сходится к $f(x)$, то $s_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$), так что $r_n(x) = f(x) - s_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). □

П р и м е р ы. **3.** $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ ($x \in \mathbb{R}$).

$$4. \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$5. \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$6. \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1).$$

$$7. \quad (1+x)^b = 1 + bx + \dots + \frac{1}{n!} b(b-1) \dots (b-n+1)x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

¶ П.3. Из 34.4 и 11.8 следует, что $r_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

П.4. С учётом 34.5 $|r_{2n+1}(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

П.6,7. Пока мы не сможем доказать эти равенства в указанных областях, так как форма остатка Лагранжа недостаточно эффективна для этого. Например, для п. 6 (см. 34.7)

$$|r_n(x)| = \frac{1}{n} \frac{|x|^n}{(1+\theta x)^n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right),$$

и нельзя получить подобного результата для $-1 < x < -\frac{1}{2}$ (!!). Позднее мы получим ещё одну полезную форму остатка, с помощью которой и устраним оставшиеся пробелы. □

§37. Аналитические функции

1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ открыто, функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аналитической* в E , если каждая точка $a \in E$ обладает окрестностью $U(a) \subset E$ такой, что ряд Тейлора f по степеням $x-a$ сходится для всех $x \in U(a)$.

П р и м е р ы. **2.** Функции e^x ($x \in \mathbb{R}$), $\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$), $\cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) являются аналитическими в \mathbb{R} (см. 36.3–36.5).

3. Функция $\ln x$ ($x > 0$) аналитическая. Действительно, для каждого $a > 0$ формула Тейлора по степеням $x-a$ даёт

$$\ln x = \ln a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{ka^k} (x-a)^k + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{(-1)^n (x-a)^n}{n[a + \theta(x-a)]^n}.$$

Для $x \in U(a) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ мы имеем $|a + \theta(x-a)| > \frac{a}{2}$, то есть $|r_n(x)| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Поэтому

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{1 \cdot a} - \frac{(x-a)^2}{2 \cdot a^2} + \frac{(x-a)^3}{3 \cdot a^3} - \dots (|x-a| < \frac{a}{2}).$$

4. Функция $f(x)$, определённая в 30.12 обладает производными любого порядка в \mathbb{R} , причём $f^{(n)}(0) = 0$, так что ряд Тейлора этой функции по степеням x сходится к 0, а не к $f(x)$. Итак, эта функция не аналитическая.

У п р а ж н е н и е. 5. Доказать, что функция $(1+x)^b (x > -1)$ аналитическая.

§38. Возрастание и убывание функций на отрезке

1. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и на (a, b) дифференцируема. Тогда имеет место таблица

f'		f на отрезке $[a, b]$		f'
> 0	\Rightarrow_1	строго возрастает	\Rightarrow_6	≥ 0
≥ 0	\Rightarrow_2	не убывает	\Rightarrow_7	≥ 0
$\equiv 0$	\Rightarrow_3	константа	\Rightarrow_8	$\equiv 0$
≤ 0	\Rightarrow_4	не возрастает	\Rightarrow_9	≤ 0
< 0	\Rightarrow_5	строго убывает	\Rightarrow_{10}	≤ 0

¶ Импликации $(\Rightarrow_1) - (\Rightarrow_5)$ являются следствием формулы Лагранжа

$$f(y) - f(x) = f'(z)(y - x) \quad (a \leq x < z < y \leq b). \quad (*)$$

Отметим, что импликация (\Rightarrow_3) уже доказана ранее (см 32.4). Импликации $(\Rightarrow_6) - (\Rightarrow_{10})$ следуют из определения производной. В частности, (\Rightarrow_7) следует из неравенства

$$f'(x) = f'(x+) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] \geq 0;$$

(\Rightarrow_6) следует из (\Rightarrow_7) . \square

2. З а м е ч а н и е. Из строгого возрастания функции f на $[a, b]$ не следует, что $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Например, $f(x) = x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) строго возрастает, но $f'(0) = 0$.

§39. Локальный экстремум

1. Говорят, что функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) обладает *локальным максимумом* (соответственно *минимумом*) в точке $a \in E$, если существует окрестность нуля $U(0)$ такая, что $f(a+h) - f(a) \leq 0$ (соответственно $f(a+h) - f(a) \geq 0$) для всех $h \in U(0) \cap \{h : a+h \in E\}$. Говорят, что f обладает в точке a *локальным экстремумом*, если f обладает в этой точке локальным максимумом или минимумом.

2. Если f дифференцируема в точке a и обладает в этой точке локальным экстремумом, то $f'(a) = 0$. Более того, если $f'(a) = 0$ и $f''(a) > 0$, то a — точка локального минимума; если $f'(a) = 0$ и $f''(a) < 0$, то a — точка локального максимума.

¶ 1-е утверждение следует из неравенств (случай локального максимума)

$$f'(a+) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} [f(a+h) - f(a)] \leq 0, \quad f'(a-) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1}{h} [f(a+h) - f(a)] \geq 0.$$

Пусть $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$. Тогда существует $U(0)$ такая, что $\frac{1}{h} [f'(a+h) - f'(a)] = \frac{1}{h} f'(a+h) > 0$ ($h \in \check{U}(0)$), то есть знак $f'(a+h)$ совпадает со знаком h ($h \in \check{U}(0)$) и

$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h \geq 0$ ($h \in \check{U}(0)$) (так как $0 < \theta < 1$). Итак, a — точка локального минимума. \square

3. З а м е ч а н и е. Необходимое условие экстремума в точке $a \in (c, d)$: несуществование производной в точке a или обращение её в 0.

4. При исследовании на экстремум полезна табличка (предполагается, что f непрерывна на (c, d) , $c < a < d$):

5. П р и м е р. Принцип Ферма гласит, что траектория света в физической среде реализует минимум времени, которое необходимо лучу, чтобы пройти расстояние между заданными точками (в однородной среде свет распространяется прямолинейно). Пусть имеются две однородные среды и c_i — скорость света в среде (i) , $i = 1, 2$. Требуется найти траекторию света между точками A_1 и A_2 (см. Рис. 11). Время, которое потребовалось бы лучу, чтобы пройти путь, минуя точку x ,

$$t(x) = \frac{1}{c_1} (h_1^2 + x^2)^{1/2} + \frac{1}{c_2} (h_2^2 + (a-x)^2)^{1/2}.$$

Необходимое условие локального экстремума $t'(x) = 0$ даёт: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$. Остаётся заметить, что соответствующая точка действительно реализует минимум функции $t(x)$.

§40. Выпуклые функции

1. Функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*), если для любых $x, y \in (a, b)$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \quad (*)$$

Если же имеет место обратное неравенство $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$, говорят, что функция *вогнута* (*выпукла вверх*).

2. Геометрически условие $(*)$ означает, что множество

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), f(x) \leq y\}$$

является выпуклым, то есть вместе с каждыми своими двумя точками оно содержит и отрезок, соединяющий эти точки.

3. Дифференцируемая функция $f(x)$ ($a < x < b$) называется *выпуклой* (соответственно *вогнутой*) в точке $c \in (a, b)$, если в некоторой окрестности точки c график этой функции находится над (соответственно под) касательной в точке c . Говорят, что c — *точка перегиба*, если для некоторого $\delta > 0$ в интервалах $(c - \delta, c)$, $(c, c + \delta)$ график находится по разные стороны от касательной в точке c . Приведём практически эффективные условия выпуклости функции.

4. Дифференцируемая на (a, b) функция f выпукла тогда и только тогда, когда f' не убывает на (a, b) . В частности, если f дважды дифференцируема на (a, b) , то она выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ ($a < x < b$).

¶ Пусть выпуклая функция f дифференцируема на (a, b) , $a < x < y < b$ и $h > 0$ таково, что $x + h < y$. Полагая $\alpha = 1 - \frac{h}{y - x}$, имеем $x + h = \alpha x + (1 - \alpha)y$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[f(x + h) - f(x)] &\leq \frac{1}{h}[\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - f(x)] = \frac{1 - \alpha}{h}[f(y) - f(x)] \\ &= \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \end{aligned}$$

Отсюда $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h}[f(x + h) - f(x)] \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Аналогичные вычисления для $\eta > 0$ такого, что $x < y - \eta$, показывают, что $\frac{f(y - \eta) - f(y)}{-\eta} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$, так что

$$f'(y) = \lim_{\eta \rightarrow 0+} \frac{f(y - \eta) - f(y)}{-\eta} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq f'(x).$$

Необходимость первого утверждения доказана.

Пусть теперь f' не убывает на (a, b) , $a < x < y < b$ и $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, $\alpha \in [0, 1]$. Применяя формулу Лагранжа, получаем

$$f(x) - f(z) = f'(\xi)(x - z), \quad f(y) - f(z) = f'(\eta)(y - z),$$

где $\xi \in (x, z)$, $\eta \in (z, y)$, так что $f'(\xi) \leq f'(\eta)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= \alpha(f(x) - f(z)) + (1 - \alpha)(f(y) - f(z)) \\ &= \alpha f'(\xi)(x - z) + (1 - \alpha)f'(\eta)(y - z) \\ &\geq f'(\eta)[\alpha(x - z) + (1 - \alpha)(y - z)] = 0. \end{aligned}$$

Достаточность установлена. Частное утверждение следует из таблицы 38.1. \square

5. Пусть f'' определена в некоторой окрестности $U(c)$ и непрерывна в точке c . Тогда

- (а) $f''(c) > 0$ влечёт, что f выпукла в точке c ,
 (б) $f''(c) < 0$ влечёт, что f вогнута в точке c ,
 (в) если $f''(c) = 0$ и $f^{(3)}$ определена в некоторой окрестности $U(c)$, непрерывна в точке c и $f^{(3)}(c) \neq 0$, то c — точка перегиба.

¶ Утверждения (а) и (б) следуют из представления

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + r_2(x),$$

где $r_2(x) = \frac{1}{2}(x - c)^2 f''(c + \theta(x - c))$ характеризует превышение графика над касательной $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ в точке c . Если, например, $f''(c) > 0$, то в силу непрерывности f'' в точке c функция f'' сохраняет знак в некоторой окрестности точки c , и значит, в этой окрестности график находится над касательной, то есть f выпукла в точке c .

В случае (в)

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{3!}(x - c)^3 f^{(3)}(c + \theta(x - c)),$$

и снова заметим, что $f^{(3)}$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки c , а сомножитель $(x - c)^3$ меняет знак при переходе через точку c . □

6. П р и м е р. Функция $f(x) = x^b$ ($x > 0$) выпукла при $b \geq 1$, так как $f''(x) = b(b - 1)x^{b-2} \geq 0$ ($x > 0$) и остаётся учесть п. 4.

§41. Несколько важных неравенств

В следующих ниже утверждениях $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ произвольны.

$$1. \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right]^{1/q} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; p, q > 1 \right).$$

$$2. \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right]^{1/p} \quad (p \geq 1).$$

3. Если ряды $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$, $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q$ сходятся ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; p, q > 1$), то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ сходится абсолютно, причём

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right| \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q \right]^{1/q}.$$

4. Если ряды $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$, $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$ сходятся ($p \geq 1$), то сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p$, причём

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right]^{1/p}.$$

Неравенство п. 3 называется неравенством Гёльдера, п. 4 — Минковского. Если, $p = q = 2$, то неравенства пп. 3,4 называются соответственно неравенствами Коши-Буняковского и Шварца.

¶ Пп. 3, 4 очевидным образом следуют из п. 1 и 2 соответственно. В свою очередь, п. 2 является следствием п. 1:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right]^{1/q} + \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right]^{1/q} \end{aligned}$$

(так как $(p-1)q = p$), и остаётся разделить обе части полученного неравенства на $\left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right]^{1/q}$.

П. 1, как нетрудно видеть, следует из неравенства

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left[\sum_{i=1}^n x_i^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^n y_i^q \right]^{1/q} \quad (x_i, y_i > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; p, q > 1). \quad (1)$$

Осталось доказать (1). Введём функцию

$$f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \quad (x > 0) \text{ при } 0 < \alpha < 1.$$

Имеем

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) \begin{cases} > 0 & \text{при } 0 < x < 1, \\ < 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0 \quad \text{при } x > 0, \quad (2)$$

причём левая часть обращается в нуль в единственной точке $x = 1$ (здесь имеет место максимум). Полагая в (2) $\alpha = \frac{1}{p}$ (так что $1 - \alpha = \frac{1}{q}$), $x = a/b$, где $a =$

$x_i^p \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{-1}$, $b = y_i^q \left(\sum_{j=1}^n y_j^q \right)^{-1}$, имеем $a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b$, то есть

$$\frac{x_i y_i}{\left[\sum_{j=1}^n x_j^p \right]^{1/p} \left[\sum_{j=1}^n y_j^q \right]^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{x_i^p}{\sum_{j=1}^n x_j^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{y_i^q}{\sum_{j=1}^n y_j^q}.$$

Суммируя эти неравенства по i , получаем (1). \square

ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§42. Первообразная и неопределённый интеграл

Зная элементарную функцию, мы умеем найти её производную. Обратная задача — отыскание функции по её производной. К её решению мы переходим.

1. Пусть $E(\subset \mathbb{R})$ открыто. Функция $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *первообразной* для функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, если F дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ ($x \in E$). Естественно спросить, для каждой ли функции f существует первообразная? Оказывается, нет, не для всякой. Однако ниже будет показано, что это верно для каждой непрерывной функции. В этом разделе все функции предполагаются непрерывными без особых на то оговорок. Считается также, что областью определения всех встречающихся функций является некоторый интервал (a, b) .

2. Если F — первообразная для f , то любая другая первообразная G для f выражается формулой $G = F + C$, где C — некоторая постоянная. Это следует из 32.4. Здесь существенно, что f задана на интервале!

3. *Неопределённым интегралом* от непрерывной функции f называется совокупность всех её первообразных. Обозначение: $\int f(x)dx$. Таким образом, если F — некоторая первообразная для f , то $\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$. Будем далее использовать более короткую запись: $\int f(x)dx = F(x) + C$. Понятие неопределённого интеграла удобно для овладения техникой отыскания первообразных от широкого класса элементарных функций.

§43. Свойства неопределённого интеграла

Приведём несколько свойств неопределённого интеграла, полезных для отыскания первообразных.

1.
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$
$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad (0 \neq \lambda \in \mathbb{R}).$$

2. [Формула интегрирования по частям]:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Отметим, что приведённую формулу удобно использовать в следующей форме:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

3. [Формула замены переменной]:

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx, \quad t = \varphi(x)$$

(здесь справа и слева стоят функции от x).

¶ Пп. 1,2 проверяются дифференцированием. Формула п. 3 следует из равенств

$$\frac{d}{dx} \int f(t) dt = \frac{d}{dt} \left(\int f(t) dt \right) \frac{dt}{dx} = f(\varphi(x)) \varphi'(x) = \frac{d}{dx} \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx,$$

где $\frac{d}{dx} \int f(t) dt$ — семейство производных функций класса $\int f(t) dt$ (оно сводится к одной функции $f(\varphi(x)) \varphi'(x)$). \square

Для отыскания первообразных на практике полезна таблица, проверка которой производится дифференцированием.

$\int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$	$\int \cos x dx = \sin x + C;$
$\int \frac{dx}{x-a} = \ln x-a + C;$	$\int \sin x dx = -\cos x + C;$
$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
$\int e^x dx = e^x + C;$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + C;$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

П р и м е р ы. 4. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$

$$5. \int \ln x dx = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$$

6. $J = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + \int e^x d \cos x = e^x \sin x + e^x \cos x - J + C.$ Решая это уравнение относительно J , находим $J = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$

7. $J_m = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} \quad (m \in \mathbb{N}).$ При $m = 1$ — это табличный интеграл. При $m > 1$ используем рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} J_m &= \frac{1}{a^2} \left[J_{m-1} - \int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^m} \right] = \frac{1}{a^2} J_{m-1} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{x d(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^m} \\ &= \frac{1}{a^2} J_{m-1} + \frac{x}{2a^2(m-1)(a^2+x^2)^{m-1}} - \frac{1}{2a^2(m-1)} J_{m-1}. \end{aligned}$$

8. $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^m}$ ($\Delta = p^2 - 4q < 0$, $m \in \mathbb{N}$). Подстановкой $t = x + p/2$ этот интеграл сводится к п. 7.

9. $J = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ ($\Delta = p^2 - 4q > 0$). Имеем $x^2 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, и

$$J = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \int \left(\frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{x - \alpha_2} \right) dx = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_2} \right| + C.$$

10. $\int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{x^2 + px + q} = \frac{\alpha}{2} \int \frac{(2x + p) dx}{x^2 + px + q} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2\beta}{\alpha} - p \right) \cdot \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$
 $= \frac{\alpha}{2} \ln |x^2 + px + q| + \left(\beta - \frac{\alpha p}{2} \right) \cdot \int \frac{dx}{x^2 + px + q} \quad (\alpha \neq 0).$

11. $\int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{(x^2 + px + q)^m}$ ($m > 1$, $\Delta < 0$). Приёмом п. 10 сводится к п. 7.

12. **З а м е ч а н и е.** Существуют элементарные функции (например, e^{-x^2} , $\frac{\sin x}{x}$), первообразные для которых через элементарные функции уже не выражаются. Доказательство этого, однако, весьма непросто.

§44. Отыскание первообразных для рациональных функций

1. Позволим себе вольность: функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ и $\frac{P(x)R(x)}{Q(x)R(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — некоторые полиномы, будем считать равными, хотя у них, вообще говоря, разные области определения. Пусть отношение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ двух полиномов является правильной несократимой дробью, причём коэффициент при старшей степени у полинома $Q(x)$ равен 1, так что

$$Q(x) = (x - a)^\alpha \dots (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\gamma \dots (x^2 + rx + s)^\delta, \quad (1)$$

где $(p^2 - 4q < 0, \dots, r^2 - 4s < 0)$.

2. При сделанных предположениях имеет место однозначно определённое представление

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x - a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x - a} + \dots \\ &+ \frac{B_1}{(x - b)^\beta} + \frac{B_2}{(x - b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x - b} \\ &+ \frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + px + q)^\gamma} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + px + q)^{\gamma-1}} + \dots + \frac{C_\gamma x + D_\gamma}{x^2 + px + q} \\ &+ \dots + \frac{E_1 x + F_1}{(x^2 + rx + s)^\delta} + \dots + \frac{E_\delta x + F_\delta}{x^2 + rx + s}. \end{aligned}$$

Предварительно установим лемму:

3. Пусть в обозначениях (1) $u(x)$ и $v(x)$ — полиномы, однозначно определённые равенствами

$$Q(x) = (x - a)^\alpha u(x) = (x^2 + px + q)^\gamma v(x).$$

Тогда $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + S_1(x) = \frac{C_1x + D_1}{(x^2 + px + q)^\gamma} + S_2(x)$, где $S_1(x) = \frac{R(x)}{(x-a)^{\alpha-1}u(x)}$,
 $S_2(x) = \frac{T(x)}{(x^2 + px + q)^{\gamma-1}v(x)}$ — правильные дроби.

¶ Для доказательства 1-го равенства положим

$$A_1 = \frac{P(a)}{u(a)}, \quad R(x) = \frac{1}{x-a}(P(x) - A_1u(x)),$$

где $R(x)$ — на самом деле полином (так как a — корень полинома $P(x) - A_1u(x)$), причём $S_1(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A_1}{(x-a)^\alpha}$ — правильная дробь. Для доказательства 2-го равенства возьмём в качестве C_1 и D_1 решения системы уравнений

$$\begin{cases} C_1\lambda + D_1 = \frac{P(\lambda)}{v(\lambda)}, \\ C_1\bar{\lambda} + D_1 = \frac{P(\bar{\lambda})}{v(\bar{\lambda})}, \end{cases} \quad (2)$$

где λ и $\bar{\lambda}$ — комплексно сопряжённые корни трёхчлена $x^2 + px + q$. Эта система однозначно разрешима, так как её детерминант $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \bar{\lambda} & 1 \end{vmatrix} = 2i \operatorname{Im} \lambda \neq 0$. При этом C_1 и D_1 вещественны (!!). Положим

$$T(x) = \frac{1}{x^2 + px + q} \cdot [P(x) - (C_1x + D_1)v(x)].$$

Можно убедиться, что $T(x)$ — полином и что дробь $S_2(x)$ правильная (рассуждения при этом аналогичны приведённым выше). □

4. [Доказательство п. 2]. Существование разложения следует из доказанной леммы, позволяющей последовательным понижением степени полинома $Q(x)$ получить искомое равенство. Единственность следует из того, что константы A_1, \dots, F_δ определяются однозначно:

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^\alpha \cdot \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad A_2 = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{\alpha-1} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} \right)$$

и т. д. Также последовательно определяются величины C_1, \dots, F_δ . Действительно, C_1, D_1 необходимо удовлетворяют системе уравнений (2), которая, как отмечалось, разрешима однозначно и т. д.

5. Итак, задача отыскания первообразной для рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к отысканию корней полинома $Q(x)$. Коль скоро корни найдены, то, записав представление п. 2, можно получить выражение для искомой первообразной через элементарные функции (см. пп. 43.8–12).

6. З а м е ч а н и е. Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная дробь, то, пользуясь, например, алгоритмом Евклида, следует предварительно преобразовать её к виду

$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ — полином, а $\frac{R(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь. После этого остаётся воспользоваться разложением п. 2 для дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

7. П р и м е р. Вычислим $J = \int \frac{x^5 + 3x^2 + 2}{x^4 + x^3 + x + 1} dx$. Дробь, стоящая под знаком интеграла, неправильная. Преобразуем подынтегральное выражение согласно пп. 2,6:

$$\frac{x^5 + 3x^2 + 2}{x^4 + x^3 + x + 1} = x + 2 + \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов на практике приводят дроби к общему знаменателю и приравнивают коэффициенты полиномов в числителях при одинаковых степенях x . Поступая так, получим систему линейных уравнений. Решая её, находим $B = C = -1$, $D = -1/3$, $A = 4/3$. Таким образом,

$$\begin{aligned} J &= \int \left(x + 2 + \frac{4}{3(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{3x+1}{3(x^2-x+1)} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{4}{3(x+1)} - \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{3x+1}{x^2-x+1} dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл считается способом примера 43.11.

ИНТЕГРАЛ РИМАНА

§45. Задачи, приводящие к понятию интеграла Римана

1. *Вычисление площади криволинейной трапеции.* Оставляя на будущее точное определение площади плоской фигуры, будем ориентироваться пока на интуитивный смысл этого понятия. Приближённое значение площади фигуры, ограниченной снизу осью Ox , сверху — графиком функции $y = f(x)$, а с боков — вертикальными прямыми $x = a, x = b$ (Рис. 12), равно

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Естественно определить точное значение площади этой фигуры как предел (если он существует)

$$S = \lim_n \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}),$$

где $\max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Нужно потребовать ещё, чтобы этот предел не зависел ни от выбора промежуточных точек ξ_j , ни от способа дробления отрезка $[a, b]$.

2. *Определение пути движущейся материальной точки.* Пусть материальная точка совершает прямолинейное движение с переменной мгновенной скоростью $v(t)$. Требуется найти путь, пройденный точкой за время $a \leq t \leq b$. Пусть функция $v(t)$ непрерывна. Для решения задачи разложим промежуток изменения времени на малые промежутки $[t_0, t_1], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$). Выбрав в j -м промежутке точку ξ_j , можно считать (в силу непрерывности $v(t)$), что скорость материальной точки на участке времени $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ приближённо постоянна и равна $v(\xi_j)$, так что путь, пройденный за это время, приближённо равен $v(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$. Следовательно, суммарный путь за время $a \leq t \leq b$ равен $\sum_{j=1}^n v(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$. Это приближённое значение тем точнее, чем меньше погрешность при замене переменной скорости на постоянную на каждом из участков $[t_{j-1}, t_j]$. Естественно ожидать, что точное значение пути получится как предел $\lim_n \sum_{j=1}^n v(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$, когда $\max_{1 \leq j \leq n} (t_j - t_{j-1}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

§46. Определение интеграла Римана

1. Пусть $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$; в этом случае мы говорим, что система отрезков $\Delta = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$ образует разложение отрезка $[a, b]$. Ради краткости будем писать $\Delta = \Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$. Величину $d(\Delta) \equiv \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$ назовём диаметром разложения Δ .

2. *Интегральной суммой Римана* функции $f(x)$ относительно разложения Δ называется сумма

$$S_{\Delta} = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Значение этой суммы зависит от выбора промежуточных точек ξ_j .

3. Функция $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) называется *интегрируемой по Риману*, если для любой последовательности разложений Δ_k ($a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_{n_k}^{(k)} = b$) таких, что $d(\Delta_k) \rightarrow 0$ и при любом выборе $\xi_j^{(k)} \in [x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}]$ существует предел

$$\alpha = \lim_k \sum_{j=1}^{n_k} f(\xi_j^{(k)})(x_j^{(k)} - x_{j-1}^{(k)}).$$

Число α называется *интегралом Римана* функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x) dx$.

4. Число α в определении п. 3 не зависит ни от выбора последовательности разложений отрезка $[a, b]$, ни от выбора промежуточных точек $\xi_j^{(k)}$.

¶ Пусть f интегрируема и $\{\Delta_k\}$, $\{\Delta'_k\}$ — две последовательности разложений такие, что $d(\Delta_k), d(\Delta'_k) \rightarrow 0$. По предположению существует предел последовательности $S_{\Delta_1}, S_{\Delta'_1}, S_{\Delta_2}, S_{\Delta'_2}, \dots$. Но последовательности $(S_{\Delta_k}), (S_{\Delta'_k})$ являются подпоследовательностями этой последовательности. Следовательно (см. 9.6), $\lim_k S_{\Delta_k} = \lim_k S_{\Delta'_k}$. □

Дадим определение интегрируемой функции на языке $\varepsilon - \delta$:

5. Функция $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) называется интегрируемой и $\alpha = \int_a^b f(x) dx$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta (d(\Delta) < \delta \Rightarrow |S_{\Delta} - \alpha| < \varepsilon).$$

6. Определения пп. 3 и 5 эквивалентны.

¶ Из справедливости п. 5 следует справедливость п. 3. Обратно, если определение п. 5 для функции f не выполняется, то

$$\forall \alpha \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \Delta (d(\Delta) < \delta, |S_{\Delta} - \alpha| \geq \varepsilon).$$

Выбрав последовательность $\delta_n \rightarrow 0$ ($\delta_n > 0$), найдём последовательность разложений Δ_n таких, что $d(\Delta_n) < \delta_n$, причём $|S_{\Delta_n} - \alpha| \geq \varepsilon$. Тогда последовательность (S_{Δ_n}) не сходится к α . Поэтому определение п. 3 также не выполняется для f . □

Примеры. 7. Постоянная функция $f(x) \equiv \lambda$ интегрируема и $\int_a^b \lambda dx = \lambda(b-a)$.

(Для всякого разложения $\Delta : S_{\Delta} = \sum_{j=1}^n \lambda(x_j - x_{j-1}) = \lambda(b-a)$.)

8. Пусть на $[a, b]$ фиксированы точки c_1, \dots, c_m . Функция

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_j, & \text{если } x = c_j, \\ 0, & \text{если } x \notin \{c_1, \dots, c_m\}. \end{cases}$$

интегрируема и $\int_a^b f(x) dx = 0$. (Положим $K = \max_j |\lambda_j|$, и пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Если $d(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2mK}$, то $|S_\Delta| = \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| < \varepsilon$, так как сумма содержит не более $2m$ членов, отличных от нуля.)

Эффективное описание класса интегрируемых функций — задача непростая и требует определённой подготовки. Ниже будет установлено, что в этот класс входят все непрерывные функции. Пока приведём необходимое условие интегрируемости функции.

9. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена.

¶ Пусть, напротив, f не ограничена. Тогда для произвольного разложения $\Delta (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ функция f не ограничена на некотором отрезке $[x_{j_0-1}, x_{j_0}]$. Пусть $N > 0$ сколь угодно велико. Выберем $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ произвольными для $j \neq j_0$, а затем выберем ξ_{j_0} так, чтобы

$$|f(\xi_{j_0})| > \frac{N}{x_{j_0} - x_{j_0-1}} + \left| \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \cdot \frac{1}{x_{j_0} - x_{j_0-1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |S_\Delta| &= |f(\xi_{j_0})(x_{j_0} - x_{j_0-1}) + \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})| \\ &\geq |f(\xi_{j_0})(x_{j_0} - x_{j_0-1})| - \left| \sum_{j \neq j_0} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| > N. \quad \square \end{aligned}$$

§47. Множества лебеговой меры нуль

1. Говорят, что множество $E (\subset \mathbb{R})$ имеет *лебегову меру нуль* (будем писать $\mu E = 0$), если это множество можно покрыть не более чем счётным семейством интервалов, суммарная длина которых меньше наперёд заданного положительного числа. Более точно, $\mu E = 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное или счётное семейство интервалов (a_i, b_i) таких, что $E \subset \bigcup_i (a_i, b_i)$, $\sum_i (b_i - a_i) < \varepsilon$.

Про некоторое свойство точек числового множества будем говорить, что оно выполняется почти всюду (п.в.), если множество точек, для которых это свойство не верно, имеет лебегову меру нуль. Например, фраза “функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна п.в.” означает, что множество точек разрыва функции f имеет лебегову меру нуль. Отметим полезные свойства введённого понятия.

2. Если $F \subset E$ и $\mu E = 0$, то $\mu F = 0$.

3. Если $\mu E_1 = 0$, $\mu E_2 = 0, \dots$, то $\mu \left(\bigcup_k E_k \right) = 0$.

¶ П. 2 следует непосредственно из определения. Пусть далее $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда для каждого натурального k существует семейство интервалов $\{(a_i^{(k)}, b_i^{(k)})\}_{i=1,2,\dots}$ такое, что

$$E_k \subset \bigcup_i (a_i^{(k)}, b_i^{(k)}), \quad \sum_i (b_i^{(k)} - a_i^{(k)}) < \varepsilon/2^k.$$

Семейство интервалов $\{(a_i^{(k)}, b_i^{(k)})\}_{i,k}$ не более чем счётно и образует покрытие множества $\bigcup_k E_k$, причём суммарная длина всех интервалов

$$\sum_{i,k} (b_i^{(k)} - a_i^{(k)}) = \sup_{m,n} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n (b_i^{(k)} - a_i^{(k)}) < \varepsilon. \quad \square$$

Примеры. 4. Всякая точка на числовой прямой имеет лебегову меру нуль.

5. Для всякого счётного множества $E \subset \mathbb{R} : \mu E = 0$.

Замечание. Обратим внимание на нетривиальность обсуждаемого здесь понятия. Мы знаем, что \mathbb{R} является множеством предельных точек счётного множества \mathbb{Q} , то есть во всякой окрестности (a, b) произвольного действительного числа a обязательно есть рациональные числа. Может показаться, что если каждое рациональное число $q \in [0, 1]$ погрузить в какую-либо окрестность, то в результате получится покрытие всего отрезка $[0, 1]$. На самом деле это не так: поскольку $\mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$, то можно так организовать погружение рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$ в окрестности, что суммарная длина этих окрестностей будет меньше наперёд заданного числа $\varepsilon > 0$, тогда как длина отрезка $[0, 1]$ равна 1.

7. Упражнение. Покажите, что отрезок $[0, 1]$ не является множеством лебеговой меры нуль.

§48. Теорема Лебега

1. Теорема [А. Лебег]. *Функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена и п.в. непрерывна.*

Позднее (§121) будет приведено доказательство этой теоремы в существенно более общей ситуации. На данном этапе изучения курса нашей целью будет научиться использовать её для получения основных свойств интеграла по отрезку.

2. Следствие. *Монотонная функция f на отрезке $[a, b]$ интегрируема.*

¶ Достаточно показать, что множество $\Omega(f)$ всех точек разрыва функции f не более чем счётно. Согласно 23.4 каждая точка из $\Omega(f)$ является точкой разрыва 1-го рода, и остаётся заметить, что $\Omega(f) = \bigcup_n \Omega_n$, где

$$\Omega_n = \left\{ x \in [a, b] : \left| \lim_{y \rightarrow x+} f(y) - \lim_{y \rightarrow x-} f(y) \right| \geq 1/n \right\},$$

причём множества Ω_n конечны (из монотонности f , в множестве Ω_n не более $n|f(b) - f(a)|$ точек). \square

Примеры. 3. Всякая ограниченная функция, имеющая на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва, интегрируема.

4. Функция Дирихле $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ (см. 1.10) не интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$.

§49. Свойства интеграла Римана

1. Пусть f, g интегрируемы на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ интегрируемы функции $f \pm g$, $f \cdot g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $|f|$, причём

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx, \quad \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

2. Справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a < c < b)$$

в том смысле, что если определена одна из его частей, то определена и другая, и они равны.

¶ Обозначая через $\Omega(f)$ множество точек разрыва функции f , имеем в силу 22.5–6

$$\Omega(f \pm g) \subset \Omega(f) \cup \Omega(g), \quad \Omega(|f|) \subset \Omega(f), \quad \Omega(f \cdot g) \subset \Omega(f) \cup \Omega(g).$$

Если f и g интегрируемы, то $\mu\Omega(f) = \mu\Omega(g) = 0$. Следовательно (см. 47.2–3),

$$\mu\Omega(f \pm g) = \mu\Omega(f \cdot g) = \mu\Omega(|f|) = 0.$$

Из теоремы Лебега следует интегрируемость указанных в свойстве п. 1 функций. Равенства п. 1 теперь следуют из определения 46.3. Пусть (Δ_k) — произвольная последовательность разложений отрезка $[a, b]$ такая, что $d(\Delta_k) \rightarrow 0$. Тогда, например,

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_k \sum_{j=1}^{n_k} [f(\xi_j^{(k)}) + g(\xi_j^{(k)})](x_j^{(k)} - x_{j-1}^{(k)}) \\ &= \lim_k \sum_{j=1}^{n_k} f(\xi_j^{(k)})(x_j^{(k)} - x_{j-1}^{(k)}) + \lim_k \sum_{j=1}^{n_k} g(\xi_j^{(k)})(x_j^{(k)} - x_{j-1}^{(k)}) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Пусть теперь определена левая часть равенства в свойстве п. 2, то есть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда f ограничена и $\mu\Omega(f) = 0$. Тем более лебегову мере нуль имеют множества точек разрыва ограничений f на отрезки $[a, c]$, $[c, b]$, так что определена правая часть равенства. Аналогично, если f интегрируема на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.

Рассмотрим далее (Δ'_k) , (Δ''_k) — разложения соответственно отрезков $[a, c]$, $[c, b]$ такие, что $d(\Delta'_k), d(\Delta''_k) \rightarrow 0$. Замечая, что суммы вида $S_{\Delta'_k} + S_{\Delta''_k}$ являются интегральными суммами функции f , соответствующими отрезку $[a, b]$, получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_k (S_{\Delta'_k} + S_{\Delta''_k}) = \lim_k S_{\Delta'_k} + \lim_k S_{\Delta''_k} = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \square$$

З а м е ч а н и я. 3. Из интегрируемости $|f|$ ещё не следует интегрируемость f . Постройте соответствующий пример. (Указание: видоизмените пример 48.4.)

4. Полезно расширить определение интеграла по отрезку, считая $\int_a^b f(x) dx \equiv -\int_b^a f(x) dx$ для $a > b$. Кроме того, положим $\int_a^a f(x) dx \equiv 0$. Доказанные выше свойства интеграла верны и для этого расширенного определения.

§50. Свойства интеграла, связанные с неравенствами

1. Если f, g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x \leq b$), то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

2. Если f интегрируема на $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq K(b-a), \text{ где } K = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

3. Пусть $f(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$), f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $c \in [a, b]$, $f(c) > 0$. Тогда $\int_a^b f(x) dx > 0$.

¶ П.1 следует из сравнения соответствующих интегральных сумм Римана. Далее из неравенств $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ с учётом п. 1 имеем

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b K = K(b-a),$$

и п. 2 доказан. Перейдём к п. 3. Пусть для определённости $a < c < b$. В силу 22.4 существует окрестность $U(c) = (d, e)$ ($a \leq d < c < e \leq b$) такая, что $0 < \lambda \leq f(x)$ ($x \in U(c)$). Тогда

$$\int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^e f + \int_e^b f \geq \int_d^e f \geq \lambda(e-d) > 0. \quad \square$$

4. Т е о р е м а [о среднем значении]. Пусть f, φ интегрируемы на $[a, b]$, $\varphi(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$). Тогда

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx,$$

где $m \leq \lambda \leq M$ ($m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$). Если, кроме того, f непрерывна, то существует $\xi \in [a, b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

¶ $\varphi(x) \geq 0$ влечёт $m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$ ($a \leq x \leq b$); интегрируя эти неравенства, имеем

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Если $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$, то в качестве λ подходит любое число из отрезка $[m, M]$. Если $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$, то следует взять $\lambda = \left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)^{-1} \cdot \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$. Для непрерывной функции 2-е утверждение теоремы следует из 24.2(г). \square

§51. Интеграл как функция своего верхнего предела

1. Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда определена и непрерывна на $[a, b]$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ($a \leq x \leq b$).

¶ Пусть $K = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Тогда F непрерывна на $[a, b]$ в силу оценки

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f(t)dt \right| \leq K|x - y| \quad (a \leq x, y \leq b). \quad \square \quad (1)$$

Приведём замечательное уточнение доказанной теоремы.

2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ($a \leq x \leq b$) дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$. В частности, если f непрерывна на (a, b) , то $F(x)$ ($a < x < b$) — первообразная для $f(x)$ ($a < x < b$).

¶ Пусть сначала f непрерывна на (a, b) и $x \in (a, b)$. Тогда

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)h + r(h), \quad (2)$$

где $r(h) = \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt$. По теореме о среднем значении $r(h) = [f(x+\theta h) - f(x)]h$ ($0 \leq \theta \leq 1$), так что $r(h) = o(h)$ ($h \rightarrow 0$). Следовательно, $F'(x) = f(x)$. Итак, всякая непрерывная функция на интервале обладает первообразной (ответ на вопрос в 42.1).

Переходим к доказательству 1-й части теоремы. Пусть f непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда при $x = x_0$ справедливы равенства (2). Применим к $r(h)$ 1-ю часть теоремы 50.4; имеем $r(h) = \lambda_h h$, где $m(h) \leq \lambda_h \leq M(h)$, а $m(h)$ (соответственно $M(h)$) — нижняя (соответственно верхняя) грань функции $f(t) - f(x_0)$ на отрезке с концами в x_0 и $x_0 + h$. Осталось показать, что $\lambda_h = o(1)$ ($h \rightarrow 0$), то есть $\lim_{h \rightarrow 0} M(h) = \lim_{h \rightarrow 0} m(h) = 0$. Действительно, из непрерывности f в x_0 имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \left(|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

так что $|h| < \delta \Rightarrow M(h) < \varepsilon$, то есть $\lim_{h \rightarrow 0} M(h) = 0$. Аналогично, $\lim_{h \rightarrow 0} m(h) = 0$. \square

3. З а м е ч а н и е. Из п. 2 и теоремы Лебега следует, что для всякой интегрируемой на $[a, b]$ функции f функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ($a \leq x \leq b$) дифференцируема на $[a, b]$ п.в.

§52. Формула Ньютона-Лейбница

1. Если f непрерывна на $[a, b]$ и Φ — произвольная её первообразная, то

$$\int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

(В соответствии с определением первообразной в этом и других аналогичных утверждениях ниже следует считать, что f задана и непрерывна на некотором интервале $(c, d) \supset [a, b]$.)

¶ Пусть Φ — произвольная первообразная для f . Тогда (см. 42.3, 51.2) $\Phi(x) = F(x) + C$, где $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Следовательно,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = \Phi(b) - \Phi(a). \quad \square$$

Разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ обозначается часто символом $\Phi(t)|_a^b$.

У п р а ж н е н и е. Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и обладает первообразной. Покажите, что для f справедлива формула Ньютона-Лейбница.

§53. Обобщённая формула Ньютона-Лейбница

Прежде чем сформулировать обобщение формулы 52.1 введём несколько определений, которые неоднократно ещё будут использоваться в нашем курсе.

1. Функция $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) называется *гладкой*, если она непрерывна на $[a, b]$, и функция $f'(x)$ ($a < x < b$) непрерывна, причём существуют и конечны пределы $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-} f'(x)$.

2. Непрерывная функция $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) называется *непрерывной кусочно-гладкой*, если существует разложение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ такое, что f гладкая на каждом отрезке $[x_{j-1}, x_j]$.

3. У п р а ж н е н и е. Если $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) гладкая, то $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = f'(a+)$, $\lim_{x \rightarrow b-} f'(x) = f'(b-)$ (см. 29.11), так что $f'(x)$ ($a < x < b$) допускает непрерывное продолжение на $[a, b]$.

П р и м е р ы. 4. $f(x) = |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) — непрерывная кусочно-гладкая функция.

5. $f(x) = \arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1$) — не непрерывная кусочно-гладкая (хотя и непрерывная) функция.

6. У п р а ж н е н и е. Если f, g гладкие (непрерывные кусочно-гладкие) на $[a, b]$, то $f \pm g$, $f \cdot g$ гладкие (соответственно непрерывные кусочно-гладкие) на $[a, b]$.

7. [Обобщённая формула Ньютона-Лейбница]. Если $F(x)$ ($a \leq x \leq b$) непрерывная кусочно-гладкая функция, то

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a). \quad (*)$$

¶ Обратим внимание на то, что левая часть “плохо” определена: если $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — разложение, фигурирующее в п. 2 (для функции F), то F' может быть не определена в точках x_j . Однако, если как-нибудь (всё равно как!) доопределить F' в этих точках, то левая часть (*) уже становится корректно определённой. В силу примера 46.8 левая часть (*) не зависит от произвола в определении F' в конечном числе точек. По формуле Ньютона-Лейбница 52.1

$$\int_a^b F'(x) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} F'(x) dx = \sum_{j=1}^n [F(x_j) - F(x_{j-1})] = F(b) - F(a). \quad \square$$

§54. Общие приёмы вычисления интеграла

1. [Формула интегрирования по частям]. Пусть f, g — непрерывные кусочно-гладкие на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

2. [Формула замены переменной]. Пусть $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) непрерывна, и $\varphi(t)$ ($c \leq t \leq d$) непрерывная кусочно-гладкая, причём $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ и определена суперпозиция $f \circ \varphi$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

¶ В силу 53.7 с учётом 53.6 имеем

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx + \int_a^b f'(x)g(x) dx = \int_a^b (f(x)g(x))' dx = f(x)g(x) \Big|_a^b.$$

Свойство 1 доказано. Для доказательства п. 2 обозначим через F первообразную для функции f . Пусть разложение $c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = d$ таково, что φ гладкая на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$. Тогда $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ($t \neq t_j$), и поэтому по обобщённой формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

3. П р и м е р. Вычислим $J = \int_0^1 \arcsin x dx$. Используя 43.2, находим первообразную $F(x)$ для $\arcsin x$ ($0 \leq x \leq 1$): $F(x) = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$). С учётом 52.1 имеем $J = F(1) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 1$.

4. З а м е ч а н и е. Заметим, что выкладка

$$\int_0^1 \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1,$$

дающая тот же ответ, на данном уровне наших знаний неправомерна, так как $\arcsin x$

($0 \leq x \leq 1$) не является непрерывной кусочно-гладкой, и использование формулы п. 1 незаконно. Действительно, интеграл $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ заведомо не существует как интеграл Римана. Позднее (§129) мы придадим смысл подобным выкладкам.

5. У п р а ж н е н и е. Найти $\lim_n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

§55. Верхний и нижний интегралы Дарбу

1. Значение интегральной суммы Римана функции f (см. 46.2) зависит не только от разложения Δ , но и от выбора промежуточных точек ξ_j . Естественно попытаться уменьшить этот произвол. Соответствующая конструкция, к изложению которой мы переходим, оказывается полезной для теории и приложений интеграла Римана.

2. Пусть $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) — ограниченная функция и $\Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ — разложение отрезка $[a, b]$. *Верхней (нижней) суммой Дарбу* функции f , отвечающей разложению Δ , называется сумма $S^*(\Delta) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1})$ (со-

ответственно $S_*(\Delta) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1})$), где $M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$, $m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$.

Отметим основное свойство сумм Дарбу.

3. Пусть Δ, Δ' — произвольные разложения отрезка $[a, b]$. Тогда $S_*(\Delta) \leq S^*(\Delta')$.

¶ Пусть $\Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ и $\tilde{\Delta}$ — разложение, полученное из Δ добавлением одного узла y . Пусть для определённости $x_0 < y < x_1$. Тогда

$$\begin{aligned} S_*(\tilde{\Delta}) &= [\inf_{[x_0, y]} f(x)](y - x_0) + [\inf_{[y, x_1]} f(x)](x_1 - y) + \sum_{j=2}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &\geq [\inf_{[x_0, x_1]} f(x)](x_1 - x_0) + \sum_{j=2}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = S_*(\Delta). \end{aligned}$$

Таким образом, при добавлении к разложению Δ нескольких новых узлов нижняя сумма Дарбу разве лишь возрастает. Аналогично верхняя сумма Дарбу от такого добавления может только уменьшиться. Пусть теперь Δ и Δ' — произвольные разложения $[a, b]$, а Δ'' — разложение, полученное объединением узлов разложений Δ и Δ' . Тогда в силу сделанных выше замечаний $S_*(\Delta) \leq S_*(\Delta'') \leq S^*(\Delta'') \leq S^*(\Delta')$. □

4. Из п. 3 следует, что множество $\{S^*(\Delta)\}$ (соответственно $\{S_*(\Delta)\}$) всех верхних (соответственно нижних) сумм Дарбу ограниченной функции f ограничено снизу (соответственно сверху). Поэтому определены величины $D^*(f) = \inf_{\Delta} S^*(\Delta)$, $D_*(f) = \sup_{\Delta} S_*(\Delta)$. Они называются соответственно *верхним и нижним интегралами Дарбу* функции f . При этом (п. 3) $D_*(f) \leq D^*(f)$.

§56. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

1. Ограниченная функция $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) интегрируема по Риману (и $\alpha = \int_a^b f(x) dx$) тогда $D_*(f) = D^*(f) (= \alpha)$.

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть f интегрируема. В силу 46.5

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b) \forall \xi_j \in [x_{j-1}, x_j] (j = \overline{1, s}) \\ (|\sum_{j=1}^s f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \alpha| < \varepsilon).$$

Следовательно, для любых $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j] : \alpha - \varepsilon < \sum_{j=1}^s f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) < \alpha + \varepsilon$. Взяв \sup (соответственно \inf) по ξ_j в каждом из отрезков, получим $\alpha - \varepsilon \leq S_*(\Delta) \leq S^*(\Delta) \leq \alpha + \varepsilon$. Отсюда $S^*(\Delta) - S_*(\Delta) \leq 2\varepsilon$, и значит, $D^*(f) - D_*(f) \leq 2\varepsilon$. Из произвольности $\varepsilon : D^*(f) \leq D_*(f)$ и остаётся учесть неравенство в 55.4.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть $D_*(f) = D^*(f) = \alpha$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ (в силу определения 55.4 и свойства 55.3) найдётся разложение $\tilde{\Delta}(a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b)$ такое, что

$$S^*(\tilde{\Delta}) - S_*(\tilde{\Delta}) = \sum_{j=1}^s (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следует лишь убедиться, что для любого разложения $\Delta(a = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b)$ достаточно малого диаметра, мы будем иметь $|S_\Delta - \alpha| < \varepsilon$, где S_Δ — интегральная сумма Римана функции f . Пусть $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ и $d(\Delta) < \frac{\varepsilon}{4Ms}$. Мы имеем

$$S_\Delta - \alpha = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)(y_i - y_{i-1}) - \alpha = \sum_i' f(\xi_i)(y_i - y_{i-1}) + \sum_i'' f(\xi_i)(y_i - y_{i-1}) - \alpha,$$

где сумма \sum' по тем i , для которых отрезки $[y_{i-1}, y_i]$ содержат узлы x_j разложения $\tilde{\Delta}$, а \sum'' — сумма по остальным i . Не ограничивая общности, будем считать, что $f(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$). Тогда (так как каждый узел x_j может принадлежать не более чем двум отрезкам $[y_{i-1}, y_i]$)

$$\sum_i' f(\xi_i)(y_i - y_{i-1}) \leq M \sum_i' (y_i - y_{i-1}) \leq M \max_{1 \leq i \leq N} (y_i - y_{i-1}) \cdot \sum_i' 1 \leq 2Ms d(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для индексов i в сумме \sum'' отрезки $[y_{i-1}, y_i]$ целиком лежат в подходящих отрезках разложения $\tilde{\Delta}$; обозначая $\sigma_j = \{i : [y_{i-1}, y_i] \subset [x_{j-1}, x_j]\}$, имеем

$$\sum_i'' f(\xi_i)(y_i - y_{i-1}) = \sum_{j=1}^s \sum_{i \in \sigma_j} f(\xi_i)(y_i - y_{i-1}) \leq \sum_{j=1}^s M_j \sum_{i \in \sigma_j} (y_i - y_{i-1}) \\ \leq \sum_{j=1}^s M_j (x_j - x_{j-1}) = S^*(\tilde{\Delta}).$$

Итак,

$$S_\Delta - \alpha = \sum' + \sum'' - \alpha \leq \frac{\varepsilon}{2} + S^*(\tilde{\Delta}) - \alpha \leq \frac{\varepsilon}{2} + S^*(\tilde{\Delta}) - S_*(\tilde{\Delta}) < \varepsilon.$$

Аналогично, при достаточно малых диаметрах разложения $S_\Delta - \alpha > -\varepsilon$ и утверждение доказано. \square

2. Следствие. Всякая непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ интегрируема по Риману.

¶ Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Так как f равномерно непрерывна (см. 24.7), существует $\delta > 0$ такое, что $|x - y| < \delta$ влечёт $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $\Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_s = b)$ — разложение $[a, b]$ такое, что $d(\Delta) < \delta$. В силу 24.2(б) найдутся $\xi_j, \eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$ такие, что $f(\xi_j) = M_j = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$, $f(\eta_j) = m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x)$.

Поэтому $S^*(\Delta) - S_*(\Delta) = \sum_{j=1}^s [f(\xi_j) - f(\eta_j)](x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^s (x_j - x_{j-1})$, и значит, $D^*(f) - D_*(f) < \varepsilon$. Из произвольности ε следует, что $D^*(f) \leq D_*(f)$ и значит, $D^*(f) = D_*(f)$. Остаётся применить доказанный выше критерий. □

3. Упражнение. Приведите подробное доказательство заключительной фразы п. 1 “при достаточно малых диаметрах разложения $S_\Delta - \alpha > -\varepsilon$ ”.

§57. О приближённом вычислении интегралов

1. Численное значение интеграла Римана далеко не всегда может быть найдено с помощью формулы Ньютона-Лейбница (см. 43.13). В связи с этим большое значение имеют приближённые методы нахождения численных значений интегралов. К этим методам естественно предъявляется ряд требований. Отметим некоторые из них:

- (а) сходимостъ приближённых значений к истинному значению интеграла,
- (б) возможность эффективно оценивать погрешность,
- (в) вычислительная простота.

Детально эти вопросы изучаются в курсе “Методы вычислений”. Мы ограничимся несколькими простыми формулами. Отметим, что одним из типичных методов приближённого вычисления интеграла Римана является замена интегрируемой функции более простой (например, полиномом) так, чтобы погрешность в значении интеграла была бы небольшой.

2. [Формула прямоугольников]. Для вычисления интеграла

$$J = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

возьмём разложение $\Delta = \Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ с равноотстоящими узлами: $x_j = a + \frac{b-a}{n}j$ ($0 \leq j \leq n$) и выберем промежуточные точки в серединах полученных отрезков: $\xi_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$, $1 \leq j \leq n$. Тогда

$$S_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{j=1}^n f\left(\frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)\right) \quad (2)$$

— интегральная сумма Римана функции f (так как $S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$), и поэтому $S_n \rightarrow J$ ($n \rightarrow \infty$). Эта формула носит название *формулы прямоугольников* (площадь под кривой $y = f(x)$ на участке $[x_{j-1}, x_j]$ заменяется на площадь прямоугольника с основанием $x_j - x_{j-1}$ и высотой $f(\xi_j)$). Отметим, что формула точна для аффинных функций вида $f(x) = \lambda x + \mu$.

3. [Формула трапеций]. Возьмём разложение Δ как в п. 2 и заменим площадь криволинейной трапеции на участке $[x_{j-1}, x_j]$ площадью трапеции с вершинами $(x_{j-1}, 0)$, $(x_j, 0)$, $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$, $(x_j, f(x_j))$. Суммируя эти площади, получим

$$T_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j)). \quad (3)$$

Так как суммы $\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})$, $\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j)$ являются интегральными суммами для f , имеем $T_n \rightarrow J$ ($n \rightarrow \infty$). Формула (3) также точна для аффинных функций.

4. [Формула Симпсона]. Рассмотрим сначала случай $[a, b] = [-1, 1]$. Подберём α, β, γ так, чтобы равенство

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1) \quad (4)$$

имело место для функций $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$. Из системы

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 2/3 \end{cases}$$

находим $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$. С этими значениями формула (4) автоматически верна для $f(x) = x^3$, так как $0 = \int_{-1}^1 x^3 dx = -\alpha + \gamma$. Таким образом, формула

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)] \quad (5)$$

верна для всех полиномов вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Для произвольного отрезка формула (5) преобразуется к виду

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{b+a}{2}) + f(b)]$$

(здесь f — полином 3-й степени). Для получения приближённой формулы вычисления интеграла (1) поделим отрезок $[a, b]$ на $2n$ равных подотрезков с концами $x_j = a + \frac{b-a}{2n}j$ и на каждом отрезке $[x_{2j-2}, x_{2j}]$ интеграл $\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x) dx$ заменим суммой $\frac{b-a}{6n} [f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})]$. Суммируя по j , получим

$$\sigma_n = \frac{b-a}{6n} \sum_{j=1}^n [f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})].$$

Снова, как и выше, $\sigma_n \rightarrow J$ ($n \rightarrow \infty$) (!!).

5. Вывод оценки погрешности приближённой формулы проиллюстрируем на формуле прямоугольников. Пусть f дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. Пусть сначала $n = 1$, так что $\xi_1 = \frac{b+a}{2}$. По формуле Тейлора 34.2 имеем $f(x) = f(\xi_1) + f'(\xi_1)(x - \xi_1) + \frac{1}{2}f''(c)(x - \xi_1)^2$ (здесь c принадлежит промежутку с концами в точках ξ_1 и x). Оценим погрешность $R_1 = |J - S_1|$. Так как формула прямоугольников точна для аффинных функций, имеем

$$\begin{aligned} R_1 &= \left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(\xi_1) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b f''(c)(x - \xi_1)^2 dx \right| \\ &\leq \frac{M}{2} \int_a^b (x - \xi_1)^2 dx = \frac{M}{3} \left(\frac{b-a}{2} \right)^3. \end{aligned}$$

В случае произвольного n заметим, что

$$\begin{aligned} R_n &= \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx - \frac{b-a}{n} f(\xi_j) \right| \end{aligned}$$

(здесь $\xi_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$, $x_j = a + \frac{b-a}{n}j$). Воспользовавшись оценкой R_1 для каждого отрезка $[x_{j-1}, x_j]$, имеем

$$R_n \leq \frac{M}{3} \cdot n \left(\frac{b-a}{2n} \right)^3 = \frac{M}{24} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

§58. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме

1. Пусть f определена на интервале (α, β) , причём на отрезке $[a, x] \subset (\alpha, \beta)$ (или $[x, a] \subset (\alpha, \beta)$) она обладает непрерывной n -й производной. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt.$$

Величина $r_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt$ называется остатком в интегральной форме.

¶ Имеем $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$, то есть для $n = 1$ формула справедлива. Пусть она справедлива для всех $k \leq n-1$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} dt.$$

Интегрируя по частям интеграл в правой части, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} dt &= -\frac{1}{n-1} f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-1} \Big|_a^x + \frac{1}{n-1} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{n-1} [f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt], \end{aligned}$$

а отсюда и следует искомая формула. \square

2. П р и м е р. Покажем, что $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ ($|x| < 1$) (см. 36.6). Согласно 36.2 нужно показать, что $r_n(x) \rightarrow 0$ ($|x| < 1$). Из интегральной формы остатка для функции $\ln(1+x)$ ($|x| < 1$) при $a = 0$:

$$|r_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n} dt \right| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{x-t}{1+t} \right|^{n-1} \frac{dt}{1+t} \right|.$$

Замечая, что $\left| \frac{x-t}{1+t} \right| \leq |x|$ при $|x| < 1$, получаем

$$|r_n(x)| \leq |x|^{n-1} |\ln(1+x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

3. У п р а ж н е н и е. Докажите равенство 36.7.

§59. Интегральный признак сходимости числового ряда

1. Пусть $f(x) \geq 0$ ($x \geq 0$) не возрастает. Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ сходится тогда и только тогда, когда функция $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ($x > 0$) ограничена.

¶ Отметим сначала, что $F(x)$ определена для любого $x > 0$ (см. 48.2). Пусть $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ сходится. Тогда существует $K > 0$ такое, что $\sum_{j=1}^n f(j) \leq K$ для всех n . Таким образом, для любого $x > 0$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^{[x]+1} f(t) dt = \int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{[x]}^{[x]+1} \leq f(0) + \sum_{j=1}^{[x]} f(j) \leq f(0) + K.$$

Обратно, если $F(x) \leq K$ ($x \geq 0$), то

$$\sum_{j=1}^n f(j) = \sum_{j=1}^n f(j) \int_{j-1}^j dt \leq \sum_{j=1}^n \int_{j-1}^j f(t) dt = \int_0^n f(t) dt = F(n) \leq K. \quad \square$$

2. П р и м е р. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$: примените п. 1 к $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{1}{t^p}, & \text{если } t > 1. \end{cases}$

§60. Геометрические приложения

1. *Площадь криволинейной трапеции.* Аккуратное определение площади плоской фигуры будет дано в разделе “Мера Жордана”. Пока мы обращаемся к геометрической интуиции.

Пусть $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) интегрируема по Риману. В соответствии с 45.1 и определением интеграла Римана площадь фигуры, заключённой между вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), равна $S = \int_a^b f(x) dx$. (При этом следует иметь в виду, что на участке, где $f(x) \leq 0$, соответствующая площадь получается со знаком минус.)

2. *Площадь плоской фигуры в полярной системе координат.* Вспомним, что площадь сектора круга радиуса r , соответствующего углу θ , равна $\frac{1}{2}r^2\theta$. Для вычисления площади фигуры, ограниченной кривой $r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) и лучами $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, рассмотрим разложение $\Delta(\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta)$. Площадь S_j части фигуры, отвечающей отрезку $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ изменения переменной θ (Рис. 13), удовлетворяет неравенствам

$$\left[\inf_{[\theta_{j-1}, \theta_j]} \frac{1}{2}r^2(\theta) \right] (\theta_j - \theta_{j-1}) \leq S_j \leq \left[\sup_{[\theta_{j-1}, \theta_j]} \frac{1}{2}r^2(\theta) \right] (\theta_j - \theta_{j-1}).$$

Суммируя по j , находим, что площадь S заключена между нижней и верхней суммами Дарбу функции $\frac{1}{2}r^2(\theta)$. Следовательно, в предположении интегрируемости функции $r(\theta)$, $S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta$.

3. Длина плоской кривой. Длиной ℓ кривой Γ называется предел длин ломаных, вписанных в кривую, когда наибольшее расстояние между соседними узлами ломаной стремится к 0. Пусть Γ — график непрерывной кусочно-гладкой функции $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$). Каждая вписанная ломаная характеризуется некоторым разложением $\Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$, так что длина j -го звена ломаной равна $\ell_j = [(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2]^{1/2}$ (см. Рис 14). Положим

$$\psi(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2} \quad (a \leq x \leq b). \quad (1)$$

Эта функция имеет на отрезке $[a, b]$ не более конечного числа точек разрыва. По формуле конечных приращений Лагранжа

$$\begin{aligned} \ell_j &= [1 + f'(x_{j-1} + \theta(x_j - x_{j-1}))^2]^{1/2} (x_j - x_{j-1}) \\ &= \psi(x_{j-1} + \theta(x_j - x_{j-1}))(x_j - x_{j-1}), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства, получаем, что длина ломаной ℓ_Δ является интегральной суммой Римана функции ψ , которая в силу сделанных предположений интегрируема на $[a, b]$. Следовательно, $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \ell_\Delta$ существует и

$$\ell = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \ell_\Delta = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

4. Длина пространственной кривой. Пусть кривая Γ в \mathbb{R}^3 задана системой уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t \in [a, b]$). Предполагая функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывными кусочно-гладкими, можно доказать, что длина кривой Γ равна

$$\ell = \int_a^b [x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2]^{1/2} dt. \quad (2)$$

Вывод этой формулы в настоящий момент был бы хлопотным делом, и мы дадим его позднее (§83). Частным случаем (2) является формула, доказанная в п. 3 (в этом случае $z = 0$ и роль параметра t играет переменная x).

5. Площадь поверхности вращения. Пусть $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) — непрерывная кусочно-гладкая функция (для определённости пусть $f(x) \geq 0$). Найдём площадь σ поверхности, полученной вращением графика Γ функции f вокруг оси Ox . Пусть $\Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ — разложение $[a, b]$. Заменив Γ на ломаную с узлами в точках $(x_j, f(x_j))$, мы аппроксимируем искомую площадь площадью поверхности, возникающей при вращении ломаной. Часть поверхности вращения ломаной, заключённой между узлами $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$, $(x_j, f(x_j))$, есть боковая поверхность усечённого конуса (Рис. 15), и её площадь

$$\begin{aligned}\sigma_j &= \pi(f(x_j) + f(x_{j-1})) [(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2]^{1/2} \\ &= \pi(f(x_j) + f(x_{j-1})) [1 + f'(\xi_j)^2]^{1/2} (x_j - x_{j-1}), \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j].\end{aligned}$$

Отсюда искомая площадь (с учётом обозначения (1))

$$\sigma = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sigma_j = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \pi \sum_{j=1}^n (f(x_j) + f(x_{j-1})) \psi(\xi_j) (x_j - x_{j-1}), \quad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j].$$

Представим $\sum_{j=1}^n \sigma_j$ в виде $\sum' + \sum''$, где

$$\begin{aligned}\sum' &= 2\pi \sum_{j=1}^n f(\xi_j) \psi(\xi_j) (x_j - x_{j-1}), \\ \sum'' &= \pi \sum_{j=1}^n [(f(x_j) - f(\xi_j)) - (f(\xi_j) - f(x_{j-1}))] \psi(\xi_j) (x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Сумма \sum' есть интегральная сумма Римана функции $2\pi f(x) \psi(x)$. Поэтому $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum' = 2\pi \int_a^b f(x) [1 + f'(x)^2]^{1/2} dx$. Пусть далее $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ существует $\delta > 0$ такое, что $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ($x, y \in [a, b]$). Теперь при $d(\Delta) < \delta$ имеем

$$\begin{aligned}|\sum''| &\leq \pi \sum_{j=1}^n [|f(x_j) - f(\xi_j)| + |f(\xi_j) - f(x_{j-1})|] \psi(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) \\ &\leq 2\pi \varepsilon K \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = 2\pi \varepsilon K (b - a),\end{aligned}$$

где $K = \sup_{x \in [a, b]} \psi(x)$. Это означает, что $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum'' = 0$, и

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

6. У п р а ж н е н и е. Объём тела вращения криволинейной трапеции (введённой в 45.1) вокруг оси Ox равен $v = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

§61. Логарифмическая и показательная функции (новый взгляд)

1. Сейчас разрешается забыть всё, что вы знаете о логарифмической и показательной функциях. Положим

$$\varphi(x) \equiv \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0). \quad (*)$$

Отметим следующие свойства этой функции:

- (а) φ непрерывна и строго возрастает,
- (б) $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ($x, y > 0$),
- (в) $\varphi(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = -\infty$.

¶ Согласно 51.2 φ дифференцируема и потому непрерывна. Она строго возрастает, так как $\varphi'(x) = \frac{1}{x} > 0$; (б) следует из выкладки

$$\varphi(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{ds}{s} = \varphi(x) + \varphi(y).$$

(после 2-го равенства сделана подстановка $t = xs$). Наконец,

$$\begin{aligned} x > 2^n &\Rightarrow \varphi(x) > \varphi(2^n) = n\varphi(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty, \\ 0 = \varphi(1) &= \varphi\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = -\varphi(x), \end{aligned}$$

откуда $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = -\infty$.

2. Функцию $\varphi(x)$ ($x > 0$) (см. (*)) назовём *логарифмической по основанию e* (обозначается $\ln x$). Логарифмическую функцию по основанию $a > 0$ определим равенством

$$\log_a x \equiv \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x > 0).$$

При $a > 1$ функция $\log_a x$ обладает свойствами (а)–(в); при $a < 1$ функция $\log_a x$ строго убывает и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = +\infty.$$

Так как $(\log_a x)'' = -\frac{1}{\ln a \cdot x^2}$, функция $\log_a x$ вогнута при $a > 1$ и выпукла при $a < 1$.

3. Функцию, обратную к логарифмической $\log_a x$ ($x > 0$), назовём *показательной функцией* (обозначается a^x ($x \in \mathbb{R}$)). В силу 26.1 показательная функция непрерывна и строго монотонна (она строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $a < 1$). При этом $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. (Это следует из выкладки $\log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a a^x + \log_a a^y = x + y = \log_a a^{x+y}$. □)

4. У п р а ж н е н и е. Покажите, что для натурального n величина $a^{1/n}$, вычисленная в соответствии с определением п. 3 совпадает с арифметическим корнем n -й степени числа a .

ОТОБРАЖЕНИЯ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§62. Векторные пространства

1. Напомним известное из курса алгебры определение: *векторным пространством* над полем Λ ($= \mathbb{C}$ или \mathbb{R}) называется абелева группа X в аддитивной записи, для которой задано отображение $\Lambda \times X \rightarrow X$, записываемое в мультипликативной форме, причём удовлетворяются требования:

$$\begin{aligned}\lambda(x+y) &= \lambda x + \lambda y, & \lambda(\mu x) &= (\lambda\mu)x, \\ (\lambda+\mu)x &= \lambda x + \mu x, & 1 \cdot x &= x \quad (x, y \in X; \lambda, \mu \in \Lambda).\end{aligned}$$

Элементы из X называются векторами. Единицу аддитивной группы будем обозначать через θ — это нуль векторного пространства.

2. Равенство $\lambda x = \theta$ выполняется тогда $\lambda = 0$ или $x = \theta$.

¶ Утверждение является следствием импликаций:

$$\begin{aligned}\lambda = 0 &\Rightarrow 0 \cdot x = (0+0)x = 0x + 0x \Rightarrow 0x = \theta, \\ \lambda x = \theta \ (\lambda \neq 0) &\Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\theta = \theta. \quad \square\end{aligned}$$

3. Векторное пространство X имеет по определению размерность n , если оно обладает базисом $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$, то есть каждый элемент $x \in X$ допускает единственное представление вида $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ ($\lambda_i \in \Lambda$).

4. П р и м е р. Пусть $M_{n \times m}$ — множество $n \times m$ -матриц над полем Λ :

$$[a_i^j] = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{bmatrix}$$

Обычные операции сложения и умножения на скаляры $[a_i^j] + [b_i^j] \equiv [a_i^j + b_i^j]$, $\lambda[a_i^j] \equiv [\lambda a_i^j]$ определяют в $M_{n \times m}$ структуру векторного пространства. Нулевой элемент — это $n \times m$ -матрица, все элементы которой равны 0. Размерность пространства $M_{n \times m}$ равна $n \cdot m$; базисом является, например, система матриц E_{ij} ($1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m$): у матрицы E_{ij} на пересечении j -го столбца и i -й строки стоит 1, а остальные элементы равны 0.

5. Рассмотрим множество \mathbb{C}^n , элементы которого — упорядоченные наборы n комплексных чисел $x = (x^1, \dots, x^n)$, $x^j \in \mathbb{C}$. Это множество — конечномерное векторное пространство с векторными операциями

$$x + y \equiv (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n), \quad \lambda x \equiv (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, \mathbb{C}^n есть пространство $M_{n \times 1}$ над \mathbb{C} .

Напомним известное из алгебры определение: *скалярным произведением* векторов $u = (u^1, \dots, u^n)$, $v = (v^1, \dots, v^n)$ называется число $\langle u, v \rangle \equiv \sum_{j=1}^n u^j \overline{v^j}$. Векторы

u и v называются ортогональными, если $\langle u, v \rangle = 0$. Евклидовой нормой вектора $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{C}^n$ называется число

$$\|x\| = \left[\sum_{j=1}^n |x^j|^2 \right]^{1/2} (= \sqrt{\langle x, x \rangle}). \quad (*)$$

Нетрудно видеть, что норма $(*)$ обладает свойствами:

- (I) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$,
- (II) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ($\lambda \in \mathbb{C}$),
- (III) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(Свойство (III) — не что иное, как неравенство Шварца 41.2.)

Аналогично вводится векторное пространство \mathbb{R}^n над полем \mathbb{R} . Под *комплексным* (соответственно *вещественным*) n -мерным евклидовым пространством в дальнейшем будет пониматься пространство \mathbb{C}^n (соответственно \mathbb{R}^n), снабжённое нормой $(*)$. Если в некотором утверждении пойдёт речь об евклидовом пространстве без указания поля скаляров, то это значит, что утверждение относится к обоим случаям (\mathbb{C} и \mathbb{R}).

З а м е ч а н и я. 6. Существуют и другие функции, обладающие свойствами (I)–(III). Например, $\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x^j|$. Все такие функции также называются *нормами*.

7. Множество \mathbb{C} (как и множество \mathbb{R}) выступает теперь в двух ипостасях: как одномерное комплексное (соответственно вещественное) евклидово пространство \mathbb{C}^1 (соответственно \mathbb{R}^1) и как поле.

8. П р и м е р. В векторном пространстве $M_{n \times m}$ естественно вводится структура евклидова пространства путём задания евклидовой нормы $\| [a_i^j] \| = \left[\sum_{i,j} |a_i^j|^2 \right]^{1/2}$.

9. У п р а ж н е н и е. Пусть $x, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{C}^n$, $m < n$. Представление $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{C}$) имеет место тогда и только тогда, когда из равенств $\langle z, y_i \rangle = 0$ ($i = 1, \dots, m$) следует $\langle z, x \rangle = 0$.

§63. Топология евклидова пространства

1. Пусть E — евклидово пространство; ε -окрестностью точки $x_0 \in E$ называется шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в x_0 :

$$B_\varepsilon(x_0) \equiv \{x \in E : \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

Множество $\Omega \subset E$ называется *открытым*, если каждая точка из Ω содержится в Ω с некоторой своей окрестностью, то есть $\forall x \in \Omega \exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \subset \Omega)$.

Множество $X \subset E$ называется *замкнутым*, если $E \setminus X$ открыто. Отметим следующие важные свойства открытых множеств:

2. Если $(\Omega_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство открытых множеств, то $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ открыто в E .

3. Если $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ открыты в E , то $\bigcap_{i=1}^k \Omega_i$ открыто.

4. Точка x_0 называется *предельной точкой* множества $\Omega \subset E$, если $\forall \varepsilon > 0$ $(\check{B}_\varepsilon(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset)$ (по-прежнему $\check{B}_\varepsilon(x_0) \equiv B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ — $\check{\cdot}$ -окрестность точки x_0). Точка $x_0 \in \Omega$ называется *изолированной точкой* множества Ω , если $B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega = \{x_0\}$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Множество Ω называется *ограниченным*, если $\Omega \subset B_n(\theta)$ при некотором $N > 0$. Отметим полезное условие замкнутости множества.

5. Множество $\Omega (\subset E)$ замкнуто тогда оно содержит все свои предельные точки.

¶ Пусть Ω замкнуто и $x_0 \notin \Omega$. Тогда $E \setminus \Omega$ открыто и существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x_0) \subset E \setminus \Omega$, но тогда x_0 не является предельной для Ω . Обратно, пусть Ω содержит все свои предельные точки и $x_0 \notin \Omega$. Тогда (так как x_0 — не предельная для Ω) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega = \emptyset$, то есть $B_\varepsilon(x_0) \subset E \setminus \Omega$. Итак, $E \setminus \Omega$ открыто. \square

6. Из технических соображений бывает удобно к евклидову пространству E добавлять несобственную точку ∞ : $\check{\cdot}$ -окрестностью точки ∞ назовём множество вида $\{x \in E : \|x\| > N\}$. За отсутствием порядковых свойств в обычном их понимании (см. 6.1) в пространствах \mathbb{R}^n ($n > 1$) и \mathbb{C}^n ($n \geq 1$) несобственные элементы типа $\pm\infty$ не вводятся. В случае \mathbb{C}^1 присоединение несобственного элемента ∞ допускает геометрическую интерпретацию (стереографическая проекция).

У п р а ж н е н и я. 7. Замкнутые множества в евклидовом пространстве обладают свойствами:

(а) если $(X_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство замкнутых множеств в E , то $\bigcap_{i \in I} X_i$ замкнуто в E ,

(б) если X_1, \dots, X_k замкнуты в E , то $\bigcup_{i=1}^k X_i$ замкнуто.

8. Покажите, что множество $B_\varepsilon[x] \equiv \{y \in E : \|x - y\| \leq \varepsilon\}$ замкнуто в E .

§64. Компактные множества

1. Семейство $(U_i)_{i \in I}$ частей евклидова пространства E называется *покрытием* множества $X \subset E$, если $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. В частности, покрытие называется *открытым*, если все U_i открыты.

Множество K в евклидовом пространстве называется *компактным*, если из всякого открытого покрытия этого множества можно выбрать конечное покрытие.

2. Т е о р е м а. Множество K в евклидовом пространстве компактно тогда оно ограничено и замкнуто.

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть K компактно и $\{B_1(x)\}_{x \in K}$ — покрытие K открытыми шарами радиуса 1 с центрами в точках множества K . По определению компактности существует конечное число шаров $B_1(x_1), \dots, B_1(x_n)$ ($x_i \in K$) таких, что $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_1(x_i)$. Отсюда $K \subset B_{N+1}(\theta)$, где $N = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$, то есть K ограничено. Если допустить, что K не замкнуто, то (см. 63.5) найдётся точка $x \notin K$ предельная

для K . Тогда $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/n}[x]$, где $(B_{1/n}[x])_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность замкнутых шаров (см. 63.8). Следовательно, семейство $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $U_n = E \setminus B_{1/n}[x]$, образует открытое покрытие K , причём $U_1 \subset U_2 \subset \dots$. В силу компактности K существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $U_{n_0} \supset K$, но тогда $B_{1/n_0}[x] \cap K = \emptyset$, что противоречит тому, что x — предельная точка для K .

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть для определённости $E = \mathbb{R}^n$ и

$$\Delta = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : -N \leq x^j \leq N \ (1 \leq j \leq n)\}$$

— замкнутый гиперкуб, объемлющий K : $\Delta \supset K$. Допустим, напротив, что существует открытое покрытие $(U_i)_{i \in I}$, не содержащее никакого конечного покрытия для K . Разобьём куб Δ на 2^n конгруэнтных кубов Δ_j^1 ($1 \leq j \leq 2^n$). Среди них обнаружится по крайней мере один, скажем $\Delta_{j_1}^1$, такой, что $\Delta_{j_1}^1 \cap K$ не покрывается никакой конечной подсистемой из системы $(U_i)_{i \in I}$. Разобьём теперь $\Delta_{j_1}^1$ на 2^n конгруэнтных кубов Δ_j^2 ($1 \leq j \leq 2^n$), и снова среди них обнаружится хотя бы один, например $\Delta_{j_2}^2$, такой, что $\Delta_{j_2}^2 \cap K$ не покрывается никакой конечной подсистемой системы $(U_i)_{i \in I}$. Продолжив этот процесс, получим последовательность $\Delta_{j_1}^1 \supset \Delta_{j_2}^2 \supset \dots$ вложенных кубов, длины рёбер которых стремятся к нулю, причём $\Delta_{j_s}^s \cap K$ не покрывается никакой конечной подсистемой из системы $(U_i)_{i \in I}$. Проекция этих кубов на координатные оси определяют на них системы вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю. Следовательно, существует $x_0 \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \Delta_{j_s}^s$. При этом $x_0 \notin K$.

(Если, напротив, $x_0 \in K$, то существует $i_0 \in I$ такое, что $x_0 \in U_{i_0}$. Так как U_{i_0} открыто, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x_0) \subset U_{i_0}$. С другой стороны, для достаточно больших s : $\Delta_{j_s}^s \subset B_\varepsilon(x_0)$ и значит, $K \cap \Delta_{j_s}^s \subset U_{i_0}$, что противоречит тому, что $\Delta_{j_s}^s \cap K$ не покрывается никакой конечной системой множеств вида U_i ($i \in I$) — противоречие). Из конструкции кубов $\Delta_{j_s}^s$ следует однако, что x_0 — предельная точка K , и $x_0 \in K$ в силу замкнутости K — противоречие. \square

Как следствие получим теорему Вейерштрасса для евклидова пространства.

3. Ограниченное бесконечное множество в евклидовом пространстве обладает по крайней мере одной предельной точкой.

¶ Если, напротив, множество X в евклидовом пространстве, не обладает ни одной предельной точкой, то оно замкнуто (см. 63.5) и состоит лишь из изолированных точек. В силу п. 2 множество X (ограниченное и замкнутое) компактно. Покрыв X открытыми шарами так, чтобы в каждом лежало по одной точке из X , получаем, что X конечно. \square

4. У п р а ж н е н и е. Пусть $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ — последовательность непустых компактных множеств в евклидовом пространстве. Тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

§65. Отображения. Последовательности

1. Предметом нашего внимания будут функции $f : \Omega \rightarrow F$, где Ω — часть евклидова пространства E , а F — другое евклидово пространство. Отметим важные специальные случаи.

(а) Если E — n -мерное евклидово пространство, то $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (соответственно $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$) называется вещественной (соответственно комплексной) функцией n переменных. Её значение на векторе $x = (x^1, \dots, x^n)$ записывается в виде $f(x^1, \dots, x^n)$.

(б) В частности, функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$) называется функцией комплексной переменной.

(в) Отображения вида $f : \Omega \rightarrow F$, где $\Omega \subset \mathbb{R}$ (или $\Omega \subset \mathbb{C}$), а F — евклидово пространство, называются *вектор-функциями*.

(г) В частности, вектор-функция $x_{(\cdot)} : \mathbb{N} \rightarrow F$ называется *векторной последовательностью* (в пространстве F). Обозначается (x_k) .

2. Пусть (x_k) — последовательность в евклидовом пространстве. Вектор x_0 называется пределом последовательности (x_k) , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k > N (\|x_k - x_0\| < \varepsilon).$$

Так же как и в скалярном случае устанавливается, что предел последовательности единствен, если он существует (!!).

3. Последовательность (x_k) называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что $\|x_k\| \leq M$ ($k \in \mathbb{N}$). Отметим непосредственное следствие теоремы 64.3.

4. *Всякая ограниченная векторная последовательность обладает сходящейся подпоследовательностью.*

Для векторных последовательностей имеет место критерий Коши:

5. *Последовательность (x_k) в евклидовом пространстве сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, то есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N (\|x_n - x_m\| < \varepsilon).$$

¶ Необходимость почти очевидна (см. доказательство необходимости в 11.7). Достаточность: как и в скалярном случае (см. 11.7), выводим, что из фундаментальности следует ограниченность (x_k) ; в силу п. 4 (x_k) обладает сходящейся подпоследовательностью. Следовательно, (x_k) сходится к тому же вектору, что и сходящаяся подпоследовательность. □

§66. Предел функции в точке

1. Пусть E и F — евклидовы пространства, $f : \Omega \rightarrow F$ ($\Omega \subset E$). Вектор $y \in F$ называется *пределом функции f в точке $a \in E$* , если a — предельная точка Ω и для любой последовательности (x_k) ($a \neq x_k \in \Omega$), сходящейся к a , последовательность $f(x_k)$ сходится к y . Обозначение для предела традиционное: $y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Отметим кванторные записи этого равенства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \Omega (0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - y\| < \varepsilon),$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \Omega \cap \check{B}_\delta(a) (f(x) \in B_\varepsilon(y)).$$

Отметим видоизменения данного определения на несобственные случаи:

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ означает, что a — предельная точка Ω и

$$\forall N > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \Omega (0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)\| > N).$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$ означает, что Ω не ограничено и $f(x_k) \rightarrow y$, коль скоро $x_k \rightarrow \infty$ ($x_k \in \Omega$).

З а м е ч а н и я. 4. Полезно отметить случай вектор-функций. Пусть $f(t) = (f^1(t), \dots, f^n(t)) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \Omega \subset \mathbb{R}$. Вектор $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ — предел вектор-функции f в точке t_0 тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} f^k(t) = y^k$ ($k = 1, \dots, n$) в смысле обычных скалярных функций (!!). Для вектор-функций вида $f : \Omega \rightarrow F$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$) осмыслено также понятие односторонних пределов: $\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_0-} f(t)$.

5. Более общим образом, изучение отображений из одного евклидова пространства в другое с позиций непрерывности, предела и т. п. сводится к изучению с этих же позиций функций многих переменных (65.1(a)). Действительно, пусть $f : \Omega \rightarrow F$ ($\Omega \subset E$) и $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$, $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$ — стандартные базисы в пространствах E и F соответственно. Разложим вектор $f(x) = f(x^1, \dots, x^n) \in F$ по базису (g_i) : $f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^m f^i(x^1, \dots, x^n) g_i$, где $f^i : \Omega \rightarrow \Lambda$ ($1 \leq i \leq m$) — некоторые функции n переменных. Таким образом, отображение f задаётся системой m функций f^1, \dots, f^m n переменных. При этом $y = (y^1, \dots, y^m) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ тогда $y^i = \lim_{x \rightarrow a} f^i(x^1, \dots, x^n)$ ($1 \leq i \leq m$).

§67. Свойства предела

1. Пусть $f : \Omega \rightarrow F$, $g : \Omega \rightarrow F$, $\Omega \subset E$ и a — предельная точка Ω . Если существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)]$, причём

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

2. Если, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y \neq \theta$, то существуют $\varepsilon, \delta > 0$ такие, что $\|f(x)\| > \varepsilon$ для любого $y \in \check{B}_\delta(a) \cap \Omega$.

3. [Критерий Коши]. Отображение f обладает пределом в точке a тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, z \in \check{B}_\delta(a) \cap \Omega (\|f(x) - f(z)\| < \varepsilon). \quad (*)$$

¶ Доказательства аналогичны скалярному случаю. Докажем, например, достаточность в п. 3. Пусть выполнено (*) и $x_k \rightarrow a$ ($a \neq x_k \in \Omega$). Тогда последовательность $(f(x_k))$ фундаментальна и обладает некоторым пределом y (см. 65.5). Аналогично скалярному случаю получаем, что $f(z_k) \rightarrow y$ для любой последовательности $(z_k) \subset \Omega$ ($z_k \neq a$), сходящейся к a (!!). □

4. З а м е ч а н и е. Для функций многих переменных п. 1 можно дополнить другими арифметическими свойствами: если определены $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0).$$

§68. Предел по направлению

1. Пусть E — евклидово пространство, $a \in E$ — фиксированный вектор и $\|y\| = 1$, $y \in E$. Множество $\ell(a, y) = \{a + ty \mid t \geq 0\}$ назовём лучом, выходящим из a в

направлении y . Пусть теперь $\Omega \subset E$, $f : \Omega \rightarrow F$ и a — предельная точка множества $\ell(a, y) \cap \Omega$. Обозначим через f_ℓ вектор-функцию, заданную на $\ell_\Omega \equiv \{t \geq 0 : a + ty \in \Omega\}$ формулой $f_\ell(t) = f(a + ty)$. Вектор $z \in F$ назовём пределом функции f в точке a по направлению y , если $z = \lim_{t \rightarrow 0+} f_\ell(t)$. В этом случае пишем также $z = \lim_{x \rightarrow a(y)} f(x)$.

2. З а м е ч а н и е. Если $z = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, то $z = \lim_{x \rightarrow a(y)} f(x)$ по любому направлению y , для которого он определён. Обратное утверждение неверно: может существовать один и тот же предел по любому направлению, но предела может не быть.

3. П р и м е р. В плоскости (x^1, x^2) рассмотрим спираль $r = \varphi$ ($0 < \varphi \leq 2\pi$) и определим $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\theta\} \rightarrow \mathbb{R}$ в соответствии с Рис. 16:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi - \|x\|}{\varphi}, & \text{если } \|x\| < \varphi, \\ 0, & \text{если } \|x\| \geq \varphi. \end{cases}$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \theta} f(x)$ не существует, но $\lim_{x \rightarrow \theta(y)} f(x) = 1, \forall y \neq \theta$.

§69. Локальные свойства непрерывных функций

1. Функция $f : \Omega \rightarrow F$ ($\Omega \subset E$) называется *непрерывной в точке* $a \in \Omega$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \Omega (\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon). \quad (*)$$

Если $a \in \Omega$ — предельная точка Ω , то $(*)$ эквивалентно условию $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Для функций, непрерывных в точке, справедливы арифметические свойства:

2. Пусть $f, g : \Omega \rightarrow F$ ($\Omega \subset E$) непрерывны в $a \in \Omega$. Тогда в a непрерывны функции $f \pm g$.

Для функций многих переменных $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($\Omega \subset E$) определены произведение и частное ($f \cdot g, f/g$). Обе эти функции непрерывны в точке $a \in \Omega$, коль скоро в a непрерывны f и g (для частного нужно ещё потребовать, чтобы $g(a) \neq 0$).

3. Если $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset E$) непрерывна в точке $a \in \Omega$ и $f(a) \neq 0$, то $f(x)$ сохраняет знак числа $f(a)$ в некоторой окрестности точки a .

¶ П. 2,3 следуют из соответствующих свойств пределов. □

4. Пусть $f : \Omega \rightarrow F$ ($\Omega \subset E$), $g : D \rightarrow G$ ($D \subset F$) (E, F, G — евклидовы пространства), причём f непрерывна в $a \in \Omega$, g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в a .

¶ Будем считать, что a — предельная точка, а $f(a)$ — предельная точка D (ибо любая функция непрерывна в изолированной точке её области определения). Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a)) = g \circ f(a)$. □

5. Функция $f : \Omega \rightarrow F$ ($\Omega \subset E$) называется *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке $x \in \Omega$. Функция f называется *равномерно непрерывной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \Omega (\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon).$$

Примеры. 6. Пусть вектор b из евклидова пространства F фиксирован. Постоянная функция $f(x) = b$ ($x \in E$) непрерывна.

7. Функция $f(x^1, \dots, x^n) = x^1$ ($(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{C}^n$) равномерно непрерывна.

8. Евклидова норма вектора как функция из евклидова пространства в \mathbb{R} непрерывна (даже равномерно непрерывна).

9. У п р а ж н е н и е. Всякая норма (не обязательно евклидова) как функция из евклидова пространства в \mathbb{R} непрерывна.

§70. Свойства непрерывных функций на компактных множествах

1. Пусть E, F — евклидовы пространства, $K(\subset E)$ — компактное множество и $f: K \rightarrow F$ непрерывна. Тогда f ограничена и равномерно непрерывна.

¶ Пусть, напротив, f не равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \forall m \in \mathbb{N} \exists x_m, y_m \in K (\|x_m - y_m\| < 1/m, \|f(x_m) - f(y_m)\| \geq \varepsilon).$$

В силу 65.4 последовательность (x_m) обладает сходящейся подпоследовательностью $x_{m_k} \rightarrow a \in K$. Но тогда $y_{m_k} \rightarrow a$. Так как f непрерывна в точке a , $\lim_k \|f(x_{m_k}) - f(y_{m_k})\| = 0$, что, однако, противоречит неравенству $\|f(x_{m_k}) - f(y_{m_k})\| \geq \varepsilon$ ($k \in \mathbb{N}$).

Покажем ограниченность f . В силу равномерной непрерывности f существует $\delta > 0$ такое, что $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < 1$ ($x, y \in K$). Система шаров $\{B_\delta(x)\}_{x \in K}$ образует открытое покрытие K . Пусть $\{B_\delta(x_1), \dots, B_\delta(x_n)\}$ — конечное покрытие K ($x_i \in K$). Полагая $M = 1 + \max_{1 \leq k \leq n} \|f(x_k)\|$, мы получаем требуемое. □

На функции вида $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ (K — компактное множество в E) обобщаются и остальные свойства функций, непрерывных на отрезке.

2. Пусть $K(\subset E)$ компактное множество, и $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда f достигает своих граней.

¶ Пусть, например, $\alpha = \sup_{x \in K} f(x)$ и $x_m \in K$ таковы, что

$$\alpha - \frac{1}{m} < f(x_m) \leq \alpha \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Последовательность (x_m) ограничена. Пусть (x_{m_k}) — сходящаяся подпоследовательность: $x_{m_k} \rightarrow a \in K$. Так как f непрерывна в a , имеем $f(a) = \lim_k f(x_{m_k}) = \alpha$. □

Переходим к аналогу теоремы о промежуточных значениях.

3. Часть Ω евклидова пространства называется *линейно связной*, если для любых точек $x, y \in \Omega$ найдётся непрерывная вектор-функция $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ такая, что $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$.

4. Пусть $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компактном линейно связном множестве K , $\alpha = \sup_{x \in K} f(x)$, $\beta = \inf_{x \in K} f(x)$ и $\alpha < \gamma < \beta$. Тогда существует $y \in K$ такое, что $f(y) = \gamma$.

¶ В силу п. 2 существуют $x_0, x_1 \in K$ такие, что $f(x_0) = \alpha$, $f(x_1) = \beta$. Пусть $\varphi: [0, 1] \rightarrow K$ — непрерывная вектор-функция такая, что $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$. Тогда $g \equiv f \circ \varphi$ — непрерывная вещественная функция, заданная на отрезке $[0, 1]$, причём $g(0) = \alpha$, $g(1) = \beta$. В силу 24.2(г) существует $t \in [0, 1]$ такое, что $g(t) = \gamma$. Тогда точка $y = \varphi(t)$ искомая. □

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§71. Определение линейного отображения

1. Линейные отображения играют ключевую роль при изучении отображений пространств размерностей > 1 . Для функций одного переменного их роль также велика (вспомним касательное отображение!), хотя это обстоятельство за простотой ситуации несколько завуалировано.

Пусть X и Y — векторные пространства над полем Λ . Отображение $A : X \rightarrow Y$ называется *линейным*, если

$$A(x + y) = Ax + Ay, \quad A(\lambda x) = \lambda Ax \quad (x, y \in X, \lambda \in \Lambda).$$

(Обычно у аргумента линейного отображения скобки опускают: пишут Ax вместо $A(x)$). Если $Y = \Lambda$, линейное отображение называется *линейным функционалом*.

2. Пусть $L(X, Y)$ — множество всех линейных отображений векторного пространства X в векторное пространство Y . В $L(X, Y)$ естественно вводится структура векторного пространства: для $A, B \in L(X, Y)$, $\lambda \in \Lambda$ положим

$$(A + B)x \equiv Ax + Bx, \quad (\lambda A)x \equiv \lambda Ax \quad (x \in X).$$

Аксиомы векторного пространства (62.1) выполнены (!!). Нуль векторного пространства $L(X, Y)$ — это отображение $0 : X \rightarrow Y$, действующее по формуле $0x = \theta$, где θ — нулевой вектор в Y .

Пусть X, Y, Z — векторные пространства над полем Λ , $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$. Тогда суперпозиция $B \circ A$ этих отображений (см. 5.2) является линейным отображением из X в Z ; оно называется произведением отображений и обозначается BA . Таким образом, $BA \in L(X, Z)$ и действует по формуле $(BA)x = B(Ax)$ ($x \in X$).

3. Отметим важное понятие изоморфизма: векторные пространства E и F (над полем Λ) называются *алгебраически изоморфными*, если существует биекция $A \in L(E, F)$.

4. З а м е ч а н и е. Два конечномерных векторных пространства (над одним полем) изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

§72. Представление линейного отображения матрицей

1. Пусть E и F — евклидовы пространства над полем $\Lambda (= \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{R})$ размерностей n и m соответственно. Пусть

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \{1 \text{ — на } j\text{-м месте}\}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1)$$

$$f_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \{1 \text{ — на } i\text{-м месте}\}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (2)$$

— соответствующие стандартные базисы в E и F . Рассмотрим линейное отображение $A : E \rightarrow F$. Если подействовать отображением A на j -й элемент базиса (1), то полученный элемент может быть разложен по базису (2): $Ae_j = \sum_{i=1}^m a_i^j f_i$. Таким образом, отображению A оказывается сопоставленной $(n \times m)$ -матрица $[a_i^j]$;

она называется матрицей отображения A . Отображение A , очевидно, полностью определяется своей матрицей:

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^n x^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x^j A e_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x^j a_i^j f_i \quad (x \in E).$$

Соответствие $A \rightarrow [a_i^j]$ осуществляет алгебраический изоморфизм пространства $L(E, F)$ на пространство $M_{n \times m}$ (см. 62.4).

2. З а м е ч а н и е. В частности, линейной вектор-функции $A : \Lambda \rightarrow F$ соответствует $(1 \times m)$ -матрица или вектор-столбец

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix},$$

а линейной функции n переменных $A : E \rightarrow \Lambda$ — $(n \times 1)$ -матрица, или вектор-строка $[a^1, \dots, a^n]$.

3. У п р а ж н е н и е. Всякое линейное отображение из евклидова пространства E в евклидово пространство F непрерывно.

§73. Обратимые линейные отображения

1. Пусть E — евклидово пространство. Линейное отображение $A : E \rightarrow E$ называется *обратимым*, если существует линейное отображение $A^{-1} \in L(E, E)$ такое, что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, где I — тождественное отображение E на себя: $Ix = x$ ($x \in E$).

2. Следующие условия эквивалентны:

(а) $A \in L(E, E)$ обратимо,

(б) $Ax = \theta$ влечёт $x = \theta$,

(в) $\det[a_i^j] \neq 0$, где $[a_i^j]$ — матрица отображения A в стандартном базисе.

¶ (а) \Rightarrow (б): A обратимо, $Ax = \theta \Rightarrow x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}\theta = \theta$.

(б) \Rightarrow (в). Если $\det[a_i^j] = 0$, то столбцы матрицы $[a_i^j]$ линейно зависимы, то есть существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^n$, не все равные нулю, такие, что $\sum_{j=1}^n \lambda^j a_i^j = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Рассмотрим вектор $\xi = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \neq \theta$. Тогда $A\xi = (\sum_{j=1}^n a_1^j \lambda^j, \dots, \sum_{j=1}^n a_n^j \lambda^j) = \theta$, что противоречит (б).

(в) \Rightarrow (а). Если $\det[a_i^j] \neq 0$, то оператор B , определённый матрицей $[a_i^j]^{-1}$, обладает свойствами $BA = AB = I$, то есть A обратимо. \square

§74. О норме линейного отображения

1. В пространстве $L(E, F)$ (E, F — евклидовы пространства) может быть введена евклидова норма: в обозначениях §72

$$\|A\|_e \equiv \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_i^j|^2 \right]^{1/2} \quad (A \in L(E, F)). \quad (1)$$

Наряду с этим будет использоваться ещё одна норма — операторная (требования (I)–(III) в 62.5 для неё выполнены (!!)):

$$\|A\| \equiv \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (A \in L(E, F)). \quad (2)$$

2. З а м е ч а н и е. Из равенства (2) следует, в частности, что $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ для любого $x \in E$.

3. Имеют место неравенства: $\|A\| \leq \|A\|_e \leq \sqrt{n} \|A\|$ ($A \in L(E, F)$).

¶ Пусть $x = (x^1, \dots, x^n) \in E$ таков, что $\|x\| = 1$. С учётом неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n x^j a_i^j \right|^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |x^j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n |a_i^j|^2 \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_i^j|^2 = \|A\|_e^2.$$

Отсюда $\|A\| \leq \|A\|_e$. Обратно, пусть j_0 таково, что

$$\sum_{i=1}^m |a_i^{j_0}|^2 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_i^j|^2.$$

Рассмотрим вектор $e_{j_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 на j_0 -м месте). Тогда

$$\|A\|_e^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_i^j|^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^m |a_i^{j_0}|^2 = n \|Ae_{j_0}\|^2 \leq n \cdot \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2. \quad \square$$

4. В пространстве $L(\Lambda, F)$: $\|A\| = \|A\|_e$.

5. У п р а ж н е н и е. Пусть E, F, G — евклидовы пространства, $A \in L(E, F)$, $B \in L(F, G)$. Тогда операторная норма отображения BA удовлетворяет неравенству $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

§75. Касательное отображение и его свойства

1. Пусть E и F — евклидовы пространства над полем Λ и $\Omega(\subset E)$ — открытое множество. Отображение $f : \Omega \rightarrow F$ называется *дифференцируемым в точке* $x \in \Omega$, если существует линейное отображение $L_x : E \rightarrow F$ такое, что

$$f(x+h) - f(x) = L_x h + o(h) \quad (h \rightarrow \theta). \quad (1)$$

(Асимптотическое равенство $r(h) = o(h)$ ($h \rightarrow \theta$) означает, что $\lim_{h \rightarrow \theta} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$.) Это линейное отображение называется *дифференциалом* или *касательным отображением*, или *производной* функции f в точке x . Отображение L_x обозначается также символами $df(x)$, $f'(x)$.

2. **З а м е ч а н и е.** В частности, для функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$), приходим к определению производной функции одного комплексного переменного; эта производная в точке $z_0 \in \Omega$ может быть вычислена с помощью привычной формулы

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(z_0 + h) - f(z_0)].$$

Полезно помнить, что это — линейное отображение из \mathbb{C} в \mathbb{C} , действующее по формуле $f'(z_0)(h) = f'(z_0) \cdot h$ ($h \in \mathbb{C}$).

Отметим элементарные свойства касательного отображения:

3. Если отображение f дифференцируемо в точке x , то соответствующее касательное отображение определено однозначно.

¶ Пусть наряду с (1) имеет место равенство

$$f(x+h) - f(x) = Lh + o(h) \quad (h \rightarrow \theta), \quad (2)$$

где L — ещё одно линейное отображение из E в F . Положим $A = L - L_x$. Вычитая (1) из (2), имеем $Ah = o(h)$ ($h \rightarrow \theta$). Тогда для произвольного $y \in E$ получаем $Ay = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} A(ty) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(ty)}{t} = 0$ ($t \in \mathbb{R}$). Итак, $A = 0$, то есть $L = L_x$. □

4. Если отображение f дифференцируемо в точке x , то оно в этой точке непрерывно.

¶ Утверждение следует из оценки (см. 74.2)

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|f'(x)\| \|h\| + \|o(h)\| \quad (h \rightarrow \theta). \quad \square$$

5. Если $f : \Omega \rightarrow F$ постоянно, то $f'(x) = 0$ ($x \in \Omega$).

6. Всякое линейное отображение $A : E \rightarrow F$ дифференцируемо в каждой точке $x \in E$, причём $A'(x) = A$.

¶ Из линейности A равенство (1) приобретает вид $A(x+h) - Ax = Ah$ ($x, h \in E$). □

7. Если f, g дифференцируемы в точке x , то в этой точке дифференцируемы отображения $f \pm g$, λf ($\lambda \in \Lambda$), причём

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x), \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x).$$

8. [Дифференцирование суперпозиции отображений]. Пусть заданы отображения $f : \Omega \rightarrow F$, $g : \Sigma \rightarrow G$ ($\Omega \subset E$, $\Sigma \subset F$, $f(\Omega) \subset \Sigma$), причём f дифференцируемо в точке $x \in \Omega$, а g дифференцируемо в точке $f(x) \in \Sigma$. Тогда $g \circ f$ дифференцируемо в точке x и

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

¶ Справедлива выкладка

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= g(f(x) + [f(x+h) - f(x)]) - g(f(x)) \\ &= g'(f(x))[f(x+h) - f(x)] + o(f(x+h) - f(x)) \\ &= g'(f(x))(f'(x)h + o(h)) + o(f'(x)h + o(h)) \\ &= g'(f(x)) \circ f'(x)(h) + g'(f(x))(o(h)) + o(h) \quad (h \rightarrow \theta). \end{aligned}$$

Из оценки $\frac{\|g'(f(x))(o(h))\|}{\|h\|} \leq \|g'(f(x))\| \cdot \frac{\|o(h)\|}{\|h\|}$ следует, что

$$g \circ f(x+h) - g \circ f(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)(h) + o(h) \quad (h \rightarrow \theta). \quad \square$$

У п р а ж н е н и я 9. Убедитесь, что никакая норма $\|\cdot\|$ в евклидовом пространстве E не дифференцируема в θ .

10. Пусть $f : E \rightarrow F$ обладает свойством $\|f(x)\| \leq \|x\|^2$ ($x \in E$). Найдите $f'(\theta)$.

§76. Частные производные

Далее в этом разделе мы будем заниматься дифференциальными свойствами отображений исключительно в вещественных евклидовых пространствах.

1. Приступая к нахождению эффективных способов вычисления касательных отображений, введём важное понятие частной производной для функций многих переменных.

Пусть Ω — открыто в \mathbb{R}^n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ — стандартный базис в \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — функция; j -й частной производной функции f в точке $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \Omega$ (обозначается $\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0)$ или $f'_{x^j}(x_0)$) называется предел (если он существует):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0 + te_j) - f(x_0)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_0^1, \dots, x_0^j + t, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^j, \dots, x_0^n)], \end{aligned}$$

то есть $\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0)$ — это производная функции $f(x_0^1, \dots, x^j, \dots, x_0^n)$ одного переменного x^j в точке x_0^j (при фиксированных остальных переменных). Отсюда следует, что частная производная определена однозначно (коль скоро она существует).

2. П р и м е р. Пусть $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

§77. Матрица Якоби

1. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}, \{f_1, \dots, f_m\}$ — стандартные базисы в пространствах \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m соответственно и $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, где Ω — некоторое открытое множество в \mathbb{R}^n . Отображение φ определено системой m своих координатных функций φ^i ($1 \leq i \leq m$) n переменных (см. 66.5):

$$\varphi(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^m \varphi^i(x^1, \dots, x^n) f_i \quad (x = (x^1, \dots, x^n) \in \Omega).$$

Пусть φ дифференцируемо в точке $x \in \Omega$: $\varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi'(x)h + o(h)$ ($h \rightarrow \theta$). Вычислим матрицу $[d_i^j]$ касательного отображения $\varphi'(x)$. Для этого (с учётом 72.1) заметим, что

$$\begin{aligned} \varphi'(x)e_j &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \varphi'(x)(te_j) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi(x + te_j) - \varphi(x) + o(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi(x + te_j) - \varphi(x)] = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \frac{1}{t} [\varphi^i(x + te_j) - \varphi^i(x)] f_i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x) f_i \quad (1 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

Итак $d_i^j = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x)$. Матрица частных производных $\left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x) \right]$ называется *матрицей Якоби* отображения $\varphi'(x)$. Получен эффективный способ вычисления касательного отображения (если оно существует). Отметим важные частные случаи.

2. [Производная функции n переменных]. Пусть $f(x)$ ($x \in \Omega$) — функция n переменных. Матрица Якоби $f'(x)$ является тогда $(n \times 1)$ -матрицей $\left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \right]$, а значение дифференциала функции f на смещении $h = (dx^1, \dots, dx^n)$ вычисляется по формуле $df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) dx^j$.

3. [Производная вектор-функции]. Пусть $x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ ($t \in \Omega \subset \mathbb{R}$) дифференцируема в точке $t \in \Omega$. Тогда матрица Якоби для $x'(t) = \begin{bmatrix} x^{1'}(t) \\ \dots \\ x^{m'}(t) \end{bmatrix}$ — $(1 \times m)$ -матрица. Дифференциал этой вектор-функции, соответствующий смещению dt , равен $dx(t) = (x^{1'}(t)dt, \dots, x^{m'}(t)dt)$.

4. [Формула полной производной]. Пусть функция $g(t) = f(x^1(t), \dots, x^n(t))$ ($t \in \Omega \subset \mathbb{R}$) — суперпозиция функции f n переменных и вектор-функции $x(t)$ (со значениями в \mathbb{R}^n). В предположении, что дифференцирование возможно:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x(t)) x^{j'}(t).$$

¶ В силу 75.8

$$g'(t) = f'(x(t)) \circ x'(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(x(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x(t)) \right] \begin{bmatrix} x^{1'}(t) \\ \dots \\ x^{n'}(t) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x(t)) x^{j'}(t). \square$$

5. [Арифметические свойства производной функций многих переменных]. Пусть $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) дифференцируемы в $x \in \Omega$. Тогда в этой точке дифференцируемы функции $f \cdot g$, f/g (если $g(x) \neq 0$), причём

$$(f \cdot g)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g^2(x)}[g(x)f'(x) - f(x)g'(x)].$$

¶ Формулы можно получить выкладками, аналогичными скалярному случаю (30.1). Для иллюстрации развитой техники приведём другой вывод первой формулы. Отображение $x \rightarrow f(x)g(x)$ представим как суперпозицию двух отображений: $f(x)g(x) = \beta \circ \alpha(x)$ ($x \in \Omega$), где $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ действует по формуле $\beta(u, v) = uv$ ($u, v \in \mathbb{R}$), а отображение $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ — по формуле $\alpha(x) = \{f(x), g(x)\}$. Матрицы Якоби этих отображений: $\beta'(u, v) = [v, u]$, $\alpha'(x) = \begin{bmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{bmatrix}$ ($\alpha'(x)$ является $(n \times 2)$ -матрицей, сокращённо записанной как (1×2) -матрица). В силу 75.8

$$(f \cdot g)'(x) = \beta'(\alpha(x))\alpha'(x) = [g(x), f(x)] \begin{bmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{bmatrix} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x). \quad \square$$

6. П р и м е р. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано координатными функциями $\varphi^1(x, y) = e^x \cos y$, $\varphi^2(x, y) = e^x \sin y$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$), то есть $\varphi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$). Матрица Якоби отображения φ имеет вид $\varphi'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$.

§78. Условия дифференцируемости отображений

Мы научились вычислять матрицу касательного отображения в предположении его существования. Получим условия, при которых матрица частных производных определяет касательное отображение. Начнём с функций n переменных.

1. Пусть $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$), и все частные производные $\frac{\partial \psi}{\partial x^k}$ ($1 \leq k \leq n$) определены в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$ и непрерывны в самой точке x . Тогда ψ дифференцируемо в x .

¶ Ограничимся случаем $n = 3$. В силу предположений справедлива выкладка

$$\begin{aligned} & \psi(x^1 + h^1, x^2 + h^2, x^3 + h^3) - \psi(x^1, x^2, x^3) \\ &= \psi(x^1 + h^1, x^2 + h^2, x^3 + h^3) - \psi(x^1, x^2 + h^2, x^3 + h^3) \\ &+ \psi(x^1, x^2 + h^2, x^3 + h^3) - \psi(x^1, x^2, x^3 + h^3) + \psi(x^1, x^2, x^3 + h^3) - \psi(x^1, x^2, x^3) \\ &= \psi'_{x^1}(x^1, x^2 + h^2, x^3 + h^3)h^1 + o(h^1) \\ &+ \psi'_{x^2}(x^1, x^2, x^3 + h^3)h^2 + o(h^2) + \psi'_{x^3}(x^1, x^2, x^3)h^3 + o(h^3) \\ &= \psi'_{x^1}(x^1, x^2 + h^2, x^3 + h^3)h^1 + \psi'_{x^2}(x^1, x^2, x^3 + h^3)h^2 \\ &+ \psi'_{x^3}(x^1, x^2, x^3)h^3 + o(h) = \sum_{i=1}^3 \psi'_{x^i}(x^1, x^2, x^3)h^i + r(h), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r(h) &= [\psi'_{x^1}(x^1, x^2 + h^2, x^3 + h^3) - \psi'_{x^1}(x^1, x^2, x^3)]h^1 + [\psi'_{x^2}(x^1, x^2, x^3 + h^3) \\ &- \psi'_{x^2}(x^1, x^2, x^3)]h^2 + o(h) = o(h) \quad (h \rightarrow \theta). \quad \square \end{aligned}$$

Сформулируем теперь общее утверждение.

2. Пусть $\varphi^1, \dots, \varphi^m$ — координатные функции отображения $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Чтобы φ было дифференцируемым в точке $x \in \Omega$ необходимо, чтобы была определена матрица $\left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x) \right]$, и достаточно, чтобы эта матрица была определена в некоторой окрестности точки x и все частные производные $\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}$ были в этой точке непрерывными.

¶ Необходимость установлена в 77.1. Докажем достаточность. Пусть f_1, \dots, f_m — стандартный базис в \mathbb{R}^m и $\varphi(y) = \sum_{i=1}^m \varphi^i(y) f_i$ ($y \in \Omega$). В силу п. 1 функции φ^i дифференцируемы в $x \in \Omega$, так что $\varphi^i(x+h) - \varphi^i(x) = \varphi^{i'}(x)h + o(h)$ ($h \rightarrow \theta$). Поэтому

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \sum_{i=1}^m [\varphi^{i'}(x)h + o(h)] f_i = \sum_{i=1}^m (\varphi^{i'}(x)h) f_i + o(h) = \varphi'(x)h + o(h) \quad (h \rightarrow \theta),$$

где $\varphi'(x)$ — линейное отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m , определённое матрицей $\left[\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x) \right]$. □

3. З а м е ч а н и е. В 76.2 матрица $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\theta), \frac{\partial f}{\partial y}(\theta) \right]$ определена. Однако f не дифференцируема в θ , ибо она в θ даже разрывна. Таким образом, существование матрицы Якоби не является достаточным условием дифференцируемости функции.

§79. Касательная плоскость

1. Пусть поверхность (S) в \mathbb{R}^3 описывается уравнением

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2). \quad (*)$$

Плоскость (σ) называется *касательной* к поверхности (S) в точке $a_0 \in (S)$, если расстояние $d(a, (\sigma))$ от переменной точки $a \in (S)$ до плоскости (σ) удовлетворяет асимптотическому равенству $d(a, (\sigma)) = o(\|a - a_0\|)$ ($a \rightarrow a_0, a \in (S)$).

2. Пусть f дифференцируема в точке (x_0, y_0) . Тогда поверхность (S) , описываемая уравнением (*), обладает единственной касательной плоскостью (σ) в точке $a_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

¶ Из курса аналитической геометрии известно, что

$$d(a, (\sigma)) = \frac{1}{M} |z - z_0 - f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)|,$$

где $a = (x, y, z) \in (S)$, $M = [1 + f'_x(x_0, y_0)^2 + f'_y(x_0, y_0)^2]^{1/2}$. Так как f дифференцируема в (x_0, y_0) , имеем $d(a, (\sigma)) = o([(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2})$ ($a \rightarrow a_0$). Следовательно,

$$\lim_{a \rightarrow a_0} \frac{d(a, (\sigma))}{\|a - a_0\|} = \lim_{a \rightarrow a_0} \frac{d(a, (\sigma))}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}} \cdot \frac{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}}{\|a - a_0\|} = 0.$$

Касательная плоскость единственна (!!). □

§80. Непрерывно дифференцируемые отображения

1. Пусть E и F — евклидовы пространства, а отображение $f : \Omega \rightarrow F$ ($\Omega \subset E$) дифференцируемо в каждой точке открытого множества Ω . Тогда определено отображение $f' : \Omega \rightarrow L(E, F)$, сопоставляющее каждой точке $x \in \Omega$ касательное отображение $f'(x) \in L(E, F)$. Отображение f' естественно назвать (по аналогии с 29.4) производной функции f в области Ω .

2. Отображение f называется *непрерывно дифференцируемым* в Ω , если отображение $f' : \Omega \rightarrow L(E, F)$ непрерывно:

$$\forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in \Omega \quad (\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f'(x) - f'(y)\| < \varepsilon)$$

(здесь $\|f'(x) - f'(y)\|$ означает норму линейного отображения $f'(x) - f'(y)$ (см. 74.1)).

3. Если отображение f непрерывно дифференцируемо, то отображение $x \rightarrow \|f'(x)\|$ непрерывно.

¶ Это следует из оценки $|\|f'(x)\| - \|f'(y)\|| \leq \|f'(x) - f'(y)\|$. □

4. Отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) непрерывно дифференцируемо в Ω тогда и только тогда, когда все частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ (f^i — координатные функции f) непрерывны в Ω .

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть f непрерывно дифференцируемо в Ω . В силу 78.2 все частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ определены в Ω . Их непрерывность следует из оценки

$$\left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(y) \right| \leq \left[\sum_{i,j} \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(y) \right|^2 \right]^{1/2} = \|f'(x) - f'(y)\|_e.$$

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Из непрерывности в Ω всех частных производных и 78.2 следует дифференцируемость f в каждой точке Ω . Пусть $x \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$ произвольно.

Из непрерывности $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ в точке x существует $\sigma_{ij} > 0$ такое, что $\left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(y) \right| < \frac{\varepsilon}{nm}$ ($y \in B_{\sigma_{ij}}(x)$). Полагая $\delta = \min_{i,j} \sigma_{ij}$, получим для любого $y \in B_\delta(x)$

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq \|f'(x) - f'(y)\|_e = \left[\sum_{i,j} \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(y) \right|^2 \right]^{1/2} < \varepsilon. \quad \square$$

5. З а м е ч а н и е. На вектор-функции обобщается понятие гладкости (53.1–2). Непрерывная вектор-функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и существуют пределы $\lim_{t \rightarrow a+} f'(t)$, $\lim_{t \rightarrow b-} f'(t)$. Вектор-функция f называется *непрерывной кусочно-гладкой*, если она непрерывна и существует разложение $\Delta(a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ такое, что f гладкая на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$.

§81. Интеграл от непрерывной вектор-функции

1. Пусть $f(t) = (f^1(t), \dots, f^m(t))$ ($a \leq t \leq b$) — непрерывная вектор-функция со значениями в \mathbb{R}^m . Все координатные функции f^i являются тогда обычными

непрерывными функциями на отрезке $[a, b]$. Интегральной суммой Римана вектор-функции f называется сумма

$$S_\Delta = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) f(\tau_j) \quad (\in \mathbb{R}^m), \quad t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j,$$

где $\Delta(a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ — разложение $[a, b]$. Нетрудно видеть, что для непрерывной вектор-функции существует предел $\lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S_\Delta$, который естественно назвать интегралом Римана вектор-функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначить символом $\int_a^b f(t) dt$. Таким образом,

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f^1(t) dt, \dots, \int_a^b f^m(t) dt \right) \quad (\in \mathbb{R}^m).$$

На векторные интегралы переносятся многие обычные свойства интеграла. Отметим два нужных нам свойства.

2. Для непрерывной вектор-функции $f(t)$ ($a \leq t \leq b$) существует первообразная вектор-функция $F(t)$ ($a \leq t \leq b$) такая, что $dF(t) = f(t)dt$ ³, причём $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

3. $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$

¶ Из предположений п. 2 координатные функции f^i вектор-функции f обладают первообразными F^i . Вектор-функция $F(t) = (F^1(t), \dots, F^m(t))$ является тогда искомой первообразной для $f(t)$. Интеграл в правой части п. 3 существует. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| &= \left\| \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} S_\Delta \right\| = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \left\| \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) f(\tau_j) \right\| \\ &\leq \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \|f(\tau_j)\| (t_j - t_{j-1}) = \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad \square \end{aligned}$$

§82. Оценочная формула Лагранжа

1. Формула Лагранжа (конечных приращений) не имеет точного аналога в многомерном случае. Этот факт следует из рассмотрения спирали в \mathbb{R}^3 с достаточно плотными витками (Рис. 17), которая ни в одной точке не обладает касательной, параллельной хорде AB (см. также ниже п. 4). Однако имеет место оценочная формула Лагранжа:

³Здесь левая часть определена в 77.3, а правая понимается как произведение скаляра-смещения dt на вектор $f(t)$, то есть $f(t)dt = (f^1(t)dt, \dots, f^m(t)dt)$.

2. Пусть отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) непрерывно дифференцируемо в Ω . Пусть $x \in \Omega$ и $h \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $\{x + th : 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega$. Тогда существует $t_0 \in [0, 1]$ такое, что

$$\|f(x + h) - f(x)\| \leq \|f'(x + t_0 h)\| \cdot \|h\|.$$

¶ Рассмотрим вектор-функцию $\varphi(t) = f(x + th)$ ($t \in [0, 1]$). Имеем $d\varphi(t) = f'(x + th)(h)dt$, и в силу 81.2 $f(x + h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 f'(x + th)(h) dt$. С учётом 81.3 и 74.2

$$\begin{aligned} \|f(x + h) - f(x)\| &= \left\| \int_0^1 f'(x + th)(h) dt \right\| \leq \int_0^1 \|f'(x + th)(h)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x + th)\| \|h\| dt = \|h\| \int_0^1 \|f'(x + th)\| dt. \end{aligned}$$

Скалярная функция $g(t) = \|f'(x + th)\|$ ($t \in [0, 1]$) непрерывна по t . Следовательно, по теореме о среднем 50.4 существует $t_0 \in [0, 1]$ такое, что $\int_0^1 \|f'(x + th)\| dt = \|f'(x + t_0 h)\|$. □

Для функций многих переменных имеет место точный аналог формулы Лагранжа.

3. Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) дифференцируема в Ω и $x \in \Omega, h \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $\{x + th : 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega$. Тогда существует $t_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + t_0 h)(h). \quad (*)$$

¶ Достаточно применить обычную формулу Лагранжа к скалярной функции $\varphi(t) = f(x + th)$ ($t \in [0, 1]$). □

4. З а м е ч а н и е. Формула (*) не верна уже для отображений $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Действительно, рассмотрим отображение из п. 77.6. Полагая в этом примере $h = (0, 2\pi) \in \mathbb{R}^2$, имеем $f'(th)(h) = (-2\pi \sin 2\pi t, 2\pi \cos 2\pi t) \neq \theta$ ($t \in [0, 1]$). Поэтому $\theta = f(h) - f(0) \neq f'(th)(h)$, $\forall t \in [0, 1]$.

§83. Длина пространственной кривой

1. Приведём теперь вывод формулы 60.4. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — гладкая вектор-функция, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ($a \leq t \leq b$), и $\Delta(a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ — разложение отрезка $[a, b]$. Длина ℓ_j j -го звена ломаной, вписанной в кривую, являющуюся образом вектор-функции γ , равна

$$\ell_j = [(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2 + (z(t_j) - z(t_{j-1}))^2]^{1/2} = \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

По оценочной формуле Лагранжа 82.2 существует $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ такое, что $\ell_j \leq \|\gamma'(\tau_j)\|(t_j - t_{j-1})$, откуда

$$\ell_\Delta \equiv \sum_{j=1}^n \ell_j \leq \sum_{j=1}^n \|\gamma'(\tau_j)\|(t_j - t_{j-1}). \quad (1)$$

С другой стороны, вектор-функция $\gamma'(t)$ ($a \leq t \leq b$), будучи непрерывной на $[a, b]$, является и равномерно непрерывной. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|t - s| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \varepsilon).$$

Если теперь диаметр разложения $d(\Delta) < \varepsilon$, то $\|\gamma'(t)\| - \|\gamma'(t_{j-1})\| \leq \|\gamma'(t) - \gamma'(t_{j-1})\| < \varepsilon$ ($t_{j-1} \leq t \leq t_j$). Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt - \varepsilon(t_j - t_{j-1}) &\leq \|\gamma'(t_{j-1})\|(t_j - t_{j-1}) \\ &= \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\gamma'(t) + \gamma'(t_{j-1}) - \gamma'(t)] dt \right\| \leq \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\ &= \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства по j , получаем

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \ell_\Delta + 2\varepsilon(b - a). \quad (2)$$

Из (1) и (2) имеем $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - 2\varepsilon(b - a) \leq \ell_\Delta \leq \sum_{j=1}^n \|\gamma'(\tau_j)\| \cdot (t_j - t_{j-1})$. Отсюда $\ell = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \ell_\Delta$ существует, причём (см. 74.4)

$$\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b [x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2]^{1/2} dt. \quad (3)$$

2. З а м е ч а н и е. Формула (3) верна и в случае, когда γ — непрерывная кусочно-гладкая вектор-функция. Формула обобщается на случай \mathbb{R}^m : если $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывная кусочно-гладкая вектор-функция, то длина соответствующей кривой (понимаемая как предел длин вписанных ломаных) равна $\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

§84. Необходимое условие локального экстремума

1. Будем говорить, что отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) обладает в точке $x_0 \in \Omega$ *локальным минимумом* (соответственно *максимумом*), если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \geq f(x_0)$ (соответственно $f(x) \leq f(x_0)$) для всех $x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$.

Отложив пока более подробное обсуждение введённого понятия на некоторое время, отметим простое необходимое условие локального экстремума.

2. Если f дифференцируема в $x_0 \in \Omega$ и обладает в этой точке локальным экстремумом, то $f'(x_0) = 0$.

¶ Пусть $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Функция одного переменного

$$\varphi_j(t) \equiv f(x_0^1, \dots, x_0^{j-1}, t, x_0^{j+1}, \dots, x_0^n)$$

обладает в точке $t = x_0^j$ локальным экстремумом и дифференцируема в этой точке.

Поэтому (см. 39.2) $\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = \frac{d\varphi_j}{dt}(x_0^j) = 0$. Так как это верно для любого $j = \overline{1, n}$, то $f'(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right] = 0$. □

§85. Дифференцирование обратной функции

1. Теорема. Пусть отображение $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) непрерывно дифференцируемо, причём касательное отображение $f'(a)$ обратимо ($a \in \Omega$ фиксировано). Тогда существуют открытые множества U ($a \in U \subset \Omega$) и $V \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $f : U \rightarrow V$ — биекция, а обратное (к f) отображение $g : V \rightarrow U$ непрерывно дифференцируемо и

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1} \quad (y \in V). \quad (1)$$

¶ Не ограничивая общности, считаем, что $a = f(a) = \theta$, $f'(\theta) = I$ — тождественное отображение. (Если это не так, то можно перейти к новому отображению

$$\tilde{f}(x) = f'(a)^{-1}\{f(x+a) - f(a)\}, \quad x \in \tilde{\Omega} \equiv \{x - a : x \in \Omega\},$$

которое нужными свойствами обладает.) Так как f непрерывно дифференцируемо, существует $U = B_R(\theta)$ такое, что

$$\|f'(x) - I\| < 1/2 \quad (x \in U). \quad (2)$$

Неравенство (2) обеспечивает, в частности, что линейное отображение $f'(x)$ обратимо при любом $x \in U$. Это следует из оценки $\|f'(x)(h)\| \geq \|h\| - \|(f'(x) - I)h\| \geq \frac{1}{2}\|h\|$ с учётом 73.2.

Положим $V = f(U)$. Таким образом, $f : U \rightarrow V$ — сюръекция по построению. Итак, необходимо установить, что (а) $f : U \rightarrow V$ — инъекция, (б) V открыто, (в) имеет место формула (1).

Проверим (а). Пусть $x, x+h \in U$ произвольны. Рассмотрим вектор-функцию $F(t) \equiv f(x+th) - th$ ($0 \leq t \leq 1$). Тогда (так как $x+th \in U$ ($0 \leq t \leq 1$)) имеем $dF(t) = (f'(x+th) - I)(h)dt$. Отсюда с учётом (2)

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - h\| &= \|F(1) - F(0)\| = \left\| \int_0^1 (f'(x+th) - I)(h) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x+th) - I\| \|h\| dt \leq \frac{1}{2} \|h\|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|f(x+h) - f(x)\| \geq \frac{1}{2} \|h\|, \quad (3)$$

то есть $f : U \rightarrow V$ — инъекция.

(б). Пусть $x \in U$ и $r > 0$ таково, что $B_r[x] \subset U$. Покажем, что $B_{\frac{1}{4}r}(f(x)) \subset V$ (отсюда следует, разумеется, что V открыто).

Итак, пусть вектор $y \in B_{\frac{1}{4}r}(f(x))$ произволен. Покажем, что существует $x_* \in B_r(x)$ такой, что $f(x_*) = y$. Это очевидно, если $y = f(x)$ (тогда $x_* = x$). Пусть $y \neq f(x)$. Введём функцию

$$\varphi(u) = \|y - f(u)\|^2 \quad (u \in B_r[x]).$$

В силу 70.2 существует точка $x_* \in B_r[x]$ такая, что $\varphi(x_*) = \inf_{u \in B_r[x]} \varphi(u)$. На самом деле $x_* \in B_r(x)$ (действительно, равенство $\|x - x_*\| = r$ влечёт с учётом (3)

$$\frac{1}{2}r \leq \|f(x_*) - f(x)\| \leq \varphi(x_*)^{1/2} + \varphi(x)^{1/2} < \varphi(x_*)^{1/2} + \frac{1}{4}r,$$

то есть $\varphi(x) < \frac{1}{16} \cdot r^2 < \varphi(x_*)$, что противоречит тому, что φ достигает минимума в x_* . Функция φ дифференцируема в x_* , и в силу 84.2

$$\begin{aligned}\varphi'(x_*) &= \left[-2 \sum_{i=1}^n (y^i - f^i(x_*)) \frac{\partial f^i}{\partial x^1}(x_*), \dots, -2 \sum_{i=1}^n (y^i - f^i(x_*)) \frac{\partial f^i}{\partial x^n}(x_*) \right] \\ &= -2 \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_*) \right] \cdot \begin{bmatrix} y^1 - f^1(x_*) \\ \dots \\ y^n - f^n(x_*) \end{bmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Но матрица Якоби $f'(x_*) = \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_*) \right]$ обратима (см. замечание после формулы (2)), так что $y - f(x_*) = \theta$, что и требовалось.

(в). Пусть $y \in V$ произволен, $y + k \in V$, $x = g(y)$ и $g(y + k) - g(y) = h$. Тогда $k = f(x + h) - f(x)$. В силу (3) $\|k\| \geq \frac{1}{2}\|h\|$, так что $k \rightarrow \theta$ влечёт $h \rightarrow \theta$. Отсюда следует непрерывность отображения g . Далее $k = f'(x)h + o(h)$ ($h \rightarrow \theta$). Поскольку линейное отображение $f'(x)$ обратимо, имеем

$$g(y + k) - g(y) = f'(x)^{-1}k + o(h) \quad (h \rightarrow \theta).$$

Наконец, $\lim_{k \rightarrow \theta} \frac{\|o(h)\|}{\|k\|} = \lim_{k \rightarrow \theta} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|} = 0$, откуда

$$g(y + k) - g(y) = f'(g(y))^{-1}k + o(k) \quad (k \rightarrow \theta). \square$$

2. П р и м е р. Отображение $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) непрерывно дифференцируемо, причём касательное отображение (см. 77.6) обратимо в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, так как $\det f'(x, y) = e^{2x} \neq 0$. Найдём производную обратного (к f) отображения

$$g(u, v) = (g^1(u, v), g^2(u, v)) \quad ((u, v) \in \mathbb{R}^2).$$

Мы имеем

$$f \circ g(u, v) = (\exp\{g^1(u, v)\} \cos g^2(u, v), \exp\{g^1(u, v)\} \sin g^2(u, v)) = (u, v),$$

откуда $\exp\{g^1(u, v)\} \cos g^2(u, v) = u$, $\exp\{g^1(u, v)\} \sin g^2(u, v) = v$. Поэтому

$$\begin{aligned}g'(u, v) &= f'(g^1(u, v), g^2(u, v))^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \exp\{g^1(u, v)\} \cos g^2(u, v) & -\exp\{g^1(u, v)\} \sin g^2(u, v) \\ \exp\{g^1(u, v)\} \sin g^2(u, v) & \exp\{g^1(u, v)\} \cos g^2(u, v) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{bmatrix} u & v \\ -v & u \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

§86. Частные производные высших порядков

1. До сих пор речь шла о 1-й производной отображения. Пусть $f : \Omega \rightarrow F$, где Ω — открытое множество в евклидовом пространстве E , и F — другое евклидово

пространство. Если f дифференцируемо в каждой точке $x \in \Omega$, то можно говорить о производном отображении $f' : \Omega \rightarrow L(E, F)$. В свою очередь, если это отображение дифференцируемо в каждой точке множества Ω , то определено второе производное отображение $f'' \equiv (f')'$, $f'' : \Omega \rightarrow L(E, L(E, F))$. Аналогично вводятся производные отображения высших порядков. Мы не будем изучать высшие производные в общем случае, памятуя о том, что переходом к координатным функциям отображения f , можно редуцировать их изучение к случаю функций многих переменных.

2. Для функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) могут быть введены последовательно частные производные высших порядков:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \right) \text{ и т. п.}$$

В частности, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}$ обозначается через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i^2}}$.

3. [Независимость от порядка дифференцирования]. Пусть $\frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}$ определены в некоторой окрестности точки x и непрерывны в x , а $\{i_1, \dots, i_k\}$ — некоторая перестановка индексов j_1, \dots, j_k . Тогда

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(x).$$

¶ Ограничимся при доказательстве случаем $k = 2$ для функции двух переменных. Итак, пусть

$$\Delta_h^1 f(u, v) = f(u + h, v) - f(u, v), \quad \Delta_h^2 f(u, v) = f(u, v + h) - f(u, v).$$

Тогда $\Delta_h^1(\Delta_h^2 f(u, v)) = \Delta_h^2(\Delta_h^1 f(u, v))$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Delta_h^1(\Delta_h^2 f(u, v)) &= \Delta_h^1 \left[h \frac{\partial f}{\partial v}(u, v + \theta h) \right] = h \left[\frac{\partial f}{\partial v}(u + h, v + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial v}(u, v + \theta h) \right] \\ &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u + \theta_1 h, v + \theta h) \quad (0 < \theta, \theta_1 < 1). \end{aligned}$$

В этой выкладке применена формула конечных приращений Лагранжа к функции $w \rightarrow f(u, w)$ (это возможно, так как $\frac{\partial f}{\partial v}$ определена и непрерывна в некоторой окрестности (u, v)), а также — к функции $w \rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(w, v + \theta h)$. Так как $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ непрерывна в точке (u, v) , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u + \theta_1 h, v + \theta h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^1(\Delta_h^2 f(u, v))}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2(\Delta_h^1 f(u, v))}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v). \quad \square \end{aligned}$$

4. Доказанное утверждение позволяет ввести дифференциалы высших порядков для функций нескольких переменных. Пусть все частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$

определены в некоторой окрестности точки $x = (x^1, \dots, x^n)$ и непрерывны в x . Тогда $d^2 f(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) dx^i dx^j$. Это квадратичная форма независимых переменных dx^1, \dots, dx^n . Аналогично $d^3 f(x) \equiv \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} dx^i dx^j dx^k$ и т. п.

§87. Формула Тейлора для функций нескольких переменных

1. Пусть функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто) обладает непрерывными частными производными до порядка s включительно. Пусть $x_0 \in \Omega$ и $\delta > 0$ таково, что $B_\delta(x_0) \subset \Omega$. Тогда для любого вектора $x = (x^1, \dots, x^n) \in B_\delta(x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \dots (x^{j_k} - x_0^{j_k}) \cdot \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}} + R_s(x), \quad (1)$$

где $R_s(x) = \frac{1}{s!} \cdot \sum_{j_1, \dots, j_s=1}^n (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \dots (x^{j_s} - x_0^{j_s}) \frac{\partial^s f(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}}$ — остаток в форме Лагранжа (здесь $\theta = \theta(x, s) \in (0, 1)$).

¶ Введём скалярную функцию $F(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$, $t \in [0, 1]$. В соответствии с 77.4 $F'(t) = \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0 + t(x - x_0))$. Подобным образом

$$F^{(k)}(t) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \dots (x^{j_k} - x_0^{j_k}) \cdot \frac{\partial^k f(x_0 + t(x - x_0))}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}. \quad (2)$$

В силу предположений о функции f имеет место формула Тейлора для F (см. 34.2): $F(t) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} t^k F^{(k)}(0) + t^s \cdot \frac{1}{s!} F^{(s)}(\theta t)$. Отсюда $f(x) = F(1) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) + \frac{1}{s!} F^{(s)}(\theta)$. С учётом (2) получаем искомую формулу (1). □

2. При сделанных выше предположениях о функции f имеет место формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^s \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \dots (x^{j_k} - x_0^{j_k}) \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}} + o(\|x - x_0\|^s) \quad (x \rightarrow x_0). \quad (3)$$

¶ Из непрерывности частных производных s -го порядка для функции f следует, что $\varepsilon_{j_1 \dots j_s} \equiv \frac{\partial^s f(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}} - \frac{\partial^s f(x_0)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0)$. Из формулы (1) имеем

$$\begin{aligned} & |f(x) - \sum_{k=0}^s \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \dots (x^{j_k} - x_0^{j_k}) \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}}| \\ &= \frac{1}{s!} \left| \sum_{j_1, \dots, j_s=1}^n \varepsilon_{j_1 \dots j_s}(x) (x^{j_1} - x_0^{j_1}) \dots (x^{j_s} - x_0^{j_s}) \right| \\ &\leq \frac{1}{s!} \max_{j_1 \dots j_s} |\varepsilon_{j_1 \dots j_s}(x)| \left[\sum_{j=1}^n |x^j - x_0^j| \right]^s \leq n^{s/2} \cdot \frac{1}{s!} \max_{j_1 \dots j_s} |\varepsilon_{j_1 \dots j_s}(x)| \|x - x_0\|^s. \end{aligned}$$

С учётом (4) отсюда немедленно следует (3). \square

§88. Локальный экстремум функции

1. Пусть задана функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открыто), и надо отыскать точки локального экстремума этой функции. Допустим, что f обладает непрерывными частными производными 2-го порядка. В силу 84.2 точки локального экстремума следует искать среди точек, в которых все частные производные 1-го порядка обращаются в нуль. Пусть x_0 — одна из таких точек, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = 0 \quad (1 \leq j \leq n). \quad (1)$$

Покажем, как можно узнать, имеет ли функция f в точке x_0 локальный экстремум и каков характер этого экстремума. Воспользуемся для этого формулой Тейлора с остатком в форме Пеано. С учётом (1) имеем

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} h^j h^k + o(\|h\|^2) \quad (x \rightarrow x_0), \quad (2)$$

где $a_{jk} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^j \partial x^k}$, $h^j = x^j - x_0^j$ ($1 \leq j \leq n$), $h = (h^1, \dots, h^n)$. Из этого представления ясно, что поведение разности $f(x) - f(x_0)$ в окрестности точки x_0 определяется поведением квадратичной формы

$$a(h) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} h^j h^k. \quad (3)$$

Сформулируем соответствующие выводы.

2. Форма (3) строго положительно определена, то есть $a(h) > 0$ для любого $h \neq \theta$. Тогда f обладает в точке x_0 локальным минимумом.

3. Форма (3) строго отрицательно определена, то есть $a(h) < 0$ для любого $h \neq \theta$. Тогда f обладает в точке x_0 локальным максимумом.

4. Форма (3) определена не строго, то есть $a(h) \geq 0$ либо $a(h) \leq 0$ для всех h , и существует $h_0 \neq \theta$ такое, что $a(h_0) = 0$. В этом случае вопрос о существовании локального экстремума в точке x_0 остаётся открытым.

5. В остальных случаях экстремума заведомо нет.

¶ П.2. Форма (3) на сфере $S = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$ непрерывна и, следовательно, достигает минимального значения (см. 70.2): $a(u_0) = \min_{u \in S} a(u) > 0$. Выберем $\delta > 0$

так, чтобы $\frac{|o(\|h\|^2)|}{\|h\|^2} < \frac{a(u_0)}{4}$ ($h \in B_\delta(\theta)$), где остаток $o(\|h\|^2)$ определён формулой (2). В силу равенства

$$f(x) - f(x_0) = \|x - x_0\|^2 \left[\frac{1}{2} a \left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right) + \frac{o(\|x - x_0\|^2)}{\|x - x_0\|^2} \right] \quad (4)$$

имеем для любого $x \in B_\delta(x_0)$ ($x \neq x_0$)

$$f(x) - f(x_0) \geq \|x - x_0\|^2 \left[\frac{1}{2} a(u_0) + \frac{o(\|x - x_0\|^2)}{\|x - x_0\|^2} \right] > \|x - x_0\|^2 \frac{a(u_0)}{4} > 0,$$

то есть x_0 — точка локального минимума функции f . Аналогично рассматривается п. 3.

П.4. Пусть $a(h_0) = 0$ в некоторой точке $h_0 \neq \theta$. Тогда $a(h) = 0$ для всех $h = \lambda h_0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), и в точках вида $x = x_0 + \lambda h_0$ имеем $f(x) - f(x_0) = o(\|h\|^2)$ ($x \rightarrow x_0$) — знак остатка неизвестен. В этом случае необходимо более детальное исследование с помощью производных высшего порядка.

П.5. В этом случае существуют $u, v \in S$ такие, что $a(u) > 0$, $a(v) < 0$. Из представления (4) следует, что в достаточно малой окрестности точки x_0 разность $f(x) - f(x_0)$ не является знакопостоянной, и значит, в точке x_0 локального экстремума нет. \square

6. З а м е ч а н и е. Напомним известный из алгебры критерий Сильвестра, позволяющий эффективно решать вопрос об определённости симметрической квадратичной формы. Рассмотрим систему миноров формы $a(h)$:

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(а) Если $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, то $a(h)$ строго положительно определена.

(б) Если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, то $a(h)$ строго отрицательно определена.

(в) Если все главные миноры матрицы $[a_{jk}]$ неотрицательны или неотрицательны все главные миноры матрицы $[-a_{jk}]$ и существует k такое, что $\Delta_k = 0$, то $a(h)$ определена не строго.

(г) В остальных случаях $a(h)$ не определена.

§89. Теорема о существовании неявной функции

1. Рассмотрим сначала постановку задачи в простейшем (плоском) случае. Пусть задано уравнение

$$f(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega - \text{открыто}). \quad (1)$$

Разрешимо ли оно относительно переменной x ? Желая привлечь для решения этой задачи методы дифференциального исчисления, мы должны рассматривать эту задачу с локальной точки зрения. Итак, пусть f непрерывно дифференцируема в Ω (то есть обладает в Ω непрерывными частными производными f'_x, f'_y , и точка $(x_0, y_0) \in \Omega$ — решение уравнения (1), то есть $f(x_0, y_0) = 0$. При каких условиях уравнение (1) разрешимо относительно x в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) ?

Для решения задачи воспользуемся основной идеей дифференциального исчисления — локальной линейной аппроксимацией функций. Дифференцируя (1), получим уравнение касательной к кривой, заданной уравнением (1), в точке (x_0, y_0) :

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (2)$$

Это линейное уравнение локально аппроксимирует уравнение (1). Поэтому если уравнение (2) разрешимо относительно x , то можно надеяться, что это же верно для уравнения (1). Условие разрешимости (2) относительно x очень простое: $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Итак, мы эвристически пришли к следующему утверждению:

2. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывно дифференцируема в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, причём

- 1) $f(x_0, y_0) = 0$,
- 2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности U точки y_0 определена функция $x = \varphi(y)$ ($y \in U$) такая, что $f(\varphi(y), y) = 0$ ($y \in U$).

Общая теорема о существовании неявной функции является обобщением приведённой выше теоремы на векторный случай.

3. Пусть система уравнений

$$\begin{cases} f^1(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) = 0, \\ \dots \\ f^n(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

относительно неизвестных x^1, \dots, x^n с параметрами y^1, \dots, y^m обладает свойствами:

1) вектор $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ является решением системы (3) для вектора-параметра $y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^m)$,

2) $\det \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(v) \right] \neq 0$, где $v = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0^1, \dots, y_0^m) \in \mathbb{R}^{n+m}$,

и все частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\frac{\partial f^i}{\partial y^s}$ непрерывны в некоторой окрестности вектора v .

Тогда система (3) разрешима относительно x^1, \dots, x^n при любом $y = (y^1, \dots, y^m)$ из некоторой окрестности U вектора y_0 :

$$\begin{aligned} x^1 &= \varphi^1(y^1, \dots, y^m), \\ &\dots \\ x^n &= \varphi^n(y^1, \dots, y^m), \quad y = (y^1, \dots, y^m) \in U(\subset \mathbb{R}^m). \end{aligned} \quad (4)$$

При этом отображение $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое координатными функциями $\varphi^1, \dots, \varphi^n$, непрерывно дифференцируемо.

¶ Пусть Ω — окрестность точки v , в которой все частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\frac{\partial f^i}{\partial y^s}$ непрерывны. Рассмотрим отображение

$$F(x, y) = (f^1(x, y), \dots, f^n(x, y), y)$$

(здесь и далее $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^m)$). Оно непрерывно дифференцируемо в Ω и матрица Якоби для $F'(v)$ имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(v) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(v) & \frac{\partial f^1}{\partial y^1}(v) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial y^m}(v) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(v) & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n}(v) & \frac{\partial f^n}{\partial y^1}(v) & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial y^m}(v) \\ \hline & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right].$$

Из условия 2) следует, что линейное отображение $F'(v)$ обратимо в \mathbb{R}^{n+m} . По теореме 85.1 о дифференцировании обратной функции существует окрестность $V(\subset \Omega)$ точки v и окрестность $W(\subset \mathbb{R}^{n+m})$ точки $(0, \dots, 0, y_0^1, \dots, y_0^m)$ такие, что $F : V \rightarrow W$ обладает непрерывно дифференцируемым обратным отображением

$$G : W \rightarrow V, \text{ то есть } G(f^1(x, y), \dots, f^n(x, y), y) = (x, y).$$

Если $\psi^1, \dots, \psi^{n+m}$ — координатные функции отображения G , то

$$x^j = \psi^j(f^1(x, y), \dots, f^n(x, y), y), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Пусть U — такая окрестность точки y_0 , что $(0, \dots, 0, y^1, \dots, y^m) \in W$, всякий раз, когда $y \in U$. Тогда функции $\varphi^j(y^1, \dots, y^m) \equiv \psi^j(0, \dots, 0, y^1, \dots, y^m)$, $1 \leq j \leq n$, являются искомыми. Действительно,

$$(f^1(\psi^1(\theta, y), \dots, \psi^n(\theta, y), y), \dots, f^n(\psi^1(\theta, y), \dots, \psi^n(\theta, y), y), y) = F \circ G(\theta, y) = (\theta, y),$$

откуда $f^j(\varphi^1(y), \dots, \varphi^n(y), y) = 0$, $1 \leq j \leq n$. Таким образом, $x^j = \varphi^j(y)$ ($1 \leq j \leq n$) удовлетворяют системе (4). \square

§90. Локальный относительный экстремум

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и заданы функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq m < n$), $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : f^1(x) = \dots = f^m(x) = 0\}$. Точка $x_0 \in \tilde{\Omega}$ называется точкой *относительного локального максимума* функции f , если $\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(x_0) \cap \tilde{\Omega} (f(x) \leq f(x_0))$. Аналогично определяются точки локального относительного минимума.

2. Будем заниматься исследованием функции f на локальный относительный экстремум при условиях

$$f^1(x) = \dots = f^m(x) = 0 \quad (m < n),$$

где f, f^j непрерывно дифференцируемы. Пусть $\text{Rg} \left[\frac{\partial f^j}{\partial x^k}(x_0) \right] = m$ (ранг матрицы $\left[\frac{\partial f^j}{\partial x^k}(x_0) \right]$ равен m). Пусть, например,

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m}(x_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Запишем вектор x в виде $x = (x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n) = (u, v)$, где $u = (x^1, \dots, x^m)$, $v = (x^{m+1}, \dots, x^n)$. По теореме 89.3 о существовании неявной функции существует окрестность точки $x_0 = (u_0, v_0)$ и непрерывно дифференцируемые функции $\varphi^j(v)$ ($1 \leq j \leq m$) такие, что $x^j = \varphi^j(v)$ ($1 \leq j \leq m$) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f^1(u, v) = 0, \\ \dots \\ f^m(u, v) = 0, \end{cases}$$

то есть $f^j(\varphi^1(v), \dots, \varphi^m(v), v) = 0$ ($1 \leq j \leq m$) в некоторой окрестности точки $v_0 = (x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$. Подставив $\varphi^j(v)$ вместо x^j в функцию f , получим функцию $\Phi(v) \equiv f(\varphi^1(v), \dots, \varphi^m(v), v)$. Теперь сформулируем необходимое условие локально-го относительного экстремума.

3. Если $x_0 = (u_0, v_0)$ — точка относительного экстремума функции f , то $v_0 = (x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$ — точка абсолютного (в смысле 84.1) локального экстремума для Φ .

¶ Пусть для определённости $x_0 = (u_0, v_0)$ — точка относительного локального максимума для f . Тогда для точек v , достаточно близких к v_0 , вектор $(\varphi^1(v), \dots, \varphi^m(v), v) \in \tilde{\Omega}$, так как $f^j(\varphi^1(v), \dots, \varphi^m(v), v) = 0$ ($1 \leq j \leq m$). Поэтому

$$\Phi(v) = f(\varphi^1(v), \dots, \varphi^m(v), v) \leq f(\varphi^1(v_0), \dots, \varphi^m(v_0), v_0) = \Phi(v_0). \quad \square$$

§91. Метод Лагранжа

1. Изложенный выше метод выявления “подозрительных” на локальный относительный экстремум точек на практике часто малоэффективен, так как он связан с нахождением функций в явном виде. Более употребителен Метод Лагранжа, который состоит в следующем:

- 1) находится область $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : f^1(x) = \dots = f^m(x) = 0, \text{ Rg} \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^k}(x) \right] = m\}$,
- 2) вводится вспомогательная функция $F(x) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j f^j(x)$,
- 3) системы уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x^k}(x) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(x) = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (1)$$

$$f^j(x) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (2)$$

решаются совместно относительно $n + m$ неизвестных $x^1, \dots, x^n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Тогда:

2. Если x_0 — точка относительного локального экстремума, то найдутся такие $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m$, что для точки $(x_0^1, \dots, x_0^n, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m)$ удовлетворяются системы (1) — (2).

¶ Система (2) удовлетворяется, так как $x_0 \in \tilde{\Omega}$. Для проверки равенств (1) покажем сначала, что если x_0 — точка локального относительного экстремума, то

$$df(x_0)(h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) h^k = 0 \quad (3)$$

для любого вектора $h = (h^1, \dots, h^n)$, координаты которого удовлетворяют линейным связям

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(x_0) h^k = 0, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (4)$$

В обозначениях §90 $v_0 = (x_0^{m+1}, \dots, x_0^n)$ — точка абсолютного локального экстремума для функции $\Phi(v)$, и в силу 84.2

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^s}(v_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^s}(v_0) + \frac{\partial f}{\partial x^s}(x_0) = 0, \quad m+1 \leq s \leq n.$$

В силу равенств $x^j = \varphi^j(v)$ ($1 \leq j \leq m$) зависимые координаты h^j ($1 \leq j \leq m$) вектора h равны $h^j = dx^j = \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^s}(v_0) h^s$ ($1 \leq j \leq m$), что эквивалентно (4). Следовательно,

$$\begin{aligned} df(x_0)h &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) h^k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) \left(\sum_{s=m+1}^n \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^s}(v_0) h^s \right) + \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial f}{\partial x^s}(x_0) h^s \\ &= \sum_{s=m+1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^s}(x_0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^s}(v_0) \right\} h^s = \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x^s}(v_0) h^s = 0. \end{aligned}$$

Равенства (3)–(4) означают, что если вектор h ортогонален всем векторам $k_j = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f^j}{\partial x^n}(x_0) \right)$, $1 \leq j \leq m$, то $\langle h, k \rangle = 0$, где $k = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right)$. Следовательно (см. 62.9), вектор k есть линейная комбинация векторов k_j , то есть существуют $\tilde{\lambda}_j$ такие, что $k = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j k_j$, или $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(x_0)$. Утверждение доказано. \square

3. Далее, “подозрительные” на экстремум точки нужно исследовать с помощью известной квадратичной формы для вспомогательной функции F . В силу (1) $\frac{\partial F}{\partial x^k}(x_0) = 0$ ($1 \leq k \leq n$). Поэтому, полагая $b_{jk} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^k}(x_0)$, имеем

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n b_{jk} (x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k) + o(\|x - x_0\|^2) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Если квадратичная форма $b(h) = \sum_{j,k=1}^n b_{jk} h^j h^k$, например, строго положительно определена, то x_0 — точка локального минимума для F , а значит, и для f !

4. З а м е ч а н и е. Исследование $b(h)$ на определённости следует проводить с учётом (4); смещения h^j ($1 \leq j \leq m$) теперь зависят от смещений h^s ($m+1 \leq s \leq n$): форма $b(h)$ может не быть определённой, если считать все h^j ($1 \leq j \leq n$) независимыми, но при учёте связей (4) она может оказаться определённой.

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

§92. Метрическое пространство

1. Пусть M — множество. Функция $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ называется *метрикой* в M , если она обладает свойствами:

$$(I) \quad d(x, y) \geq 0; \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(II) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(III) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

где $x, y, z \in M$ произвольны. Множество M с фиксированной в нём метрикой d называется *метрическим пространством*.

2. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Множество $B_\varepsilon(x) \equiv \{y \in M : d(y, x) < \varepsilon\}$ называется *открытым шаром* радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x . Через $B_\varepsilon[x]$ будем обозначать множество $\{y \in M : d(y, x) \leq \varepsilon\}$. Множество $X (\subset M)$ называется *открытым*, если $\forall x \in X \exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \subset X)$. Основные свойства открытых множеств:

3. \emptyset, M — открытые множества.

4. Если X_1, \dots, X_n открыты, то $\bigcap_{i=1}^n X_i$ открыто.

5. Если $(X_i)_{i \in I}$ — произвольное семейство открытых множеств, то $\bigcup_{i \in I} X_i$ открыто.

6. З а м е ч а н и е. Для любых двух различных точек x, y в метрическом пространстве существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.

П р и м е р ы. 7. Пусть E — евклидово пространство. Функция $d(x, y) = \|x - y\|$ ($x, y \in E$) является метрикой в E . Соответствующее понятие открытого множества совпадает с введённым в 63.1 понятием открытого множества в евклидовом пространстве.

8. *Гильбертово пространство* ℓ^2 . Точками этого пространства являются комплексные последовательности $x = (x^1, x^2, \dots)$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^2 < +\infty$. Из неравенства Шварца 41.4 следует, что функция

$$d(x, y) \equiv \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x^n - y^n|^2 \right]^{1/2} \quad (x = (x^1, x^2, \dots), \quad y = (y^1, y^2, \dots) \in \ell^2)$$

является метрикой в ℓ^2 .

9. *Дискретная метрика* в множестве M задаётся равенством

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

В этом случае M называется *дискретным метрическим пространством*. В таком пространстве $B_\varepsilon(x) = M$, если $\varepsilon > 1$ и $B_\varepsilon(x) = \{x\}$, если $\varepsilon \leq 1$.

10. В метрическом пространстве естественно определяется понятие сходимости. Последовательность (x_n) элементов метрического пространства называется *сходящейся* к элементу x ($x_n \rightarrow x$), если $\lim_n d(x_n, x) = 0$. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N (d(x_n, x_m) < \varepsilon).$$

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна (!!). Однако обратное уже не всегда верно. Метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*.

У п р а ж н е н и я. **11.** Открытый шар $B_\varepsilon(x)$ в метрическом пространстве — открытое множество.

12. Пусть M — часть пространства ℓ^2 , состоящая из всех последовательностей $x = (x^1, x^2, \dots)$, у которых $x^i \neq 0$ лишь для конечного числа индексов i . Приведите пример фундаментальной последовательности в M , которая в M не сходится (метрика в M заимствована из ℓ^2).

13. Дискретное метрическое пространство полно.

14. Может ли в метрическом пространстве шар большего радиуса лежать строго внутри шара меньшего радиуса?

§93. Топологическое пространство

1. Как мы уже видели, основные понятия математического анализа (предел функции, непрерывность) могут быть сформулированы в терминах окрестностей. Определение окрестности точки до сих пор связывалось с понятием расстояния. Дальнейшее развитие анализа в бесконечномерных пространствах естественно поставило на повестку дня создание концепции пространства, в котором с каждой точкой связывалась бы система окрестностей, не обязательно связанная с каким-либо расстоянием. Это привело к понятию топологического пространства. Не имея здесь возможности углубляться в историю вопроса, отметим, что выбор аксиом топологического пространства, был результатом длительных поисков.

При определении топологического пространства удобно за первичное брать понятие открытого множества. Однако в приложениях часто удобнее задавать топологию, исходя из понятия окрестности точки. Ниже мы изложим оба подхода.

2. Пусть E — множество и указана система \mathcal{T} частей множества E , обладающая свойствами:

$$(I) \quad \emptyset, E \in \mathcal{T},$$

$$(II) \quad \text{если } X_1, \dots, X_n \in \mathcal{T}, \text{ то } \bigcap_{i=1}^n X_i \in \mathcal{T},$$

$$(III) \quad \text{если } (X_i)_{i \in I} \text{ — произвольное семейство из } \mathcal{T}, \text{ то } \bigcup_{i \in I} X_i \in \mathcal{T}.$$

В этом случае система \mathcal{T} называется *топологией* в E , а элементы системы \mathcal{T} называются *открытыми множествами*. Множество E с фиксированной в нём топологией \mathcal{T} называется *топологическим пространством* и обозначается (E, \mathcal{T}) .

Читатель, по-видимому, уже обратил внимание на то, что за аксиомы топологического пространства взяты основные свойства открытых множеств в метрическом пространстве (см. 92.2).

Примеры 3. Система всех открытых подмножеств метрического пространства является топологией. В этом случае говорят, что топология определяется метрикой.

4. Семейство всех подмножеств E является топологией в E . Эта топология называется *дискретной*. Отметим, что дискретная топология совпадает с топологией, определяемой дискретной метрикой. Топология $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$ называется *тривиальной* топологией в E .

§94. Свойства окрестностей

1. Пусть \mathcal{T} — топология в E . Множество $V (\subset E)$ называется *окрестностью точки* $x \in E$, если $\exists U \in \mathcal{T} (x \in U \subset V)$. Множество $X (\subset E)$ открыто тогда X — окрестность каждой своей точки (!).

Семейство всех окрестностей точки x в топологическом пространстве (E, \mathcal{T}) обозначим через $\mathfrak{b}(x)$. Оно обладает свойствами (!):

2. “ $U \in \mathfrak{b}(x), U \subset V$ ” $\Rightarrow V \in \mathfrak{b}(x)$,
3. $U, V \in \mathfrak{b}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{b}(x)$,
4. $\forall U \in \mathfrak{b}(x) (x \in U)$,
5. $\forall U \in \mathfrak{b}(x) \exists V \in \mathfrak{b}(x) \forall y \in V (U \in \mathfrak{b}(y))$.

Эти свойства полностью характеризуют топологию \mathcal{T} :

Т е о р е м а. Пусть каждому элементу x множества E поставлено в соответствие некоторое семейство $\mathfrak{b}(x)$ частей E , обладающее свойствами 2–5. Тогда в E существует единственная топология \mathcal{T} , для которой $\mathfrak{b}(x)$ служит системой всех окрестностей точки x (при любом $x \in E$).

¶ Семейство $\mathcal{T} = \{U \subset E : \forall x \in U (U \in \mathfrak{b}(x))\}$ является топологией в E (!). Обозначим через $\mathfrak{B}(x)$ семейство всех окрестностей точки x в этой топологии, то есть

$$\mathfrak{B}(x) = \{V \subset E : \exists U \in \mathcal{T} (x \in U \subset V)\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{B}(x)$. В силу свойства 2 $\mathfrak{B}(x) \subset \mathfrak{b}(x)$. Справедливо и обратное включение. Пусть $V \in \mathfrak{b}(x)$ и $U = \{y \in E : V \in \mathfrak{b}(y)\}$. Установим, что

$$(a) x \in U, \quad (б) U \subset V, \quad (в) U \in \mathcal{T}.$$

Это и будет означать, что $V \in \mathfrak{B}(x)$. (a) очевидно.

(б): $y \in U \Rightarrow V \in \mathfrak{b}(y) \Rightarrow y \in V$ согласно свойству 4.

(в): пусть $y \in U$. Тогда $y \in V$ и согласно свойству 5 $\exists W \in \mathfrak{b}(y) \forall z \in W (V \in \mathfrak{b}(z))$. Отметим, что $W \subset V$. Действительно, $z \in W \Rightarrow V \in \mathfrak{b}(z) \Rightarrow z \in U$ (см. определение U); тогда в силу свойства 2 $U \in \mathfrak{b}(y)$. Таким образом, (см. подчёркнутое) U является окрестностью каждой своей точки в топологии \mathcal{T} , и потому $U \in \mathcal{T}$. □

7. Система $\mathcal{F} (\subset \mathfrak{b}(x))$ называется *базисом окрестностей точки* x (или *фундаментальной системой окрестностей точки* x), если $\forall U \in \mathfrak{b}(x) \exists V \in \mathcal{F} (V \subset U)$.

8. З а м е ч а н и е. В приложениях базис окрестностей точки играет роль легко обозримой системы, по которой восстанавливается вся её система окрестностей: если \mathcal{F} — базис окрестностей точки x , то $\mathfrak{b}(x) = \{U \subset E : \exists V \in \mathcal{F} (V \subset U)\}$.

П р и м е р ы. 9. В дискретном топологическом пространстве одноточечное множество $\{x\}$ является базисом окрестностей точки x .

10. Система шаров $\{B_{1/n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — базис окрестностей точки x в метрическом пространстве.

11. Пусть в одном и том же множестве E заданы две топологии \mathcal{T} и \mathcal{T}' . Говорят, что топология \mathcal{T}' сильнее топологии \mathcal{T} , если $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Другими словами, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ тогда для любого $x \in E$ $\mathfrak{b}(x) \subset \mathfrak{b}'(x)$, где $\mathfrak{b}(x)$ и $\mathfrak{b}'(x)$ — системы всех окрестностей точки x в топологиях \mathcal{T} и \mathcal{T}' соответственно. В частности, дискретная топология в множестве — самая сильная, а тривиальная топология — самая слабая. Говорят, что топология \mathcal{T}' строго сильнее топологии \mathcal{T} , если $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$.

§95. Рабочие понятия

1. Пусть E — топологическое пространство и $A \subset E$. Множество A называется *замкнутым*, если $A^c \equiv E \setminus A$ открыто. Класс всех замкнутых множеств обладает свойствами (!!):

- (I) \emptyset, E замкнуты,
- (II) объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество,
- (III) пересечение произвольного семейства замкнутых множеств — замкнутое множество.

2. Точка x называется *внутренней точкой* A , если $A \in \mathfrak{b}(x)$. Множество всех внутренних точек называется *внутренностью* множества A и обозначается A° . *Внешностью* множества A называется множество A^{c° (внутренность дополнения A). Отметим некоторые полезные свойства внутренности:

- (i) A° — наибольшее открытое множество, содержащееся в A ;
- (ii) A открыто тогда $A = A^\circ$;
- (iii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ ($A, B \subset E$).

3. Говорят, что x — *точка прикосновения* множества A , если $\forall U \in \mathfrak{b}(x) (U \cap A \neq \emptyset)$. Множество всех точек прикосновения A называется *замыканием* A и обозначается A^- . Имеют место свойства:

- (j) A^- — наименьшее замкнутое множество, объемлющее множество A ,
- (jj) A замкнуто тогда $A = A^-$,
- (jjj) $A^{-c} = A^{c^\circ}$, $A^{c^\circ c} = A^{c-}$,
- (jv) $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$ ($A, B \subset E$).

¶ 1-е равенство в (jjj) справедливо в силу эквивалентностей:

$x \in A^{-c} \Leftrightarrow x \in E \setminus A^- \Leftrightarrow \exists U \in \mathfrak{b}(x) (U \cap A = \emptyset) \Leftrightarrow A^c \in \mathfrak{b}(x) \Leftrightarrow x \in A^{co}$.
(jv) справедливо в силу выкладки (с учётом указанных выше свойств):

$$\begin{aligned} (A \cup B)^- &= (A \cup B)^{-cc} = (A \cup B)^{coc} = (A^c \cap B^c)^{oc} = (A^{co} \cap B^{co})^c \\ &= (A^{-c} \cap B^{-c})^c = A^- \cup B^-. \quad \square \end{aligned}$$

4. Точка x называется *предельной точкой* множества A , если $\forall U \in \mathfrak{b}(x) (\check{U} \cap A \neq \emptyset)$, где $\check{U} \equiv U \setminus \{x\}$ $\check{\sim}$ -окрестность точки x . Точка x называется *граничной точкой* A , если x является точкой прикосновения множеств A и A^c одновременно. Множество всех граничных точек называется *границей* A и обозначается A^Γ . Таким образом, $A^\Gamma = A^- \cap A^{c-}$.

5. Пусть A, B — подмножества топологического пространства E . Говорят, что A *плотно относительно* B , если $B \subset A^-$ (то есть каждая точка из B является точкой прикосновения для A). В частности, A называется *плотным* в E , если оно плотно относительно E ; в этом случае $A^- = E$. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно обладает счётным плотным подмножеством.

Примеры. 6. \mathbb{Q} плотно в \mathbb{R} .

7. Множество всех элементов вида $x = (x^1, \dots, x^n, 0, 0, \dots)$, то есть элементов, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля, плотно в ℓ^2 .

Упражнение. 8. Если A открыто, а B произвольно, то $A \cap (B^-) \subset (A \cap B)^-$.

9. Множества A° , A^{co} , A^Γ попарно не пересекаются, причём $E = A^\circ \cup A^{co} \cup A^\Gamma$.

10. $(A \cup B)^\Gamma \subset A^\Gamma \cup B^\Gamma$, $(A \cap B)^\Gamma \subset A^\Gamma \cup B^\Gamma$, $(A \setminus B)^\Gamma \subset A^\Gamma \cup B^\Gamma$.

11. $A \subset A^\circ \cup A^\Gamma$.

12. Пространство ℓ^2 сепарабельно.

13. Доказать, что в метрическом пространстве $B_r(x)^- \subset B_r[x]$. Возможно ли строгое включение?

§96. Непрерывные отображения

1. Пусть E, F — топологические пространства. Отображение $f : E \rightarrow F$ называется *непрерывным в точке* $x \in E$, если

$$\forall V \in \mathfrak{b}(f(x)) \exists U \in \mathfrak{b}(x) (f(U) \subset V).$$

2. Пусть $f : E \rightarrow F$ — отображение, $x \in E$ и \mathcal{F} — базис окрестностей точки $f(x)$. Следующие условия эквивалентны:

(а) f непрерывно в x ,

(б) $f^{-1}(V) \in \mathfrak{b}(x)$ для любого $V \in \mathfrak{b}(f(x))$,

(в) $f^{-1}(W) \in \mathfrak{b}(x)$ для любого $W \in \mathcal{F}$.

3. З а м е ч а н и е. Известное определение непрерывности функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}$ на языке “ $\varepsilon - \delta$ ” согласуется с приведённым выше: в качестве базиса окрестностей точки $f(x)$ нужно взять систему $\mathcal{F} = \{(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$.

4. [Непрерывность сложной функции]. Пусть $f : E \rightarrow F$ — отображение, непрерывное в точке $x \in E$, а $g : F \rightarrow G$ непрерывно в точке $f(x)$. Тогда отображение $g \circ f : E \rightarrow G$ непрерывно в x .

¶ $W \in \mathfrak{b}(g(f(x))) \Rightarrow g^{-1}(W) \in \mathfrak{b}(f(x)) \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathfrak{b}(x)$. □

5. Отображение $f : E \rightarrow F$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in E$.

6. Пусть (E, \mathcal{T}) , (E', \mathcal{T}') — топологические пространства и $f : E \rightarrow E'$ — отображение. Следующие условия эквивалентны:

(а) f непрерывно,

(б) полный прообраз всякого открытого множества из E' открыт в E , то есть $f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$,

(в) полный прообраз всякого замкнутого множества из E' замкнут в E .

¶ Очевидно, (б) \Leftrightarrow (в), (б) \Rightarrow (а). Покажем, что (а) \Rightarrow (б). Пусть $V \in \mathcal{T}'$. Тогда $x \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow V \in \mathfrak{b}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathfrak{b}(x)$. Теперь $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ в силу произвольности x . □

З а м е ч а н и я.

7. Образ открытого (замкнутого) множества при непрерывном отображении может не быть открытым (соответственно замкнутым) множеством.

8. Пусть (E, \mathcal{T}) , (E', \mathcal{T}') — топологические пространства и $f : E \rightarrow E'$ непрерывно. Если топологии $\tilde{\mathcal{T}}$ в E и $\tilde{\mathcal{T}}'$ в E' таковы, что $\tilde{\mathcal{T}} \supset \mathcal{T}$, $\tilde{\mathcal{T}}' \subset \mathcal{T}'$, то данное отображение является непрерывным отображением $(E, \tilde{\mathcal{T}})$ в $(E', \tilde{\mathcal{T}}')$. В частности, если \mathcal{T} дискретна или \mathcal{T}' тривиальна, то любое отображение $f : E \rightarrow E'$ непрерывно.

9. П р и м е р . Пусть (M, d) — метрическое пространство и $a \in M$ фиксировано. Тогда отображение $x \rightarrow d(x, a)$ ($x \in M$) — непрерывное отображение M в \mathbb{R} .

У п р а ж н е н и я (E — топологическое пространство).

10. Отображение $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in E : f(x) < \lambda\}$ открыто в E .

11. Если отображение $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно в $a \in E$, то f ограничено в некоторой окрестности точки a .

12. Если $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в точке $a \in E$, то в точке a непрерывны также отображения $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (если $g(a) \neq 0$).

§97. Гомеоморфизмы

1. Топологические пространства (E, \mathcal{T}) и (E', \mathcal{T}') называются *гомеоморфными*, если существует непрерывная биекция $f : E \rightarrow E'$ такая, что обратное отображение также непрерывно. Указанное отображение f называется *гомеоморфизмом*. Свойства топологического пространства, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, называются *топологическими*. Эти свойства являются основным объектом внимания в топологии. Гомеоморфные топологические пространства являются топологически эквивалентными (неразличимыми).

Примеры 2. Стереографическая проекция сферы (в \mathbb{R}^3) с удалённым северным полюсом на плоскость \mathbb{R}^2 — гомеоморфизм.

3. Сепарабельность — топологическое свойство.

4. Дискретность пространства — топологическое свойство.

5. Считается (вследствие геометричности нашего мышления), что хорошо устроенными являются евклидовы пространства \mathbb{R}^n . Поэтому топологические пространства, возникающие в приложениях (не все, конечно), стараются свести посредством гомеоморфных преобразований к евклидовым. Иногда это удаётся сделать лишь локально.

Будем говорить, что топологическое пространство E *локально гомеоморфно* евклидову пространству \mathbb{R}^n , если каждая точка $x \in E$ обладает окрестностью, гомеоморфной \mathbb{R}^n . Топологические пространства, локально гомеоморфные евклидовым пространствам, являются предметом изучения целого раздела топологии — топологии многообразий.

6. Пример. Окружность $S(\subset \mathbb{R}^2)$ локально гомеоморфна \mathbb{R} (!!). Однако глобального гомеоморфизма между этими топологическими пространствами нет. Более того, S не гомеоморфна никакой части \mathbb{R} (топологии на S и на частях \mathbb{R} индуцированы соответствующими топологиями из \mathbb{R}^2 и \mathbb{R} (см. ниже 99.2)):

7. *Не существует непрерывного инъективного отображения окружности $S(\subset \mathbb{R}^2)$ в \mathbb{R} .*

¶ Пусть отображение $\delta : S \rightarrow S$ переводит точки S в точки, диаметрально противоположные, а отображение $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Утверждение теперь следует из фактов:

(а) отображение $g \equiv f - f \circ \delta$ непрерывно,

(б) $g \circ \delta = -g$,

(в) если f — инъекция, то $g(s) \neq 0$ ($s \in S$) и, следовательно, в точках s и $\delta(s)$ функция g принимает значения разных знаков,

(г) так как S линейно связно, из (а), (в) и 70.4 следует, что существует $t \in S$ такое, что $g(t) = 0$, что противоречит (в). □

У п р а ж н е н и я.

8. Открытый шар $B_1(\theta)$ в \mathbb{R}^n гомеоморфен всему пространству \mathbb{R}^n . (Искомый гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^n \rightarrow B_1(\theta)$ может быть задан формулой $f(x) = (1 + \|x\|)^{-1}x$ ($x \in \mathbb{R}^n$).) □

9. Следующие свойства являются топологическими: (а) конечность пространства, (б) существование неподвижной точки у каждого непрерывного отображения топологического пространства в себя.

10. Полнота метрического пространства (92.10) — не топологическое свойство (в классе метрических пространств).

§98. Топология, порождённая семейством множеств

В этом и нескольких последующих параграфах мы рассмотрим некоторые типичные способы задания топологий.

1. Пусть задано некоторое семейство σ частей множества E и требуется задать в E топологию так, чтобы все множества из σ были открытыми. При подобной постановке задачи ответ тривиален: нужному требованию удовлетворяет дискретная топология. Можно ли, однако, указать наиболее “экономную” топологию среди тех, в которых множества из σ открыты? Сделаем сначала полезное замечание (!!):

2. Пусть $(T_i)_{i \in I}$ — семейство топологий в множестве E . Тогда $T = \bigcap_{i \in I} T_i$ — топология в E .

Топология, определённая в этом утверждении, называется *пересечением топологий* T_i ($i \in I$).

3. Теперь ответим на поставленный выше вопрос. Семейство топологий T таких, что $\sigma \subset T$, не пусто (например, в это семейство входит дискретная топология), и пересечение $T_0 = \bigcap_{\sigma \subset T} T$ является наименьшей топологией, в которой множества из системы σ открыты; T_0 называется *топологией, порождённой системой σ* , а σ — *системой образующих топологии T_0* .

4. Укажем более конструктивный метод построения T_0 по системе σ . Сначала образуется система σ' множеств, являющихся пересечением конечных семейств из системы σ . Тогда семейство всевозможных объединений множеств из σ' (с присоединёнными множествами E и \emptyset) является искомой топологией T_0 (!!).

5. Система γ открытых подмножеств топологического пространства E называется *базой топологии*, если всякое открытое множество в E является объединением множеств из γ . Например, в приведённой выше конструкции σ' является базой топологии T_0 . Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *2-й аксиоме счётности*, если оно обладает счётной базой.

П р и м е р ы. 6. Система всех одноточечных подмножеств множества E является базой дискретной топологии в E .

7. Система всех ограниченных интервалов с рациональными концами является базой топологии числовой прямой. Таким образом, \mathbb{R} удовлетворяет 2-й аксиоме счётности.

У п р а ж н е н и я. 8. Является ли топологическим свойство топологии обладать счётной базой?

9. Евклидово пространство \mathbb{R}^n обладает счётной базой.

10. Топология в ℓ^2 , определённая метрикой (см. 92.8), удовлетворяет 2-й аксиоме счётности.

§99. Прообраз топологии

1. Пусть E — множество (без топологии) и (E', T') — топологическое пространство. Требуется задать в E топологию так, чтобы было непрерывно заданное отображение $f : E \rightarrow E'$. Разумеется, указанному условию удовлетворяет дискретная топология в E . Содержательной является задача задания в E наиболее “экономной”

топологии среди всех топологий, для которых отображение f непрерывно. Рутинная проверка показывает, что слабейшей из всех топологий в E , относительно которых отображение f непрерывно, является топология $f^{-1}(T') = \{f^{-1}(X') : X' \in T'\}$ — прообраз топологии T' относительно отображения f .

2. П р и м е р. *Индукцированная топология.* Пусть E — топологическое пространство и $X \subset E$. Слабейшая среди всех топологий в X , относительно которых непрерывно тождественное вложение $i_X : X \rightarrow E$, называется *индуцированной* (из E) топологией в X . Если T — топология в E , то индуцированная топология T_X в X представляет собой семейство $\{U \cap X : U \in T\}$. Топологическое пространство (X, T_X) называется *подпространством* пространства (E, T) .

3. Пусть (X, T_X) — подпространство пространства (E, T) . Всякое множество $A \subset X$, открытое (замкнутое) в X , открыто (соответственно замкнуто) в E тогда X открыто (соответственно замкнуто) в E .

4. Описанную выше конструкцию прообраза топологии можно обобщить на случай произвольного семейства отображений. Пусть E — множество (без топологии) и $(E_i, T_i)_{i \in I}$ — семейство топологических пространств. Наиболее экономная топология в E , относительно которой непрерывны фиксированные отображения $f_i : E \rightarrow E_i$ ($i \in I$), характеризуется следующим утверждением:

5. Топология в E с системой образующих $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(T_i)$ является слабейшей среди топологий в E , относительно которых непрерывны все отображения f_i ($i \in I$).

6. П р и м е р. *Произведение топологических пространств.* Пусть $(E_i, T_i)_{i \in I}$ — семейство топологических пространств и $E = \prod_{i \in I} E_i$. Для каждого индекса $j \in I$ рассмотрим проектирование $p_j : E \rightarrow E_j$, заданное формулой $p_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$. Определим в E топологию T как слабейшую из топологий, относительно которых все p_j ($j \in I$) непрерывны; топологическое пространство (E, T) называется *произведением топологических пространств* (E_i, T_i) , а топология T — *произведением топологий* $(T_i)_{i \in I}$. Топология T порождается системой $\sigma = \{p_j^{-1}(U)\}_{j \in I, U \in T_j}$, и в согласии с 98.4–5 её базой является система σ' , в которую входят множества вида $\prod_{i \in I} U_i$, где $U_i \in T_i$ и $U_i = E_i$ для всех i , кроме конечного их числа. Если, в частности, $I = \{1, \dots, n\}$, то произведение топологий в $E = E_1 \times \dots \times E_n$ имеет базу $\{U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \in T_i (i = 1, \dots, n)\}$. Например, топология евклидова пространства \mathbb{R}^n — топологическое произведение n экземпляров числовых прямых \mathbb{R} .

У п р а ж н е н и я. **7.** Пусть X, Y — части топологического пространства (E, T) и $X \subset Y$. Тогда замыкание X в топологии T_Y есть $X^- \cap Y$, где X^- — замыкание X в топологии T .

8. В условиях п. 7 топология, индуцированная в X из E , совпадает с топологией, индуцированной в X из Y как подпространства E .

9. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Покажите, что отображение $\{x, y\} \rightarrow d(x, y)$ пространства $M \times M$ (как топологического произведения пространства M на себя) в \mathbb{R} непрерывно.

10. Пусть $(E, T), (E', T')$ — топологические пространства. Биекция $f : E \rightarrow E'$ является гомеоморфизмом тогда выполнено одно из условий: (а) T — слабейшая

из топологий в E , относительно которых f непрерывно, (б) \mathcal{T}' — сильнейшая из топологий в E' , относительно которых f непрерывно.

§100. Финальная топология

1. Пусть E — множество (без топологии) $(E_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ — семейство топологических пространств и $f_i : E_i \rightarrow E$ ($i \in I$) — заданные отображения. Если E наделить тривиальной топологией, то все эти отображения будут непрерывны. Содержательной является задача определения сильнейшей (или наибольшей) топологии в E среди всех топологий, относительно которых все f_i были бы непрерывными. Искомой является топология $\mathcal{T} = \{U \subset E : f_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i \text{ при всех } i \in I\}$ (!!). Она называется *финальной топологией*, порождённой семейством $(f_i)_{i \in I}$.

2. П р и м е р. *Фактор-топология.* Пусть (E, \mathcal{T}) — топологическое пространство и R — отношение эквивалентности в E . Фактор-топологией в E/R (обозначается \mathcal{T}/R) называется финальная топология, порождённая канонической сюръекцией $\varphi : E \rightarrow E/R$. Итак, $\mathcal{T}/R = \{U \subset E/R : \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$. Пара $(E/R, \mathcal{T}/R)$ называется *фактор-пространством*.

3. Пусть E, F — топологические пространства, R — отношение эквивалентности в E и $\varphi : E \rightarrow E/R$ — каноническая сюръекция. Отображение $f : E/R \rightarrow F$ непрерывно тогда и только тогда непрерывно отображение $g = f \circ \varphi$.

¶ Если f непрерывно, то $g = f \circ \varphi$ непрерывно согласно 96.4. Обратно, пусть g непрерывно и V — произвольное открытое множество в F . Тогда $\varphi^{-1}(f^{-1}(V)) = g^{-1}(V)$ открыто в E и по определению фактор-топологии $f^{-1}(V)$ открыто в E/R , то есть f непрерывно. □

Из доказанного утверждения непосредственно следует:

4. Пусть E, F — топологические пространства, R — отношение эквивалентности в E . Существует естественная биекция между непрерывными отображениями из E/R в F и непрерывными отображениями из E в F , постоянными на каждом смежном классе отношения эквивалентности R .

5. П р и м е р. Отношение “ $x - y \in \mathbb{Z}$ ” в \mathbb{R} является отношением эквивалентности. Соответствующее фактор-пространство обозначается \mathbb{T} и называется одномерным тором. Согласно п. 4 существует естественная биекция между непрерывными функциями периода 1 на \mathbb{R} и непрерывными функциями на торе \mathbb{T} .

6. У п р а ж н е н и е. Одномерный тор гомеоморфен окружности.

§101. Сходимость в топологических пространствах

1. Как мы видели, основные понятия математического анализа в \mathbb{R}^n (предел отображения, непрерывность, дифференцируемость и т.д.) могут быть описаны в терминах сходящихся последовательностей векторов. Инструментом последовательностей можно с успехом работать и в метрических пространствах. Однако в общих топологических пространствах последовательностей уже недостаточно (см. ниже упр. 11). Для построения инструмента сходимости в общих топологических пространствах познакомимся с обобщением понятия последовательности.

2. Пусть ρ — бинарное отношение в множестве A . Будем называть ρ *иерархией*, если $\forall x, y \in A \exists z \in A (\rho(z, x), \rho(z, y))$. Рефлексивная транзитивная иерархия

ρ называется *отношением направленности* (или *направлением*). В этом случае будем писать $y \ll x$ вместо $\rho(x, y)$. Не следует путать это отношение с отношением порядка!

3. Пусть E — множество и \ll — направление в множестве A . Всякая функция $x : A \rightarrow E$ называется *сетью* (или *обобщённой последовательностью*) в E . Сеть (по аналогии с обычной последовательностью) обозначается также $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Для сети $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ множество $X (\subset E)$ назовём *ловушкой*, если $\exists \alpha \in A \forall \beta \in A (\alpha \ll \beta \Rightarrow x_\beta \in X)$, и *кормушкой*, если $\forall \alpha \in A \exists \beta \in A (\alpha \ll \beta, x_\beta \in X)$.

4. Пусть E — топологическое пространство и $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ — сеть в E . По определению эта сеть *сходится* к точке $x \in E$ (пишут $x_\alpha \rightarrow x$ или $x = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$), если каждая окрестность точки x является ловушкой этой сети. Точку x назовём *предельной точкой сети* $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, если каждая окрестность точки x является кормушкой этой сети.

5. П р и м е р. Пусть \mathcal{F} — базис окрестностей точки x в топологическом пространстве E и $U \ll V$ ($U, V \in \mathcal{F}$) означает, что $V \subset U$. Тогда \ll — направление в \mathcal{F} , и всякая функция выбора (прил. III.7) $U \rightarrow x_U \in U$ ($U \in \mathcal{F}$) — сеть в E , сходящаяся к x .

6. Пусть E — топологическое пространство и $X \subset E$.

(а) x_0 — предельная точка множества X тогда существует сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X \setminus \{x_0\}$, сходящаяся к x_0 .

(б) $x_0 \in X^-$ тогда существует сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$, сходящаяся к x_0 .

¶ (а). Пусть x_0 — предельная точка множества X . Возьмём в качестве A какой-либо базис \mathcal{F} окрестностей точки x_0 . По предположению для любой окрестности $U \in \mathcal{F} : U \cap (X \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Тогда функция выбора для семейства $\{U \cap (X \setminus \{x_0\})\}_{U \in \mathcal{F}}$ — искомая сеть $x : \mathcal{F} \rightarrow E$. В обратную сторону утверждение очевидно; (а) \Rightarrow (б). (!) \square

7. Топологические пространства, в которых для описания сходимости достаточно последовательностей, характеризуются требованием: каждая точка пространства обладает счётной фундаментальной системой окрестностей (счётным базисом окрестностей). Такие пространства называются топологическими пространствами с 1-й аксиомой счётности.

8. В топологическом пространстве с 1-й аксиомой счётности точка x_0 — предельная для множества X тогда существует последовательность $(x_n) \subset X \setminus \{x_0\}$, сходящаяся к точке x_0 .

У п р а ж н е н и я. 9. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится абсолютно тогда сходится сеть $(\sum_{n \in \alpha} x_n)_{\alpha \in A}$, где A — семейство всех конечных подмножеств множества \mathbb{N} , направленное по включению.

10. Если топологическое пространство обладает 1-й (2-й) аксиомой счётности, то всякое его подпространство обладает 1-й (соответственно 2-й) аксиомой счётности.

11. Пусть $2 \equiv \{0, 1\}$ — двухточечное множество, снабжённое дискретной топологией, $2^{\mathbb{R}}$ — произведение \mathbb{R} экземпляров топологического пространства 2 (см.

99.6). Таким образом, точками $2^{\mathbb{R}}$ являются функции $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$. Пусть A — множество всех функций ω , у которых $\omega^{-1}(\{0\})$ конечно, а ω_0 определена условием $\omega_0(t) = 0$ ($t \in \mathbb{R}$). Покажите, что $\omega_0 \in A^+$, но не существует ни одной последовательности $\omega_n \in A$ такой, что $\omega_n \rightarrow \omega_0$ в $2^{\mathbb{R}}$.

§102. Отделимые топологические пространства

1. Как известно, сходящаяся последовательность векторов в евклидовом пространстве имеет единственный предел. В общих топологических пространствах сеть может сходить к нескольким точкам. Например, в пространстве с тривиальной топологией каждая сеть сходится к любой точке пространства. Чтобы устранить неприятности такого сорта, на топологические пространства обычно накладывают требование, обеспечивающее единственность предела. Топологическое пространство называется *отделимым*, если каждые две различные точки пространства обладают непересекающимися окрестностями. Например, каждое метрическое пространство отделимо (см. 92.6).

2. Топологическое пространство отделимо тогда и только тогда, когда каждая сеть в этом пространстве сходится не более, чем к одному пределу.

¶ Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть E не отделимо, то есть существуют точки $x, y \in E$ ($x \neq y$) такие, что $\forall U \in \mathfrak{b}(x) \forall V \in \mathfrak{b}(y) (U \cap V \neq \emptyset)$. Положим $A = \mathfrak{b}(x) \times \mathfrak{b}(y)$ и зададим в A направление: $(U, V) \ll (U', V')$, если $U' \subset U, V' \subset V$. В качестве сети $z : A \rightarrow E$ возьмём какую-либо функцию выбора для $\{U \cap V : U \in \mathfrak{b}(x), V \in \mathfrak{b}(y)\}$. Эта сеть сходится к точкам x и y одновременно. □

У п р а ж н е н и я. 3. Подпространство отделимого пространства отделимо.

4. Если произведение $\prod_{i \in I} E_i$ топологических пространств отделимо, то отделимо каждое пространство E_i .

§103. Предел отображения в точке

1. Пусть E, F — топологические пространства, $X \subset E$ и a — предельная точка множества X . Элемент $y \in F$ называется *пределом отображения* $f : X \rightarrow F$ в точке $a \in E$ (пишут: $y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$), если $\forall U \in \mathfrak{b}(y) \exists V \in \mathfrak{b}(a) (f(V \cap X) \subset U)$.

2. З а м е ч а н и е. Если F отделимое пространство, предел отображения единствен, коль скоро он существует.

3. Пусть $f : E \rightarrow F$ — отображение, $a \in E$ — не изолированная точка. Следующие условия эквивалентны:

(а) f непрерывно в точке a ,

(б) $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

(в) $\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = a$ ($(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ — сеть в E) $\Rightarrow \lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = f(a)$.

¶ (а) \Rightarrow (б). Пусть f непрерывно в a и U — произвольная окрестность точки $f(a)$. Тогда найдётся $V \in \mathfrak{b}(a)$ такая, что $f(V) \subset U$. Тем более $f(V \setminus \{a\}) \subset U$, то есть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

(б) \Rightarrow (в) (!).

(в) \Rightarrow (а). Пусть, например, f не непрерывно в точке $a \in E$. Тогда $\exists U \in \mathfrak{b}(f(a)) \forall V \in \mathfrak{b}(a) (f(V) \not\subset U)$. Определим сеть $x : \mathfrak{b}(a) \rightarrow E$, положив $x_v \in V$, причём $f(x_v) \notin U$ ($V \in \mathfrak{b}(a)$). Тогда $\lim_{V \in \mathfrak{b}(a)} x_v = a$, и в то же время U не является ловушкой сети $(f(x_v))_{v \in \mathfrak{b}(a)}$ в F , то есть (в) не удовлетворяется. \square

§104. Продолжение по непрерывности

1. Пусть f, g — непрерывные отображения топологического пространства E в отдельное пространство F , совпадающие на некоторой плотной в E части X . Тогда $f = g$.

¶ Пусть $a \in E$ и $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ — сеть в X , сходящаяся к a . В силу 103.3 $f(a) = \lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) = \lim_{\alpha \in A} g(x_\alpha) = g(a)$. \square

2. Пусть теперь f — непрерывное отображение плотной в E части X в отдельное пространство F , причём в каждой точке $a \in E$ существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Тогда определено отображение $\tilde{f} : E \rightarrow F$,

$$\tilde{f}(a) = \begin{cases} f(a), & \text{если } a \in X, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & \text{если } a \in E \setminus X. \end{cases}$$

Будет ли \tilde{f} непрерывно? Оказывается, ответ всегда положителен, если F удовлетворяет требованию регулярности.

3. Топологическое пространство называется *регулярным*, если каждая его точка обладает фундаментальной системой замкнутых окрестностей. В частности, всякое метрическое пространство регулярно.

4. Пусть $f : X \rightarrow F$ непрерывно, $X (\subset E)$ плотно в топологическом пространстве E , а F отделимо и регулярно. При этом пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует для всякого $a \in E$. Тогда существует и определено однозначно непрерывное продолжение f на E .

¶ Пусть U — произвольная окрестность точки $\tilde{f}(a)$, где \tilde{f} определено выше. Пусть далее W — замкнутая окрестность точки $\tilde{f}(a)$ такая, что $W \subset U$. Пусть V — открытая окрестность точки a такая, что $f((V \cap X) \setminus \{a\}) \subset W$. Тогда для произвольной точки $x \in V$ и любой сети $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$, сходящейся к x : $\tilde{f}(x) = \lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) \in W^- = W$ (см. 101.6(б)). Таким образом, $\tilde{f}(V) \subset W \subset U$. \square

5. З а м е ч а н и е. В доказанном утверждении нельзя, вообще говоря, ослабить требование регулярности F (мы не останавливаемся на доказательстве этого факта).

У п р а ж н е н и я. 6. Построить пример отображения $f : E \rightarrow F$, где F отделимо, такого, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует в каждой точке $a \in E$, и в то же время f не непрерывно.

7. В множестве, состоящем из трех элементов, указать неотделимую, но регулярную топологию.

8. Показать, что топология в \mathbb{Q} , порождённая индуцированной топологией числовой прямой \mathbb{R} и множеством \mathbb{K} всех десятично-рациональных чисел (то есть чисел

вида $\alpha = a_0, a_1 \dots a_s$, где $a_0 \in \mathbb{Z}$, а $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $k > 1$) отделима, но не регулярна.

9. Если E — регулярное топологическое пространство и $X \subset E$, то индуцированная в X топология регулярна.

10. Если $E = X \cup \{a\}$ и $a \in X^-$, то утверждение п. 4 справедливо без предположения регулярности F .

§105. Компактные пространства

1. Топологическое пространство E называется *компактным*, если из всякого открытого покрытия E можно выделить конечное покрытие (ср. 64.1).

2. Топологическое пространство E компактно тогда и только тогда, когда каждая сеть в E обладает предельной точкой. Если, в частности, E — пространство со 2-й аксиомой счётности, то E компактно тогда и только тогда, когда каждая последовательность в E обладает сходящейся подпоследовательностью.

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть, напротив, некоторая сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в компактном пространстве E не обладает ни одной предельной точкой:

$$\forall x \in E \exists U(x) \in \mathfrak{b}(x) \cap \mathcal{T} \exists \alpha_x \in A \forall \beta \in A (\alpha_x \ll \beta \Rightarrow x_\beta \notin U(x)).$$

Система $\{U(x)\}_{x \in E}$ — открытое покрытие E . Поэтому существуют $x_1, \dots, x_n \in E$ такие, что $\{U(x_1), \dots, U(x_n)\}$ — покрытие E . Для $\beta \in A$ такого, что $\alpha_{x_1} \ll \beta, \dots, \alpha_{x_n} \ll \beta$: $x_\beta \notin \bigcup_{i=1}^n U(x_i) = E$, — противоречие. Необходимость частного утверждения теперь очевидна, если заметить, что последовательность обладает предельной точкой тогда и только тогда, когда она содержит сходящуюся подпоследовательность.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть E — не компактное пространство и $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие E такое, что для каждой конечной части $\sigma \subset A$: $x_\sigma \equiv (\bigcup_{\alpha \in \sigma} U_\alpha)^c \neq \emptyset$.

Рассмотрим в качестве сети (x_σ) какую-нибудь функцию выбора для семейства (x_σ) (мы считаем $\sigma' \ll \sigma$, если $\sigma' \subset \sigma$). Но тогда сеть (x_σ) не обладает ни одной предельной точкой. Действительно, если a — такая точка и $\beta \in A$ таково, что $a \in U_\beta$, то $\forall \sigma (\{\beta\} \ll \sigma \Rightarrow x_\sigma \in (\bigcup_{\alpha \in \sigma} U_\alpha)^c)$, то есть $x_\sigma \notin U_\beta$.

Докажем теперь достаточность частного утверждения. Пусть каждая последовательность в топологическом пространстве E со 2-й аксиомой счётности обладает предельной точкой. Проверка компактности E проводится по следующей схеме:

(а) из произвольного открытого покрытия $(U_\beta)_{\beta \in B}$ выделяем счётное покрытие $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ (см. ниже п. 10);

(б) далее действуем по схеме общего случая, разобранный выше: предполагая, что E не компактно, находим последовательность (x_σ) элементов E (A — счётно!), не обладающую ни одной предельной точкой. □

3. Часть K топологического пространства назовём *компактом* (или компактным множеством), если K — компактное пространство в индуцированной топологии.

4. З а м е ч а н и е. Часть K топологического пространства E является компактом тогда и только тогда, когда всякое открытое (в E) покрытие содержит конечное покрытие.

5. П р и м е р. В евклидовых пространствах компактные множества характеризуются хорошо известными условиями (см. 64.2). В частности, единичная сфера

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — компакт. Однако в бесконечномерных пространствах теорема 64.2 уже места не имеет. Покажем, например, что единичная сфера $S = \{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^2 = 1\}$ в ℓ^2 не компактна (в топологии, определяемой метрикой, см. 92.8). Действительно, если допустить, что открытое покрытие $\{B_{1/2}(x)\}_{x \in S}$ сферы S содержит конечное покрытие, то бесконечное число элементов вида $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 на n -ом месте) должно попасть в один из шаров вида $B_{1/2}(x)$. Однако в этот шар диаметра 1 не могут попасть даже два элемента указанного вида, так как $d(e_n, e_m) = \sqrt{2} > 1$ ($n \neq m$).

6. В отделимом пространстве каждый компакт замкнут.

¶ Пусть K — компакт в отделимом пространстве E и $a \notin K$. Для каждой точки $x \in K$ пусть U_x и V_x — открытые окрестности точек x и a соответственно и такие, что $U_x \cap V_x = \emptyset$. Из открытого покрытия $(U_x)_{x \in K}$ множества K выберем конечное: $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Тогда $V \equiv \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \in \mathfrak{b}(a)$, причём $V \cap K = \emptyset$, то есть K^c открыто. \square

7. В компактном пространстве каждое замкнутое множество — компакт.

¶ Пусть E — компактное пространство и $K(\subset E)$ замкнуто, а $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие K (в E). Тогда $\{K^c, (U_\alpha)_{\alpha \in A}\}$ — открытое покрытие E . \square

8. Отделимое компактное пространство регулярно.

¶ Пусть E — отделимое компактное пространство, $x \in E$ произвольно и $\mathcal{F} = \{U^- : U \in \mathfrak{b}(x)\}$. Покажем, что \mathcal{F} — фундаментальная система (замкнутых) окрестностей точки x . Пусть $V \in \mathfrak{b}(x)$ произвольно. Рассмотрим открытое покрытие $E : \{V^\circ, (U^-)_{U \in \mathfrak{b}(x)}\}$ (это действительно покрытие: $x \in V^\circ$ и в силу отделимости $E : \forall y (\neq x) \exists U \in \mathfrak{b}(x) \exists W \in \mathfrak{b}(y) (U \cap W = \emptyset)$, то есть $y \notin U^-$ и, следовательно, $y \in U^{-c}$). Так как E — компактное пространство, данное покрытие содержит конечное: $\{V^\circ, U_1^{-c}, \dots, U_n^{-c}\}$. Следовательно, $\left(\bigcup_{i=1}^n U_i^{-c}\right)^c = \bigcap_{i=1}^n U_i^- \subset V^\circ$. Таким образом, для произвольной окрестности $V \in \mathfrak{b}(x)$ найдено $F \in \mathcal{F}$ ($F = \bigcap_{i=1}^n U_i^-$) такое, что $F \subset V$. \square

У п р а ж н е н и я. **9.** Компактность пространства — топологическое свойство.

10. Если топологическое пространство обладает 2-й аксиомой счётности, то каждое открытое его покрытие содержит счётное покрытие.

§106. Непрерывные отображения компактных пространств

1. Пусть E — компактное пространство и $f : E \rightarrow E'$ — непрерывное отображение. Тогда $f(E)$ компакт в E' .

¶ Пусть $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие $f(E)$. Тогда $(f^{-1}(U_\alpha))_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие E , и поэтому существует конечная часть σ множества A такая, что $E = \bigcup_{\alpha \in \sigma} f^{-1}(U_\alpha)$. Отсюда $(U_\alpha)_{\alpha \in \sigma}$ — конечное покрытие множества $f(E)$. \square

2. Если E — компактное пространство и $f : E \rightarrow F$ — непрерывная биекция E на отделимое пространство F , то f — гомеоморфизм.

¶ Покажем, что для всякого замкнутого множества $X \subset E$ множество $f(X)$ замкнуто в F . Из 105.7 X — компакт в E , а значит, $f(X)$ компакт в F . Из 105.6 $f(X)$ замкнуто в F . \square

Следующие свойства непрерывных отображений являются обобщением хорошо известных свойств непрерывных функций на компактных множествах в евклидовых пространствах (§70).

3. Пусть E — компактное пространство и отображение $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда

- (а) отображение f ограничено,
- (б) отображение f достигает своих граней,

¶ (а). Семейство $\{f^{-1}((-n, n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ образует открытое покрытие компактного пространства E и из него можно выделить конечное покрытие. Это означает, что $E = f^{-1}((-n, n))$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то есть $\forall x \in E (|f(x)| < n)$, так что f ограничено. (б) (!). \square

В качестве приложения установим полезный геометрический факт, при доказательстве которого опущен ряд деталей, в результате чего получилось полезное упражнение.

4. Выпуклый компакт $P(\subset \mathbb{R}^n)$ с непустой внутреннейстью гомеоморфен замкнутому единичному шару в \mathbb{R}^n .

¶ Напомним сначала, что множество $P(\subset \mathbb{R}^n)$ называется выпуклым, если $\forall x, y \in P \forall t \in [0, 1] (tx + (1 - t)y \in P)$. Без ограничения общности можно считать, что $\theta \in P^\circ$. Пусть $S = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$ — единичная сфера. Определим отображение $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$, считая, что $\varphi(u)$ ($u \in S$) — это положительное число, однозначно определённое требованиями: $\lambda u \in P$ при $0 \leq \lambda \leq \varphi(u)$, $\lambda u \notin P$ при $\lambda > \varphi(u)$.

Искомый гомеоморфизм $f : P \rightarrow B_1[\theta]$ может быть определён формулой

$$f(v) = \begin{cases} [\varphi(\frac{v}{\|v\|})]^{-1}, & \text{если } \theta \neq v \in P, \\ \theta, & \text{если } v = \theta. \end{cases}$$

Сказанное выше требует обоснования. Отметим, что для этого следует сделать:

1) Из ограниченности и выпуклости P вывести, что число $\varphi(u)$ действительно определено однозначно.

2) Ясно, что f — инъекция, и $f(P) \subset B_1[\theta]$. На самом деле, f и сюръекция.

3) С учётом п. 2 остаётся проверить, что f непрерывно. Для этого в свою очередь достаточно доказать непрерывность отображения φ . Тогда непрерывность f на множестве $P \setminus \{\theta\}$ следует непосредственно, а непрерывность f в точке θ является следствием того, что $\varphi(u) > 0$ ($u \in S$) и свойства п. 3(б). \square

§107. Произведение компактных пространств

Целью этого параграфа является доказательство фундаментальной теоремы А.Н. Тихонова.

Пусть E_i ($i \in I$) — топологические пространства. Произведение $E = \prod_{i \in I} E_i$ — компактное пространство тогда и только тогда, когда компактно каждое E_i ($i \in I$).

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть E — компактное пространство. Так как E_i — образ E при каноническом проектировании p_i , то в силу 106.1 E_i — компактное пространство ($i \in I$).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть все E_i ($i \in I$) — компактные пространства. Допустим, напротив, что E не компактно, то есть существуют открытые покрытия E , не содержащие конечных покрытий. Множество всех таких покрытий, упорядоченное по включению, является индуктивным (!!). По теореме Цорна (прил. III.11) существует максимальное открытое покрытие $\gamma = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$, не содержащее конечного покрытия. Из максимальной γ следует:

(а) если $\sigma \subset A$ конечно, то $\bigcup_{\alpha \in \sigma} U_\alpha \in \gamma$,

(б) если U открыто в E и $\forall \alpha \in A$ ($U \cup U_\alpha \neq E$), то $U \in \gamma$.

В множестве A естественно вводится направление: $\beta \ll \alpha$, если $U_\beta \subset U_\alpha$. Рассмотрим теперь сеть $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в E такую, что $x_\alpha \in E \setminus U_\alpha$ ($\alpha \in A$). Эта сеть не обладает ни одной предельной точкой в E (если, напротив, $a \in E$ — предельная точка для x , то $a \in U_{\alpha_0}$ при некотором $\alpha_0 \in A$, но U_{α_0} не является кормушкой для x , ибо $\forall \beta$ ($\alpha_0 \ll \beta \Rightarrow x_\beta \in E \setminus U_\beta \subset E \setminus U_{\alpha_0}$)). Однако, при каждом $i \in I$ сеть $(p_i(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ в E_i обладает предельной точкой $a_i \in E_i$ (так как E_i — компактное пространство). Рассмотрим точку $a = (a_i)_{i \in I} \in E$. Это не предельная точка сети x и, следовательно, найдётся открытая окрестность точки a

$$U = U_1(a_{i_1}) \times \dots \times U_s(a_{i_s}) \times \prod_{i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_s\}} E_i,$$

которая не является кормушкой сети x . Положим

$$U^{(k)} = U_k(a_{i_k}) \times \prod_{i \neq i_k} E_i, \quad k \in \{1, \dots, s\},$$

и заметим, что хотя бы один “цилиндр” $U^{(k)}$ принадлежит γ . {Если, напротив, $U^{(k)} \notin \gamma$, $k \in \{1, \dots, s\}$, то для каждого $U^{(k)}$ согласно (б) найдётся $\alpha \in A$ такое, что $U^{(k)} \cup U_\alpha = E$, но тогда $U^{(k)}$ — ловушка сети x , ибо

$$\forall \beta$$
 ($\alpha \ll \beta \Rightarrow x_\beta \in E \setminus U_\beta \subset E \setminus U_\alpha \subset U^{(k)}$).

Следовательно, ловушкой является и множество $U = \bigcap_{k=1}^s U^{(k)}$, тогда как U не является кормушкой для x .} Итак, пусть, скажем, $U^{(1)} \in \gamma$, то есть $U^{(1)} = U_{\alpha_0}$ ($\alpha_0 \in A$). Тогда, с одной стороны, $U^{(1)}$ — кормушка для x , так как a_{i_1} — предельная точка сети $p_{i_1}(x)$, а с другой стороны $U^{(1)}$ — не кормушка для x , так как $\forall \beta$ ($\alpha_0 \ll \beta \Rightarrow x_\beta \in E \setminus U_\beta \subset E \setminus U_{\alpha_0}$), то есть $\alpha_0 \ll \beta \Rightarrow p_{i_1}(x_\beta) \notin U_1(a_{i_1})$. Полученное противоречие доказывает теорему. \square

§108. Локально компактные пространства

1. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если каждая его точка обладает компактной окрестностью. Локальная компактность — это топологическое свойство. Ясно также, что всякое компактное пространство является локально компактным.

Примеры. 2. \mathbb{R}^n — локально компактное пространство.

3. Открытый шар $B_1(\theta)$ в \mathbb{R}^n — локально компактное пространство.

4. Дискретное пространство локально компактно.

Переходим к изучению свойств локально компактных пространств.

5. *Всякое отделимое локально компактное пространство регулярно.*

¶ Пусть E — локально компактное пространство, $x \in E$ и K — компактная окрестность точки x . Так как K — регулярное подпространство E (105.8), существует фундаментальная система \mathcal{F} замкнутых окрестностей точки x в K ; тогда \mathcal{F} — фундаментальная система замкнутых окрестностей x в E . □

Исключительно интересным фактом является то обстоятельство, что добавлением одной (“бесконечно удалённой”) точки локально компактное пространство можно превратить в компактное. Предварительно рассмотрим несколько примеров.

Примеры. 6. Следующие три локально компактных пространства попарно гомеоморфны: \mathbb{R} , $(0, 1)$, \check{S} — окружность без одной точки. Если к \check{S} присоединить выброшенную точку, то получим окружность S , которая является компактным пространством. Таким образом, каждое из трёх пространств можно “погрузить” в компактное пространство, отличающееся от исходного одной точкой.

7. Локально компактное пространство \mathbb{R}^2 погружается в компактное пространство — единичную сферу $S(\subset \mathbb{R}^3)$ с помощью стереографической проекции; \mathbb{R}^2 гомеоморфно при этом \check{S} — сфере с выброшенной точкой. Итак, указанная компактификация также осуществляется присоединением к \mathbb{R}^2 одной точки.

8. Теорема [П.С.Александров]. *Для каждого локально компактного пространства E существует компактное пространство E' такое, что E гомеоморфно некоторому подпространству пространства E' , дополнение которого (в E') сводится к одной точке.*

¶ Пусть (E, \mathcal{T}) — локально компактное пространство. Положим $E' = E \cup \{\omega\}$, где $\{\omega\}$ — одноточечное множество. Определим топологию \mathcal{T}' в E' : $U \in \mathcal{T}'$, если $U \in \mathcal{T}$, либо U есть множество вида $\{\omega\} \cup (E \setminus K)$, где K — некоторый компакт в топологическом пространстве E (проверьте, что \mathcal{T}' на самом деле есть топология). Ясно также, что (E, \mathcal{T}) гомеоморфно (E, \mathcal{T}'_E) , где \mathcal{T}'_E — топология, индуцированная в E (как части E') топологией \mathcal{T}' . Наконец, (E', \mathcal{T}') — компактное пространство. Действительно, пусть $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие E' . Тогда найдётся $\alpha_0 \in A$ такое, что $\omega \in U_{\alpha_0} = \{\omega\} \cup (E \setminus K_0)$, где K_0 — некоторый компакт в топологическом пространстве (E, \mathcal{T}) . При этом $K_0 \subset \bigcup_{\alpha \in A, \alpha \neq \alpha_0} (U_\alpha \setminus \{\omega\})$. Но $U_\alpha \setminus \{\omega\} \in \mathcal{T}$ ($\alpha \in A$), а потому существует конечная часть $\sigma \subset A \setminus \{\alpha_0\}$ такая, что $K_0 \subset \bigcup_{\alpha \in \sigma} (U_\alpha \setminus \{\omega\})$. Отсюда $(U_\alpha)_{\alpha \in \sigma \cup \{\alpha_0\}}$ — конечное покрытие E' . □

9. Упражнение. Пусть E — локально компактное пространство, $E' = E \cup \{\omega\}$. Определим в E' топологию \mathcal{T}' : $U \in \mathcal{T}'$, если $U \in \mathcal{T}$, либо U есть множество вида $\{\omega\} \cup V$, где $V \in \mathcal{T}$. Убедитесь, что \mathcal{T}' — топология, но (E', \mathcal{T}') не является, вообще говоря, компактным расширением E .

§109. Связность

1. Топологическое пространство (E, \mathcal{T}) называется *связным*, если не существует разбиения E на два непустых открытых множества, то есть E нельзя представить в виде $E = U \cup V$, где $U, V \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ и $U \cap V = \emptyset$. Часть X топологического пространства E называется *связной*, если в индуцированной топологии X — связное пространство. Связность является топологическим свойством (!!).

Примеры. 2. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связан (это следует, например, из леммы о вложенных отрезках).

3. Евклидово пространство \mathbb{R}^n связно.

Отметим теперь основные свойства связных множеств.

4. Если $(X_i)_{i \in I}$ — семейство связных частей топологического пространства E и $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, то $\bigcup_{i \in I} X_i$ — связная часть E .

5. Образ связного топологического пространства при непрерывном отображении связан.

6. Замыкание связного множества связно.

¶ П.4. Допустим, напротив, что $Y = \bigcup_{i \in I} X_i$ не связно. Тогда существуют $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ такие, что

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \quad (Y_i = Y \cap U_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2)), \quad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset. \quad (*)$$

Пусть точка $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$ произвольна. Она принадлежит одному из слагаемых правой части равенства (*). Пусть, например, $x \in Y_1$. Пусть $i_0 \in I$ таково, что $X_{i_0} \cap U_2 \neq \emptyset$ (такое i_0 существует). Но тогда имеет место равенство, противоречащее связности X_{i_0} :

$$X_{i_0} = Z_1 \cup Z_2, \quad \text{где } Z_i = X_{i_0} \cap U_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2) \text{ и } Z_1 \cap Z_2 = \emptyset.$$

П.5. Пусть $f : E \rightarrow E'$ непрерывно и E связно. Если бы существовало разбиение $f(E)$ на два открытых множества U', V' , то непустые открытые множества $f^{-1}(U')$, $f^{-1}(V')$ разбивали бы E , что невозможно.

П.6. Пусть (E, \mathcal{T}) — топологическое пространство и $X (\subset E)$ связно. Пусть в то же время существуют $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ такие, что

$$X^- = (X^- \cap U_1) \cup (X^- \cap U_2), \quad X^- \cap U_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2),$$

$$(X^- \cap U_1) \cap (X^- \cap U_2) = \emptyset.$$

Тогда множества $X \cap U_i$ ($i = 1, 2$) образуют открытое разбиение X . □

Упражнения. 7. Если E, F — связные топологические пространства, то $E \times F$ связно.

8. Докажите, что “гребёнка” (см. Рис. 18) $X \equiv \{(0, 1)\} \cup I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup \dots$, где

$$I_0 = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}, \quad I_k = \left\{ \left(\frac{1}{k}, y \right) \mid 0 \leq y \leq 1 \right\},$$

($k = 1, 2, \dots$), является связной частью числовой плоскости \mathbb{R}^2 .

§110. Линейная связность

1. Топологическое пространство E называется *линейно связным*, если любые две его точки x и y могут быть соединены “путём”, то есть существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow E$ такое, что $x = f(0)$, $y = f(1)$. Часть X топологического пространства E называется линейно связной, если в индуцированной топологии X — линейно связное пространство. Линейная связность является топологическим свойством (!!).

2. *Линейно связное пространство связно.*

¶ Пусть x_0 — произвольная точка в линейно связном пространстве E и для каждого $x \in E$ $f_x : [0, 1] \rightarrow E$ — путь, соединяющий точку x_0 с точкой x . Утверждение следует из представления $E = \bigcup_{x \in E} f_x([0, 1])$ с учётом 109.4. □

3. З а м е ч а н и е. Из связности линейная связность не следует. Например, “гребёнка” (см. 109.8) — связное, но не линейно связное пространство (!!).

У п р а ж н е н и я. 4. Свойства 109.4–5 остаются справедливыми для линейно связных множеств.

5. Всякое связное подмножество множества \mathbb{R} является и линейно связным. Опишите все связные подмножества \mathbb{R} .

6. Исследовать на связность и линейную связность следующие множества:

- (а) \mathbb{Q} (в \mathbb{R}),
- (б) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (в \mathbb{R}),
- (в) \mathbb{Q}^2 (в \mathbb{R}^2),
- (г) $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ либо } y \in \mathbb{Q}\}$ (в \mathbb{R}^2),
- (д) $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : “x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}” \text{ либо } “x \notin \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}”\}$.

7. Всякое выпуклое множество в \mathbb{R}^n линейно связно.

МЕРА ЖОРДАНА

Общая идея мероопределения заключается в продолжении меры с “элементарных” множеств, где мера уже определена некоторым естественным образом, на более широкий класс “измеримых” множеств с сохранением своих основных свойств (неотрицательность и аддитивность). Ниже будет изложено построение меры по Жордану в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Изложение сначала будет вестись для случая \mathbb{R}^2 только для большей наглядности.

§111. Элементарные множества

1. Прямоугольником в \mathbb{R}^2 (со сторонами, параллельными осям координат) называется множество вида

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle\} = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle,$$

где через $\langle a, b \rangle$ обозначается один из промежутков вида (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называется *элементарным*, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников:

$$E = \bigcup_{i=1}^n \Pi_i \quad (\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset, i \neq j). \quad (*)$$

В дальнейшем будет использоваться знак \sum вместо \bigcup , если речь идёт о попарно непересекающихся множествах, и вместо $(*)$ будем писать $E = \Pi_1 + \dots + \Pi_n = \sum_{i=1}^n \Pi_i$.

Обозначим через \mathfrak{E} класс всех элементарных множеств в \mathbb{R}^2 . Отметим важные для нас свойства этого класса.

Пусть E и F — произвольные множества из класса \mathfrak{E} . Тогда

2. $E \cup F, E \cap F \in \mathfrak{E}$,

3. если $E \subset F$, то $F \setminus E \in \mathfrak{E}$,

4. существуют попарно непересекающиеся прямоугольники Π_1, \dots, Π_n такие, что $E = \sum_{i \in \sigma} \Pi_i$, $F = \sum_{i \in \sigma'} \Pi_i$, где $\sigma, \sigma' \subset \{1, \dots, n\}$.

Сначала установим простую геометрическую лемму.

5. Если прямоугольники Π_1, \dots, Π_k попарно не пересекаются и все содержатся в прямоугольнике Π , то существуют попарно непересекающиеся прямоугольники Π_{k+1}, \dots, Π_n такие, что $\Pi = \sum_{i=1}^k \Pi_i + \sum_{j=k+1}^n \Pi_j$.

¶ Доказательство проводится индукцией по k . Для $k = 1$ справедливость утверждения устанавливается перебором возможных случаев расположения прямоугольников. (Пример одного из возможных случаев приведён на Рис. 19, где, в частности, $\Pi_4 = [a, b] \times (c, d)$.)

Допустим, что утверждение верно для всех натуральных чисел $\leq k - 1$, и пусть семейство Π_1, \dots, Π_k удовлетворяет условиям п. 5. По предположению, имеет место

представление $\Pi = \sum_{i=1}^{k-1} \Pi_i + \sum_j P_j$, где $\{P_j\}$ — некоторая конечная система прямоугольников. Положим $\Pi'_j = \Pi_k P_j$. Тогда $\Pi'_j \subset P_j$ и, следовательно, $P_j = \Pi'_j + \sum_s \Pi_s^{(j)}$, где $\Pi_s^{(j)}$ — прямоугольники и s пробегает конечное множество индексов. Отсюда

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{i=1}^{k-1} \Pi_i + \sum_j \left(\Pi_k P_j + \sum_s \Pi_s^{(j)} \right) = \sum_{i=1}^{k-1} \Pi_i + \sum_j \Pi_k P_j + \sum_{j,s} \Pi_s^{(j)} \\ &= \sum_{i=1}^k \Pi_i + \sum_{j,s} \Pi_s^{(j)}. \quad \square \end{aligned}$$

6. Переходим к доказательству пп. 2–4. Установим сначала п. 4. Пусть $E = \sum_{i=1}^n \Pi_i$, $F = \sum_{j=1}^s \Pi'_j$. Положим $\Pi_{ij} = \Pi_i \cap \Pi'_j$; эти прямоугольники попарно не пересекаются. Так как $\Pi_{ij} \subset \Pi'_j$, $\Pi_{ij} \subset \Pi_i$, то в силу п. 5:

$$\Pi'_j = \sum_{i=1}^n \Pi_{ij} + \sum_m \Pi''_{jm}, \quad \Pi_i = \sum_{j=1}^s \Pi_{ij} + \sum_t \Pi'''_{it}.$$

Тогда семейство $\{\Pi_{ij}, \Pi''_{jm}, \Pi'''_{it}\}$ — искомое.

Пп. 2, 3 являются следствиями п. 4. Действительно, в обозначениях п. 4 имеем $F \setminus E = \sum_{i \in \sigma \setminus \sigma'} \Pi_i$, $E \cup F = \sum_{i=1}^n \Pi_i$, $E \cap F = \sum_{i \in \sigma \cap \sigma'} \Pi_i$.

§112. Мера на классе элементарных множеств

1. *Мерой* (площадью) прямоугольника $\Pi = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ называется число $m(\Pi) = (b-a)(d-c)$. В частности, если Π вырожден (то есть $a = b$ или $c = d$), то $m(\Pi) = 0$. Следующее важное свойство меры на классе прямоугольников называется *аддитивностью*:

2. Если $\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k$, то $m(\Pi) = \sum_{k=1}^n m(\Pi_k)$.

¶ Пусть $\Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$, $\Delta'(c = y_0 < \dots < y_s = d)$ — разложения отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$. Если $\Pi = \sum_{i,j} \Pi_{ij}$, где $\Pi_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s}$),

то представление $\Pi = \sum_{i,j} \Pi_{ij}$ назовём регулярным. Нетрудно видеть, что утверждение верно для случая регулярного представления:

$$\begin{aligned} m(\Pi) &= (b-a)(d-c) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \right] \left[\sum_{j=1}^s (y_j - y_{j-1}) \right] \\ &= \sum_{i,j} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i,j} m(\Pi_{ij}). \end{aligned}$$

Общий случай легко сводится к регулярному (!!). \square

3. Продолжим меру на класс \mathfrak{E} всех элементарных множеств: для $E = \sum_{i=1}^n \Pi_i$ положим $m(E) = \sum_{i=1}^n m(\Pi_i)$.

¶ Убедимся в корректности данного определения. Пусть $E = \sum_{j=1}^s \Pi'_j$ — ещё одно представление E в виде объединения попарно непересекающихся прямоугольников. Тогда $\sum_{i=1}^n m(\Pi_i) = \sum_{j=1}^s m(\Pi'_j)$. Действительно, полагая $\Pi_{ij} = \Pi_i \cap \Pi'_j$, заметим, что справедливы равенства $E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \Pi_{ij}$, $\Pi_i = \sum_{j=1}^s \Pi_{ij}$, $\Pi'_j = \sum_{i=1}^n \Pi_{ij}$. Поэтому $m(\Pi_i) = \sum_{j=1}^s m(\Pi_{ij})$, $m(\Pi'_j) = \sum_{i=1}^n m(\Pi_{ij})$, откуда

$$\sum_{i=1}^n m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s m(\Pi_{ij}) = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^n m(\Pi_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^s m(\Pi'_j). \quad \square$$

Из данного определения сразу следует, что мера m на классе \mathfrak{E} по-прежнему обладает свойством аддитивности:

4. Если $E, F \in \mathfrak{E}$ и $E \cap F = \emptyset$, то $m(E + F) = m(E) + m(F)$.

Отметим ещё несколько полезных свойств меры (!!):

5. Если $E \in \mathfrak{E}$, то $E^\circ, E^- \in \mathfrak{E}$ и $m(E) = m(E^\circ) = m(E^-)$.

6. Если $E \subset F$ ($E, F \in \mathfrak{E}$), то $m(F) = m(E) + m(F \setminus E)$.

7. Если $E, F \in \mathfrak{E}$, то $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$.

8. Если $\Pi = \Pi^\circ$, а прямоугольник Π_1 не вырожден и $\Pi \cap \Pi_1 \neq \emptyset$, то $m(\Pi \cap \Pi_1) > 0$.

§113. Свойство счётной аддитивности

Мера на классе прямоугольников обладает свойством существенно более сильным, чем свойство 112.2. Оно называется счётной аддитивностью и лежит в основе принципиально новой теории меры и интеграла, которая излагается ниже, в разделах “Мера Лебега” и “Интеграл Лебега”.

1. Если $\Pi = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, где Π, Π_k — прямоугольники, то $m(\Pi) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k)$.

¶ Пусть $n \in \mathbb{N}$ произвольно. В силу 111.5 найдутся прямоугольники $\Pi'_{n+1}, \dots, \Pi'_s$ такие, что $\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k + \sum_{j=n+1}^s \Pi'_j$, и в силу аддитивности и неотрицательности меры m :

$$\sum_{k=1}^n m(\Pi_k) \leq \sum_{k=1}^n m(\Pi_k) + \sum_{j=n+1}^s m(\Pi'_j) = m\left(\sum_{k=1}^n \Pi_k + \sum_{j=n+1}^s \Pi'_j\right) = m(\Pi).$$

Из произвольности n теперь получаем $\sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) \leq m(\Pi)$. Обратное неравенство следует из утверждения:

2. Если $\Pi \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, то $m(\Pi) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k)$.

¶ Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\bar{\Pi}$ — замкнутый прямоугольник такой, что $\bar{\Pi} \subset \Pi$ и $m(\Pi) \leq m(\bar{\Pi}) + \varepsilon/2$. Для каждого k рассмотрим открытый прямоугольник $\widetilde{\Pi}_k$ такой, что $\Pi_k \subset \widetilde{\Pi}_k$, $m(\widetilde{\Pi}_k) < m(\Pi_k) + 2^{-(k+1)} \cdot \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots$). Ясно, что $\bar{\Pi} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{\Pi}_k$. Семейство $\widetilde{\Pi}_1, \widetilde{\Pi}_2, \dots$ образует открытое покрытие компактного множества $\bar{\Pi}$. Следовательно, существует конечное семейство $\widetilde{\Pi}_1, \dots, \widetilde{\Pi}_N$, которое покрывает $\bar{\Pi}$: $\bar{\Pi} \subset \bigcup_{k=1}^N \widetilde{\Pi}_k$. В силу 112.7 $m(\bar{\Pi}) \leq \sum_{k=1}^N m(\widetilde{\Pi}_k)$. Следовательно,

$$m(\Pi) \leq m(\bar{\Pi}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^N m(\widetilde{\Pi}_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\widetilde{\Pi}_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) + \varepsilon.$$

Из произвольности ε п. 2 доказан, а вместе с ним и п. 1. \square

§114. Измеримые по Жордану множества

1. Для ограниченного множества $X (\subset \mathbb{R}^n)$ определены два числа:

$m_*(X) \equiv \sup\{m(E) : E \subset X, E \in \mathfrak{E}\}$ — внутренняя мера Жордана множества X ,

$m^*(X) \equiv \inf\{m(E) : X \subset E, E \in \mathfrak{E}\}$ — внешняя мера Жордана множества X .

Отметим, что $m_*(X) \leq m^*(X)$ для произвольного ограниченного множества X . Ограниченное множество $X (\subset \mathbb{R}^n)$ называется *измеримым по Жордану* (*J-измеримым*), если $m_*(X) = m^*(X)$. Число $m(X) \equiv m_*(X) (= m^*(X))$ называется *мерой Жордана* J-измеримого множества X .

З а м е ч а н и я. 2. Каждое элементарное множество $E = \sum_{k=1}^n \Pi_k$ J-измеримо и его мера Жордана равна $\sum_{k=1}^n m(\Pi_k)$. Здесь и далее буквой Π обозначаются (n -мерные) параллелепипеды $\langle a_1, b_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$.

3. Из определения п. 1 множество X имеет жорданову меру нуль ($m(X) = 0$) тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists E \in \mathfrak{E} (X \subset E, m(E) < \varepsilon)$.

Отметим свойства множеств жордановой меры нуль:

4. $m(X) = m(Y) = 0 \Rightarrow m(X \cup Y) = 0$,

5. $Y \subset X$, $m(X) = 0 \Rightarrow Y$ J -измеримо и $m(Y) = 0$.

6. По аналогии со случаем числовой прямой (§47) в евклидовом пространстве вводятся множества лебеговой меры нуль. Именно, множество $X(\subset \mathbb{R}^n)$ имеет лебегову меру нуль, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Pi_1, \Pi_2, \dots \left(X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k, \sum_{k=1}^{\infty} m(\Pi_k) < \varepsilon \right),$$

где Π_1, Π_2, \dots — параллелепипеды. Справедливы свойства:

7. Если X_1, X_2, \dots имеют лебегову меру нуль, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ также имеет лебегову меру нуль.

8. Если X имеет лебегову меру нуль и $Y \subset X$, то Y имеет лебегову меру нуль.

Примеры. 9. Множество $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}(\subset \mathbb{R})$ J -измеримо и $m(X) = 0$.

10. Множество $\mathbb{Q} \cap [0, 1](\subset \mathbb{R})$ ограничено и имеет лебегову меру нуль. Однако оно не J -измеримо.

§115. Критерий измеримости множества

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено. Следующие условия равносильны:

- (1) X — J -измеримо,
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists E, F \in \mathfrak{E} (E \subset X \subset F, m(F) - m(E) < \varepsilon)$,
- (3) X^Γ имеет жорданову меру нуль.

¶ (1) \Rightarrow (2) (!!). (2) \Rightarrow (3). Без ограничения общности можно считать, что F замкнуто, а E открыто. В этом случае $X^\Gamma = (X^-) \cap (X^{c-}) \subset F \setminus E$ {действительно, $X \subset F \Rightarrow X^- \subset F$; $E \subset X \Rightarrow E^c \supset X^c \Rightarrow E^c \supset X^{c-}$. Поэтому $X^- \cap (X^{c-}) \subset F \cap E^c = F \setminus E$ }. Таким образом,

$$m^*(X^\Gamma) \leq m^*(F \setminus E) = m(F \setminus E) = m(F) - m(E) < \varepsilon.$$

(3) \Rightarrow (1). Пусть $m(X^\Gamma) = 0$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда существует $E \in \mathfrak{E}$ такое, что $X^\Gamma \subset E, m(E) < \varepsilon$. Так как X ограничено, его можно погрузить в некоторый параллелепипед $\Pi : X \subset \Pi$. Тогда $\Pi \setminus E \in \mathfrak{E}$ и, следовательно $\Pi \setminus E = \sum_{k=1}^n \Pi_k$, где Π_k — некоторые параллелепипеды. Тогда

$$F \equiv X^\circ \cap (\Pi \setminus E) = \sum_{k \in \sigma} \Pi_k,$$

где $\sigma = \{k \in \{1, \dots, n\} : X^\circ \cap \Pi_k \neq \emptyset\}$. {Действительно, включение $F \subset \sum_{k \in \sigma} \Pi_k$ очевидно. Обратно, если $\sum_{k \in \sigma} \Pi_k \not\subset F$, то в одном из параллелепипедов Π_k ($k \in \sigma$) найдется точка $x \in X^\circ$ и точка $y \in X^{oc}(= X^{c-})$. Отсюда вытекает существование в этом же параллелепипеде некоторой точки $z \in X^\Gamma$ (!!), что невозможно.} Так как $F \subset X \subset F + E$, имеем

$$m^*(X) \leq m^*(F + E) = m(F) + m(E) \leq m_*(X) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon : m^*(X) \leq m_*(X)$. Так как верно и обратное неравенство, то X J -измеримо. \square

§116. Свойства измеримых по Жордану множеств

1. Если X, Y J -измеримы, то J -измеримы множества $X \cup Y, X \setminus Y, X \cap Y$.

¶ Следует из критерия §115 с учётом включений $A^\Gamma \subset X^\Gamma \cup Y^\Gamma$, где A — любое из множеств $X \cup Y, X \setminus Y, X \cap Y$ (см. 95.10). \square

2. Если X, Y J -измеримы, то $m(X \cup Y) \leq m(X) + m(Y)$. В частности, если $X \cap Y = \emptyset$, то $m(X + Y) = m(X) + m(Y)$.

¶ Пусть сначала $X \cap Y = \emptyset$ и $E, E', F, F' \in \mathfrak{E}$ таковы, что

$$E \subset X \subset E', \quad F \subset Y \subset F', \quad m(E') - m(E) < \varepsilon, \quad m(F') - m(F) < \varepsilon.$$

Положим $G = E + F, G' = E' \cup F'$. Тогда $G \subset X + Y \subset G'$ и

$$\begin{aligned} \underline{m(X) + m(Y) - 2\varepsilon} &= (m(X) - \varepsilon) + (m(Y) - \varepsilon) < m(E) + m(F) \\ &= m(G) \leq \underline{m(X + Y)} \leq m(G') \leq m(E') + m(F') \\ &\leq \underline{m(X) + m(Y) + 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что ε произвольно. В общем случае:

$$m(X \cup Y) = m(X + (Y \setminus X)) = m(X) + m(Y \setminus X) \leq m(X) + m(Y). \quad \square$$

3. Пусть X, Y J -измеримы, причём $X \cap Y \subset X^\Gamma \cup Y^\Gamma$ (то есть множества X и Y пересекаются лишь по границам). В этом случае мы будем писать $X \cap Y \cong \emptyset$.

4. Если $X \cap Y \cong \emptyset$, то $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$.

¶ Утверждение справедливо в силу выкладки

$$m(X) + m(Y) = m(X^\circ) + m(Y^\circ) = m(X^\circ + Y^\circ) \leq m(X \cup Y) \leq m(X) + m(Y),$$

где 1-е равенство следует из включения $X^\circ \subset X \subset X^\circ \cup X^\Gamma$. \square

П р и м е р ы. 5. Пусть $f(x) \geq 0$ ($a \leq x \leq b$) интегрируема на $[a, b]$. Тогда $X \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ J -измеримо и $m(X) = \int_a^b f(x) dx$.

¶ Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда существует разложение $\Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ такое, что $I - \varepsilon/2 < S_*(\Delta) \leq S^*(\Delta) < I + \varepsilon/2$, где $I = \int_a^b f(x) dx, S_*(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), S^*(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ (см. §55, 56). Положим

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq m_i\}, & E &= \bigcup_{i=1}^n \Pi_i, \\ \Pi'_i &= \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq M_i\}, & F &= \bigcup_{i=1}^n \Pi'_i. \end{aligned}$$

Тогда $E, F \in \mathfrak{E}$, $E \subset X \subset F$, $m(E) = \sum_{i=1}^n m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = S_*(\Delta)$, $m(F) = \sum_{i=1}^n m(\Pi'_i) = S_*(\Delta)$. Следовательно, $m(F) - m(E) < \varepsilon$. Осталось применить критерий §115. \square

6. Пусть $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ компактно, и $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда поверхность S в \mathbb{R}^n , описываемая уравнением

$$x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1}), \quad (x^1, \dots, x^{n-1}) \in K,$$

имеет n -мерную жорданову меру нуль.

¶ Функция f равномерно непрерывна на K . Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in K (\|x - x'\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon). \quad (*)$$

Пусть $h > 0$ таково, что диаметр куба в \mathbb{R}^{n-1} со стороной h меньше δ . Рассечём \mathbb{R}^n сеткой

$$x^1 = jh, \dots, x^{n-1} = jh, x^n = j\varepsilon \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots).$$

Пространство \mathbb{R}^{n-1} переменных x^1, \dots, x^{n-1} рассекается при этом на кубы с ребром h . Компактное множество K лежит в некотором $(n-1)$ -мерном кубе \varkappa , и пусть $m_{(n-1)}(\varkappa) = M$ (через $m_{(n-1)}$ обозначаем $(n-1)$ -мерную меру Жордана). Сколько n -мерных параллелепипедов, содержащих точки поверхности S , могут проектироваться на один кубик из \varkappa ? Очевидно, не более двух (если бы их было больше двух, то нашлись бы точки $x, x' \in \varkappa$ такие, что $\|x - x'\| < \delta$, а $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$, что противоречит $(*)$). Следовательно, $m_{(n)}(S) \leq 2\varepsilon M$. Из произвольности ε имеем $m_{(n)}(S) = 0$. \square

У п р а ж н е н и я. **7.** Если непрерывная плоская кривая Γ биективно и ортогонально проектируется на отрезок некоторой прямой $\ell \subset \mathbb{R}^2$, то её двумерная мера Жордана равна нулю.

8. Если X J -измеримо в \mathbb{R}^2 , то J -измеримо множество Y , получающееся из X поворотом на некоторый угол в системе координат XOY .

9. Привести пример J -измеримого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, обладающего одновременно следующими свойствами: (i) его ортогональные проекции на оси Ox , Oy не J -измеримы в \mathbb{R}^1 , (ii) найдётся $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что не J -измеримы в \mathbb{R}^1 множества

$$\Omega_1 = \{y \in \mathbb{R} : (\lambda, y) \in \Omega\} \text{ и } \Omega_2 = \{x \in \mathbb{R} : (x, \lambda) \in \Omega\}.$$

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА

§117. Определение кратного интеграла

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ ограничено и J -измеримо. Систему J -измеримых множеств $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ назовём разложением Ω , если $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, причём $\Omega_i \cap \Omega_j \cong \emptyset$ ($i \neq j$); обозначим это разложение символом $\Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$. Величину $|\Delta| \equiv \max_{1 \leq i \leq n} d(\Omega_i)$ назовём диаметром разложения Δ (здесь $d(\Omega_i) \equiv \sup\{\|x - y\| : x, y \in \Omega_i\}$).

Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $\Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ — разложение Ω . Сумма $S_\Delta = \sum_{i=1}^n f(x_i)m(\Omega_i)$, где $x_i \in \Omega_i$, а $m(\Omega_i)$ — мера Жордана множества Ω_i , называется *интегральной суммой Римана* функции f .

2. Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой* (по Риману), если для всякой последовательности $\Delta^{(k)}(\Omega_1^{(k)}, \dots, \Omega_{n_k}^{(k)})$ разложений Ω таких, что $|\Delta^{(k)}| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) существует предел $\lim_k \sum_{i=1}^{n_k} f(x_i^{(k)})m(\Omega_i^{(k)})$. Тогда предел не зависит от выбора последовательности $\Delta^{(k)}$ и называется *интегралом Римана* функции f по множеству Ω , обозначения: $\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n, \int_{\Omega} f(x) dx$.

3. Подобно одномерному случаю имеет место определение, эквивалентное приведённому: $\alpha = \int_{\Omega} f(x) dx$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta (|\Delta| < \delta \Rightarrow |S_\Delta - \alpha| < \varepsilon)$ при любом выборе точек $x_j \in \Omega_j$.

4. П р и м е р. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f(x) = \lambda$ ($x \in \Omega$). Тогда $\int_{\Omega} f(x) dx = \lambda \cdot m(\Omega)$.

§118. Интегрируемость и ограниченность

1. В отличие от случая интеграла по отрезку, в общем случае из интегрируемости функции ещё не следует её ограниченность. Действительно, если $m(\Omega) = 0$ и $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ произвольная (не обязательно ограниченная) функция, то из определения 117.2 следует, что $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$.

2. Назовём J -измеримое множество $\Omega(\subset \mathbb{R}^k)$ *невыврожденным*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_n) (|\Delta| < \varepsilon, m(\Omega_i) > 0 (i = 1, \dots, n)). \quad (*)$$

3. П р и м е р. Всякое открытое J -измеримое множество Ω является невыврожденным. {Кубическая сетка в \mathbb{R}^k с кубиками \varkappa_j диаметра $< \varepsilon$ разрезает Ω на J -измеримые части $\Omega_j = \Omega \cap \varkappa_j$. Семейство всех тех множеств Ω_j , которые не пусты, образует искомое разложение Δ с $|\Delta| < \varepsilon$. Действительно, если $x \in \Omega_j$, то существует открытый кубик \varkappa достаточно малого диаметра с центром в точке $x \in \Omega$ такой, что $\varkappa \subset \Omega$ и тогда (см. 112.8) $m(\Omega \cap \varkappa_j) \geq m(\varkappa \cap \varkappa_j) > 0$.}

Для невырожденных областей имеет место необходимое условие интегрируемости.

4. Если Ω невырождено и $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, то f ограничена.

¶ Пусть, напротив, f не ограничена. Тогда для любого $N > 0$ и любого разложения $\Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ с условием (*) найдётся точка $x \in \Omega$ (пусть, например, $x \in \Omega_1$) такая, что

$$|f(x)| > \frac{N}{m(\Omega_1)} + \frac{1}{m(\Omega_1)} \left| \sum_{i=2}^n f(x_i) m(\Omega_i) \right| \quad (\text{здесь } x_i \in \Omega_i).$$

Следовательно,

$$|S_\Delta| = \left| f(x)m(\Omega_1) + \sum_{i=2}^n f(x_i)m(\Omega_i) \right| \geq |f(x)|m(\Omega_1) - \left| \sum_{i=2}^n f(x_i)m(\Omega_i) \right| > N. \quad \square$$

§119. Критерий интегрируемости Дарбу

1. Пусть $\Omega(\subset \mathbb{R}^k)$ J -измеримо и $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена. Для разложения $\Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ области Ω определим величины:

$$m_j = \inf_{x \in \Omega_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x \in \Omega_j} f(x),$$

$$S_*(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i m(\Omega_i) - \text{нижняя сумма Дарбу},$$

$$S^*(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i m(\Omega_i) - \text{верхняя сумма Дарбу}.$$

Если Δ, Δ' — произвольные разложения Ω , то подобно случаю отрезка (55.3) выводится неравенство $S_*(\Delta) \leq S^*(\Delta')$. Нижний (соответственно верхний) интеграл Дарбу для f определяется равенством $D_*(f) = \sup_{\Delta} S_*(\Delta)$ (соответственно $D^*(f) = \inf_{\Delta} S^*(\Delta)$). При этом $D_*(f) \leq D^*(f)$.

2. Ограниченная функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^k$) интегрируема тогда и только тогда, когда $D_*(f) = D^*(f)$. При этом $\int_{\Omega} f(x) dx = D_*(f)$.

¶ Доказательство не имеет принципиальных отличий от случая интеграла по отрезку (см. 56.1). \square

3. Следствие. Если Ω замкнуто и J -измеримо, а $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то f интегрируема.

¶ Можно считать, что $m(\Omega) > 0$. По условию Ω компактно и потому f равномерно непрерывна на Ω (см. 70.1). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\delta > 0$ таково, что

$$\forall x, y \in \Omega \quad (\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{m(\Omega)}).$$

Если $\Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ таково, что $|\Delta| < \delta$, то в обозначениях п. 1

$$D^*(f) - D_*(f) \leq S^*(\Delta) - S_*(\Delta) \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) m(\Omega_i) \leq \frac{\varepsilon}{m(\Omega)} \cdot m(\Omega) = \varepsilon. \quad \square$$

Ниже мы приведём критерий интегрируемости А. Лебега. Для его доказательства понадобится некоторая подготовка.

§120. Колебание функции в точке

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ и $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена. Для $x_0 \in \Omega^-$ и $\delta > 0$ положим

$$M_\delta(x_0) = \sup\{f(x) : x \in \Omega \cap B_\delta(x_0)\}, \quad m_\delta(x_0) = \inf\{f(x) : x \in \Omega \cap B_\delta(x_0)\}.$$

$M_\delta(x_0)$ (соответственно $m_\delta(x_0)$) как функция переменной δ не убывает (соответственно не возрастает), оставаясь ограниченной. Таким образом, определена величина, называемая колебанием функции в точке x_0 : $\omega(x_0) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} [M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0)]$.

2. Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 тогда $\omega(x_0) = 0$ (!!).

3. Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена. Тогда для каждого $\lambda > 0$ множество $D_\lambda \equiv \{x \in \Omega^- : \omega(x) \geq \lambda\}$ замкнуто.

¶ Пусть $x_0 \in D_\lambda^-$. Тогда $\forall \delta > 0 \exists y \in B_\delta(x_0) \cap \Omega^-$ ($\omega(y) \geq \lambda$). Пусть $\gamma > 0$ таково, что $B_\gamma(y) \subset B_\delta(x_0)$. Тогда $M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0) \geq M_\gamma(y) - m_\gamma(y) \geq \lambda$, так что $\omega(x_0) \geq \lambda$ и, следовательно, $x_0 \in D_\lambda$. □

4. Если Ω замкнуто, то множество D всех точек разрыва ограниченной функции f представимо в виде $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$.

¶ Утверждение непосредственно следует из п. 2. □

§121. Теорема Лебега

Пусть $\Omega(\subset \mathbb{R}^k)$ J -измеримо и замкнуто. Ограниченная функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда f п.в. непрерывна.

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. Достаточно установить, что каждое множество $D_{1/n}$ ($n \in \mathbb{N}$) имеет лебегову меру нуль (см. 120.4, 114.7). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. В силу 119.2 найдётся разложение $\Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_s)$ такое, что (в обозначениях 119.1) $\sum_{j=1}^s (M_j - m_j)m(\Omega_j) \leq \varepsilon/n$. Пусть

$$\sigma_n = \{j \in \{1, \dots, s\} : \exists y \in \Omega_j^0 \ (\omega(y) \geq \frac{1}{n})\}.$$

Тогда $\frac{1}{n} \sum_{j \in \sigma_n} m(\Omega_j) \leq \sum_{j \in \sigma_n} (M_j - m_j)m(\Omega_j) \leq \sum_{j=1}^s (M_j - m_j)m(\Omega_j) \leq \frac{\varepsilon}{n}$, откуда $\sum_{j \in \sigma_n} m(\Omega_j) \leq \varepsilon$. Далее

$$D_{1/n} = \{y \in \Omega : \omega(y) \geq \frac{1}{n}\} \subset \left(\bigcup_{j \in \sigma_n} \Omega_j \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^s \Omega_j^\Gamma \right),$$

и, поскольку $m(\Omega_j^\Gamma) = 0$ ($1 \leq j \leq s$), имеем

$$\begin{aligned} m^*(D_{1/n}) &\leq m^*\left(\left(\bigcup_{j \in \sigma_n} \Omega_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^s \Omega_j^\Gamma\right)\right) = m\left(\left(\bigcup_{j \in \sigma_n} \Omega_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^s \Omega_j^\Gamma\right)\right) \\ &\leq \sum_{j \in \sigma_n} m(\Omega_j) + \sum_{j=1}^s m(\Omega_j^\Gamma) = \sum_{j \in \sigma_n} m(\Omega_j) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Из произвольности ε отсюда следует, что $m(D_{1/n}) = 0$, а значит, $D_{1/n}$ имеет лебегову меру нуль.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть множество D всех точек разрыва ограниченной функции f имеет лебегову меру нуль. Требуется доказать интегрируемость f . Будем считать, что $m(\Omega) > 0$ (иначе утверждение очевидно). Пусть $M > 0$ таково, что $|f(x)| \leq M$ ($x \in \Omega$) и $\varepsilon > 0$ произвольно. Так как $D = \bigcup_n D_{1/n}$, то $D_{1/n}$ имеет лебегову меру нуль для каждого n (см. 114.8). Пусть n таково, что $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{m(\Omega)}$. Выберем систему $\{\Pi_i\}$ открытых параллелепипедов так, чтобы

$$D_{1/n} \subset \bigcup_i \Pi_i, \quad \sum_i m(\Pi_i) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Множество $D_{1/n}$ ограничено и замкнуто (см. 120.3), так что оно компактно, и значит, существует конечное число параллелепипедов Π_1, \dots, Π_q , покрывающих $D_{1/n}$. Множество $\Omega' \equiv \Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^q \Pi_i \right)$ J -измеримо и замкнуто (в частности, компактно), причём $\forall y \in \Omega'$ ($\omega(y) < \frac{1}{n}$). Следовательно, каждую точку $y \in \Omega'$ можно погрузить в шар $B_{\delta_y}(y)$ радиуса $\delta_y > 0$ такой, что $\forall z \in B_{\delta_y}(y) \cap \Omega$ ($|f(z) - f(y)| < \frac{1}{n}$). Из системы шаров $\{B_{\delta_y}(y)\}_{y \in \Omega'}$, покрывающих Ω' , выберем конечную подсистему $B_{\delta_{y_1}}(y_1), \dots, B_{\delta_{y_t}}(y_t)$, покрывающую Ω' . Рассмотрим следующее разложение множества Ω' :

$$\Omega_1 = B_{\delta_{y_1}}(y_1) \cap \Omega', \quad \Omega_2 = B_{\delta_{y_2}}(y_2) \cap (\Omega' \setminus \Omega_1), \dots, \quad \Omega_t = B_{\delta_{y_t}}(y_t) \cap (\Omega' \setminus \bigcup_{i=1}^{t-1} \Omega_i).$$

Полагая $M_0 = \sup\{f(x) : x \in \Omega \setminus \Omega'\}$, $m_0 = \inf\{f(x) : x \in \Omega \setminus \Omega'\}$, имеем для разложения $\Delta(\Omega \setminus \Omega', \Omega_1, \dots, \Omega_t)$ множества Ω :

$$\begin{aligned} S^*(\Delta) - S_*(\Delta) &= (M_0 - m_0)m(\Omega' \setminus \Omega) + \sum_{i=1}^t (M_i - m_i)m(\Omega_i) \\ &\leq 2M \cdot m\left(\bigcup_{i=1}^q \Pi_i\right) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^t m(\Omega_i) \leq 2\varepsilon + \frac{1}{n}m(\Omega) < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Из произвольности ε и 119.2 следует интегрируемость f . \square

§122. Свойства интеграла

1. Пусть Ω J -измеримо, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, $\tilde{f} : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная ограниченная функция такая, что $\tilde{f}|_{\Omega} = f$. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема \tilde{f} . При этом

$$\int_{\Omega^-} \tilde{f}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx. \quad (1)$$

¶ Пусть f интегрируема, $\alpha = \int_{\Omega} f(x) dx$ и $\Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ — такое разложение Ω , что

$S^*(\Delta) - \alpha < \varepsilon$. Система множеств

$$\Omega_1, \Omega_1^- \setminus \Omega_1, \dots, \Omega_n, \Omega_n^- \setminus \Omega_n \quad (2)$$

образует разложение $\bar{\Delta}$ множества Ω^- (множество $\Omega_i^- \setminus \Omega_i$ присутствует в ряду (2), только если оно не пусто). Пусть $N_i = \sup_{x \in \Omega_i^- \setminus \Omega_i} \tilde{f}(x)$ ($\Omega_i^- \setminus \Omega_i \neq \emptyset$). Тогда (так как $m(\Omega_i^- \setminus \Omega_i) = 0$): $S^*(\bar{\Delta}, \tilde{f}) - \alpha = S^*(\Delta) + \sum_i N_i m(\Omega_i^- \setminus \Omega_i) - \alpha = S^*(\Delta) - \alpha < \varepsilon$. (Здесь $S_*(\bar{\Delta}, \tilde{f})$ — верхняя сумма Дарбу для \tilde{f} , отвечающая разложению $\bar{\Delta}$.) Из произвольности ε : $D^*(\tilde{f}) \leq \alpha$. Аналогично $D_*(\tilde{f}) \geq \alpha$. Итак, \tilde{f} интегрируема, и (1) верно.

Пусть теперь \tilde{f} интегрируема, и (Δ_N) — произвольная последовательность разложений Ω с условием $|\Delta_N| \rightarrow 0$. Если $\Delta_N(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ — некоторое разложение из этой последовательности, то разложение $\bar{\Delta}_N$, определённое системой (2), имеет тот же диаметр, что и Δ_N : $|\Delta_N| = |\bar{\Delta}_N|$. Следовательно, $S(\bar{\Delta}_N, \tilde{f}) \rightarrow \int_{\Omega^-} \tilde{f}(x) dx$.

Отсюда

$$\lim_N S_{\Delta_N}(f) = \lim_N [S_{\Delta_N}(f) + \sum_{i: \Omega_i^- \setminus \Omega_i \neq \emptyset} \tilde{f}(\xi_i) m(\Omega_i^- \setminus \Omega_i)] = \lim_N S(\bar{\Delta}_N, \tilde{f}) = \int_{\Omega^-} \tilde{f}(x) dx$$

($\xi_i \in \Omega_i^- \setminus \Omega_i$ произвольны). Итак, f интегрируема, и справедливо равенство (1). \square

2. Если $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены и интегрируемы, то интегрируемы $f \pm g$, $f \cdot g$, λf , $|f|$, причём

$$\int_{\Omega} [f(x) \pm g(x)] dx = \int_{\Omega} f(x) dx \pm \int_{\Omega} g(x) dx, \quad \int_{\Omega} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\Omega} f(x) dx.$$

3. Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ и Ω_i ($i = 1, 2$) J -измеримы. Тогда

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega_1} f(x) dx + \int_{\Omega_2} f(x) dx \quad (3)$$

в том смысле, что если определена одна из частей равенства (3), то определена и другая, и они равны.

¶ С помощью п. 1 доказательства пп. 2, 3 сводятся к применению теоремы Лебега (§121). Проверим интегрируемость произведения интегрируемых функций. Пусть $\tilde{f}, \tilde{g} : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}$ — какие-либо ограниченные продолжения функций f, g . В силу п. 1 \tilde{f}, \tilde{g} интегрируемы и по теореме Лебега они непрерывны п.в. Следовательно, п.в. непрерывна функция $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$, являющаяся ограниченным продолжением функции $f \cdot g$. По теореме Лебега $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ интегрируема, и в силу п. 1, интегрируема $f \cdot g$. \square

4. З а м е ч а н и е. Для неограниченной функции f из существования правой части (3) не следует интегрируемость f по множеству Ω . Действительно, положим (Рис. 20)

$$\Omega = \Omega' \cup \Omega'', \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Omega'', \\ \frac{1}{x^1}, & \text{если } x = (x^1, 0) \in \Omega' \setminus \{\theta\}. \end{cases}$$

Тогда $\int_{\Omega'} f(x) dx = \int_{\Omega''} f(x) dx = 0$, но $\int_{\Omega} f(x) dx$ не существует, ибо интегральная сумма S_{Δ} функции f может быть выбрана сколь угодно большой: положим, например, для разложения на Рис. 21 $x_1 = \left(\frac{m(\Omega_1)}{N}, 0\right) \in \Omega_1$, где $N > 0$ — наперёд заданное число. Тогда $S_{\Delta} \geq f(x_1)m(\Omega_1) = N$. \square

5. Пусть $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены и интегрируемы, причём $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in \Omega$. Тогда

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx.$$

В частности, $\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx \leq \|f\|_{\Omega} m(\Omega)$, где $\|f\|_{\Omega} \equiv \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$.

6. Т е о р е м а [о среднем]. Пусть $f, \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничены и интегрируемы, причём $\varphi(x) \geq 0$. Тогда

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = \lambda \int_{\Omega} \varphi(x) dx,$$

где λ — подходящее число из отрезка $[\inf_{x \in \Omega} f(x), \sup_{x \in \Omega} f(x)]$. В частности, если Ω замкнуто и линейно связно, а f непрерывна, то существует $x_0 \in \Omega$ такое, что

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = f(x_0) \int_{\Omega} \varphi(x) dx.$$

¶ Доказательство п. 5–6 подобно случаю интеграла по отрезку. В частном утверждении п. 6 учтите 70.4 (!). \square

§123. Связь кратного интеграла с повторным

Теперь мы изложим процедуру, часто позволяющую эффективно вычислять кратный интеграл путём повторного применения формулы Ньютона–Лейбница.

1. Пусть $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ — невырожденный прямоугольник (в \mathbb{R}^2) и $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема. Тогда

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

¶ Приведённое равенство требует разъяснения: из интегрируемости f на множестве Π не следует, например, существования интеграла $\int_c^d f(x, y) dy$ при любом $x \in [a, b]$. Положим для определённости

$$\Phi(x) = \int_c^d f(x, y) dy \equiv D_*(f(x, \cdot)), \quad a \leq x \leq b,$$

где $D_*(f(x, \cdot))$ — нижний интеграл Дарбу функции $y \rightarrow f(x, y), y \in [c, d]$. Эта величина определена, так как f ограничена в силу невырожденности Π (см. §118). Можно считать, что $\Phi(x)$ — произвольная точка из отрезка $[D_*(f(x, \cdot)), D^*(f(x, \cdot))]$.

Итак, требуется доказать, что $\int_a^b \Phi(x) dx = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$. Разобьём каждый из отрезков $[a, b]$, $[c, d]$ на N равных частей:

$$\Delta_x(a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b), \quad \Delta_y(c = y_0 < y_1 < \dots < y_N = d).$$

Пусть $h_N = \frac{b-a}{N}$, $k_N = \frac{d-c}{N}$. Тогда

$$S^*(\Delta_N) = h_N k_N \sum_{i,j=1}^N M_{ij}, \quad S_*(\Delta_N) = h_N k_N \sum_{i,j=1}^N m_{ij},$$

где Δ_N — соответствующее разложение Π и, например,

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}.$$

Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ — произвольные точки. Тогда

$$\Phi(\xi_i) \leq D^*(f(\xi_i, \cdot)) \leq k_N \sum_{j=1}^N \sup_{y \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, y) \leq k_N \sum_{j=1}^N M_{ij}.$$

Аналогично, $\Phi(\xi_i) \geq k_N \sum_{j=1}^N m_{ij}$. Следовательно,

$$S_*(\Delta_N, f) = h_N \sum_{i=1}^N (k_N \sum_{j=1}^N m_{ij}) \leq h_N \sum_{i=1}^N \Phi(\xi_i) \leq S^*(\Delta_N, f).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим

$$(1) \quad \lim_N \sum_{i=1}^N \Phi(\xi_i) h_N = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy \quad (\text{при любом выборе точек } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]),$$

(2) $\Phi(x)$ интегрируема, ибо

$$\begin{aligned} S^*(\Delta_N, \Phi) - S_*(\Delta_N, \Phi) &= h_N \sum_{i=1}^N [\sup_{[x_{i-1}, x_i]} \Phi(x) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \Phi(x)] \\ &\leq h_N k_N \sum_{i,j} [M_{ij} - m_{ij}] \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_a^b \Phi(x) dx = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

2. З а м е ч а н и е. Из доказательства п. 1 видно, что y можно считать вектором, так что если $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, $\Pi = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$, то

$$\int_{\Pi} \dots \int f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n = \int_{a^1}^{b^1} \left(\int_{\Pi'} \dots \int f(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n \right) dx^1,$$

где $\Pi' = [a^2, b^2] \times \dots \times [a^n, b^n]$. Таким образом, для интегрируемой функции $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место формула

$$\int_{\Pi} \dots \int f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n = \int_{a^1}^{b^1} dx^1 \int_{a^2}^{b^2} dx^2 \dots \int_{a^n}^{b^n} f(x^1, \dots, x^n) dx^n.$$

3. [Общий случай]. Пусть Ω — J -измеримо в пространстве \mathbb{R}^n переменных x^1, \dots, x^n , π_1 — проекция Ω на ось Ox^1 и $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и интегрируема. Пусть J -измеримы множества $\Omega(x^1) \equiv \{(x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x^1, \dots, x^n) \in \Omega\}$ (в \mathbb{R}^{n-1}) и π_1 (в \mathbb{R}^1). Тогда

$$\int_{\Omega} \dots \int f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n = \int_{\pi_1} dx^1 \int_{\Omega(x^1)} f(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n.$$

¶ Поместим Ω в параллелепипед $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $\Pi = [a, b] \times \Pi'$, где Π' — параллелепипед в пространстве \mathbb{R}^{n-1} переменных x^2, \dots, x^n . Положим $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x \in \Pi \setminus \Omega. \end{cases}$

Тогда с учётом п. 2 (см. выше) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) dx &= \int_{\Pi} \tilde{f}(x) dx = \int_a^b dx^1 \int_{\Pi'} \tilde{f}(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{\pi_1} dx^1 \int_{\Pi'} \tilde{f}(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n + \int_{[a,b] \setminus \pi_1} dx^1 \int_{\Pi'} \tilde{f}(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{\pi_1} dx^1 \int_{\Omega(x^1)} f(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n + \int_{\pi_1} dx^1 \int_{\Pi' \setminus \Omega(x^1)} \tilde{f}(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n \\ &= \int_{\pi_1} dx^1 \int_{\Omega(x^1)} f(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n, \end{aligned}$$

$$\text{ибо } \int_{[a,b] \setminus \pi_1} dx^1 \int_{\Pi'} \tilde{f}(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n = \int_{\pi_1} dx^1 \int_{\Pi' \setminus \Omega(x^1)} \tilde{f}(x^1, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n = 0. \square$$

4. З а м е ч а н и е. Измеримость по Жордану множеств π_1 и $\Omega(x^1)$ не следует из J -измеримости Ω (см. 116.9).

5. П р и м е р. Вычислим $J = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$, где

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Имеем $J = \int_{-1}^1 dx \iint_{\Omega(x)} z dy dz$, где $\Omega(x) = \{(y, z) : z \geq 0, y^2 + z^2 \leq 1 - x^2\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{(1-x^2-y^2)^{1/2}} z dz = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

§124. Замена переменных в кратном интеграле

Данную тему обычно не удаётся изложить на лекциях со всей необходимой строгостью, поэтому ряд моментов в последующем изложении носит эвристический характер.

1. Изменение меры при преобразовании координат. Для простоты изложения ограничимся плоским случаем. Пусть на плоскости \mathbb{R}^2 точек (u, v) задана J -измеримая открытая линейно связная область Ω , Φ — биективное преобразование области Ω на область Ω' переменных (x, y) в другом экземпляре \mathbb{R}^2 : $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, $(u, v) \in \Omega$. Будем считать, что Φ — гладкое отображение, то есть Φ непрерывно дифференцируемо и $\Phi'(u, v)$ допускает непрерывное продолжение на

Ω^- . Пусть далее $J(u, v) = \det \Phi'(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$, $(u, v) \in \Omega$. Как найти жорданову меру множества Ω' ? Рассмотрим малый прямоугольник $\Pi \subset \Omega$ с вершинами

$$P_1 = (u, v), \quad P_2 = (u + du, v), \quad P_3 = (u + du, v + dv), \quad P_4 = (u, v + dv).$$

После преобразования Φ вершины Π преобразуются соответственно в точки

$$\begin{aligned} P'_1 &= (x(u, v), y(u, v)), \quad P'_2 = (x(u + du, v), y(u + du, v)), \\ P'_3 &= (x(u + du, v + dv), y(u + du, v + dv)), \quad P'_4 = (x(u, v + dv), y(u, v + dv)). \end{aligned}$$

Заменим множество $\Phi(\Pi)$ на параллелограмм Π' с вершинами в точках (x, y) , $(x + \frac{\partial x}{\partial u} du, y + \frac{\partial y}{\partial u} du)$, $(x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, y + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv)$, $(x + \frac{\partial x}{\partial v} dv, y + \frac{\partial y}{\partial v} dv)$, координаты которых отличаются от координат соответственно точек P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 на величины высшего порядка малости по сравнению со смещениями du, dv . Площадь

параллелограмма Π' равна $m(\Pi') = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{vmatrix} \right| = |J(u, v)| du dv$ (точки исход-

ного прямоугольника можно занумеровать так, чтобы $du, dv > 0$). Разбивая теперь исходную область Ω сетками малых прямоугольников так, чтобы $|\Delta| \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} m(\Omega') &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i m(\Phi(\Pi_i)) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i m(\Pi'_i) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i |J(u_i, v_i)| m(\Pi_i) \\ &= \iint_{\Omega} |J(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

2. Т е о р е м а [о замене переменных]. Пусть $\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$ — J -измеримая открытая линейно связная область и отображение $\Phi : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает свойствами:

(1) Φ биективно отображает Ω на область $\Omega'(\subset \mathbb{R}^n)$ (биективность может нарушаться на границе Ω).

(2) Φ гладкое отображение, $J(x) = \det \Phi'(x) \neq 0$ ($x \in \Omega$). Если $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, то $\int_{\Omega'} f(y) dy = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |J(x)| dx$.

¶ Разобьём Ω кубической сеткой на части $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ (это линейно связные множества). Множества $\Omega'_i = \Phi(\Omega_i)$ ($i = \overline{1, s}$) образуют разложение Δ' множества Ω' . С учётом п. 1 и 122.6 найдутся $x_i \in \Omega_i$, что $m(\Omega'_i) = \int_{\Omega_i} |J(x)| dx = |J(x_i)| m(\Omega_i)$.

Положим теперь $y_i = \Phi(x_i)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f(y) dy &= \lim_{|\Delta'| \rightarrow 0} \sum_i f(y_i) m(\Omega'_i) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i f(\Phi(x_i)) |J(x_i)| m(\Omega_i) \\ &= \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |J(x)| dx. \quad \square \end{aligned}$$

3. П р и м е р. Пусть Ω — J -измеримое открытое линейно связное множество в \mathbb{R}^2 с полярными координатами $(r, \varphi) : \Omega \subset \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$. Преобразование $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ определяет биективное преобразование Ω на область Ω' в \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами. Тогда $J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r > 0$, $(r, \varphi) \in \Omega$. Поэтому $\iint_{\Omega'} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$. Здесь можно заменить Ω и Ω' соответственно на Ω^- и Ω'^- (см. 122.1).

§125. Площадь поверхности

Пусть поверхность S в \mathbb{R}^3 описывается уравнением

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega^-,$$

где Ω — J -измеримая открытая область, а функция f — гладкая на Ω^- . Пусть $\Delta(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ — разложение Ω и $(x_i, y_i) \in \Omega_i$ — произвольные точки. Цилиндр с основанием Ω_i и образующими параллельными оси Oz вырежет на поверхности S часть S_i : пусть L_i — часть касательной плоскости к поверхности в точке $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$, лежащая внутри этого цилиндра. По определению площадь поверхности S равна пределу (если он существует) $\sigma = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i m(L_i)$, где $m(L_i)$ — плоская жорданова мера множества L_i . Косинус острого угла нормали n_i к S в точке $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ с осью Oz равен (см. §79)

$$\cos(n_i, z) = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Очевидно, Ω_i есть ортогональная проекция L_i на плоскость XOY , и следовательно $m(\Omega_i) = m(L_i) \cos(n_i, z)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right)^2 \right]^{1/2} m(\Omega_i) \\ &= \iint_{\Omega} \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dx dy.\end{aligned}$$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§126. Интеграл с особенностью в одном из концов

Для многих приложений интеграла Римана на числовой прямой и в \mathbb{R}^n желательно иметь процедуру, позволяющую интегрировать по неограниченным областям или по ограниченным областям интегрировать неограниченные функции. За счёт введения дополнительного предельного перехода можно расширить понятие интеграла Римана на указанные ситуации. Рассмотрим сначала случай числовой прямой.

1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, и функция $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на каждом отрезке вида $[a, x]$ ($a < x < b$). Формальный символ

$$\int_a^b f(t) dt \quad (1)$$

называется *интегралом от функции f с особенностью в правом конце* (точке b), если либо $b = +\infty$, либо $b \in \mathbb{R}$ и f не ограничена на промежутке $[a, b)$. Интеграл (1) называется *сходящимся*, если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt$; в этом случае символ (1) используется также для обозначения предела

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt. \quad (2)$$

Если указанный предел не существует, интеграл (1) называется *расходящимся*. Аналогично определяется интеграл с особенностью в левом конце.

З а м е ч а н и я. 2. Из определения п. 1 следует, что интеграл с особенностью заведомо не существует как интеграл Римана. Однако, если $b \in \mathbb{R}$ и $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману, то равенство (2) справедливо (!!). Поэтому иногда удобно говорить об интеграле (1), допуская, что либо он определён как интеграл Римана (его тогда называют собственным интегралом), либо он имеет особенность в точке b (тогда его называют несобственным).

3. Из определения интеграла с особенностью в правом конце следует, что интеграл (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_c^b f(t) dt$ при некотором c ($a < c < b$).

4. П р и м е р. Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) имеет особенность в 0;

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-\alpha} [1 - \varepsilon^{1-\alpha}] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \varepsilon = +\infty$. Таким образом, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

§127. Свойства интеграла с особенностью

Следующее свойство вытекает непосредственно из 126.1:

1. Если интегралы $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b g(t) dt$ с особенностью в точке b сходятся, то для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ сходится $\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt$, причём

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

Отметим, что интеграл в левой части написанного равенства может оказаться даже собственным.

2. З а м е ч а н и е. Из сходимости интегралов $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b g(t) dt$ с особенностью в точке b не следует сходимости интеграла $\int_a^b f(t)g(t) dt$. (Например, положим $f(t) = g(t) = t^{-1/2}$ ($0 < t \leq 1$) и учтём 126.4.)

3. [Критерий Коши]. Интеграл $\int_a^b f(t) dt$ с особенностью в b сходится тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists c < b \forall x, y \in (c, b) (|\int_x^y f(t) dt| < \varepsilon)$.

¶ Положим $F(z) = \int_a^z f(t) dt$ ($a \leq z < b$). Согласно 126.1 наш интеграл сходится тогда существует $\lim_{z \rightarrow b-} F(z)$. По критерию Коши 19.4 $\lim_{z \rightarrow b-} F(z)$ существует тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists c < b \forall x, y \in (c, b) (|F(x) - F(y)| < \varepsilon)$. Осталось заметить, что

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \left(\int_a^x f(t) dt + \int_x^y f(t) dt \right) \right| = \left| \int_x^y f(t) dt \right|. \quad \square$$

4. [Формула Ньютона-Лейбница]. Пусть $F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, существует $F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$, $F'(x)$ ($a < x < b$) непрерывна, причём определено $F'(a+)$. Тогда $\int_a^b F'(t) dt = F(b-) - F(a)$, где интеграл в левой части равенства, возможно, имеет особенность в правом конце.

¶ Если интеграл $\int_a^b F'(t) dt$ собственный, то формула доказана ранее (см. 52.1). Пусть имеется особенность в точке b . Из формулы Ньютона-Лейбница для интегралов Римана имеем

$$F(b-) - F(a) = \lim_{x \rightarrow b-} [F(x) - F(a)] = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x F'(t) dt = \int_a^b F'(t) dt. \quad \square$$

5. У п р а ж н е н и е. Написать формулу Ньютона-Лейбница для интеграла с особенностью в левом конце и дать её вывод.

6. П р и м е р. Функция $F(x) = 2\sqrt{x}$ непрерывна на $[0,1]$ и $F'(x) = x^{-1/2}$ непрерывна на $(0,1)$, $F'(1-) = 1$, так что $\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$.

§128. Интегралы от неотрицательных функций

Изучение признаков сходимости интегралов с особенностью начнём со случая интегралов от неотрицательных функций.

1. В этом § всюду предполагается, что промежуток $[a, b)$, возможно, неограничен справа, функции $f(t)$, $g(t)$ ($a \leq t < b$) неотрицательны, и интегралы

$$\int_a^b f(t) dt, \int_a^b g(t) dt \quad (*)$$

имеют особенности в правом конце. В случае неотрицательной функции f будем писать $\int_a^b f(t) dt < +\infty$, если этот интеграл сходится. В указанных соглашениях:

2. Функция $F(x) \equiv \int_a^x f(t) dt$ ($a \leq x < b$) не убывает. При этом $F(x)$ ограничена тогда и только тогда $\int_a^b f(t) dt < +\infty$.

3. Пусть $f(t) \leq g(t)$ ($a \leq t < b$). Тогда

$$(a) \int_a^b g(t) dt < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(t) dt < +\infty; \text{ при этом } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt,$$

$$(б) \text{ если } \int_a^b f(t) dt \text{ расходится, то расходится и } \int_a^b g(t) dt.$$

4. Пусть $g(t) > 0$ и $\lim_{t \rightarrow b-} \frac{f(t)}{g(t)} = \alpha > 0$. Тогда интегралы $(*)$ сходятся или расходятся одновременно.

¶ Докажем п. 3(а) и часть п. 4 (остальные утверждения – (!)).

Если $\int_a^b g(t) dt < +\infty$, то существует $M = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x g(t) dt$. Из неравенства $\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x g(t) dt$ ($x < b$) следует, что $\int_a^x f(t) dt \leq M$ ($x < b$). Поэтому $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt \leq M < +\infty$.

В условиях п. 4 пусть ε ($0 < \varepsilon < \alpha$) произвольно. Тогда существует $c < b$, что $\alpha - \varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < \alpha + \varepsilon$ ($c < t < b$), то есть $(\alpha - \varepsilon)g(t) < f(t) < (\alpha + \varepsilon)g(t)$ ($c < t < b$). Пусть, например, $\int_a^b f(t) dt < +\infty$. Тогда $\int_c^b f(t) dt < +\infty$ и $\int_c^b g(t) dt \leq \frac{1}{\alpha - \varepsilon} \int_c^b f(t) dt < +\infty$. С учётом 126.3 отсюда следует, что $\int_a^b g(t) dt < +\infty$. □

5. П р и м е р. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx < +\infty$. {Положим в п. 3 $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, $g(x) = e^{-x}$ ($1 \leq x < +\infty$).}

6. У п р а ж н е н и е. Исследовать на сходимость интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$, $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} dx$ ($\alpha, \lambda > 0$).

§129. Связь несобственных интегралов с рядами

1. Читатель, несомненно, уже заметил аналогию между интегралами с особенностью и числовыми рядами. Отметим ряд точных утверждений на этот счёт. Пусть интеграл

$$\int_a^b f(t) dt \quad (1)$$

имеет особенность в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и последовательность x_n такова, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, $x_n \rightarrow b$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) dt. \quad (2)$$

2. Если интеграл (1) сходится, то сходится и ряд (2), причём

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) dt. \quad (3)$$

¶ Имеем $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) dt = \lim_n \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) dt = \lim_n \left[\int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \right]$
 $= \lim_n \int_a^{x_n} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt. \quad \square$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Однако:

3. Если $f(x) \geq 0$ ($a \leq x < b$), то из сходимости ряда (2) следуют сходимость интеграла (1) и равенство (3).

¶ Пусть $s = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) dt$ и $x \in (a, b)$ произвольно. Тогда найдётся n , что $x < x_n$, и следовательно, $\int_a^x f(t) dt \leq \int_a^x + \int_x^{x_n} = \int_a^{x_n} f(t) dt$, то есть $\int_a^x f(t) dt \leq \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t) dt$. Остаётся учесть 128.2. \square

Интегральный признак сходимости числового ряда 59.1 можно сформулировать в терминах интеграла с особенностью:

4. Если функция $f(x) \geq 0$ ($x \geq 0$) не возрастает, то интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ и ряд $\sum_{j=1}^{\infty} f(j)$ сходятся или расходятся одновременно.

§130. Абсолютно сходящиеся интегралы

1. Интеграл

$$\int_a^b f(t) dt, \quad (1)$$

имеющий особенность в правом конце, называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(t)| dt$.

2. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

¶ Пусть $\int_a^b |f(t)| dt < +\infty$. В силу критерия Коши 127.3

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c < b \forall x, y \ (c < x < y < b \Rightarrow \int_x^y |f(t)| dt < \varepsilon).$$

Но тогда для указанных x, y : $\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt < \varepsilon$. Снова в силу критерия Коши это означает, что интеграл (1) сходится. \square

Как мы увидим ниже, из сходимости интеграла (1) его абсолютная сходимость не следует. Поэтому полезно располагать признаками сходимости более тонкими, чем признаки для интегралов от знакопостоянных функций. Приведём два полезных на практике признака, которые в более общей форме будут доказаны ниже (см. 135.4).

3. Пусть $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, интеграл $J = \int_a^b f(t)g(t) dt$ имеет единственную особенность в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, причём f непрерывна, а g непрерывно дифференцируема на $[a, b)$. Пусть, кроме того, выполнены условия (**признак Дирихле**)

1D) функция $F(x) = \int_x^a f(t) dt$ ($a \leq x < b$) ограничена,

2D) $g(t)$ убывает и $\lim_{t \rightarrow b-} g(t) = 0$;

либо выполнены условия (**признак Абеля**)

1A) интеграл $\int_a^b f(t) dt$ сходится,

2A) g ограничена и монотонна;

— тогда интеграл J сходится.

4. П р и м е р. Исследуем на сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Так как в левом конце особенности нет, достаточно исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Положим $f(t) = \sin t$, $g(t) = 1/t$ ($t \geq 1$), и мы находимся в условиях признака Дирихле. Итак, интеграл сходится. Однако он не сходится абсолютно. {Достаточно показать (см. 129.2), что расходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$. Это следует из оценки

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \}$$

5. У п р а ж н е н и е. Следующие интегралы исследовать на сходимость (в том числе абсолютную): $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{a^2 + t^2} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ ($\alpha > 0$).

§131. Несобственные интегралы (общий случай)

До сих пор мы имели дело с интегралами, имеющими единственную особенность в одном из концов. Приведём теперь общее определение.

1. Пусть $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Формальный символ

$$\int_a^b f(t) dt \quad (1)$$

называется *несобственным интегралом*, если существует разложение $\Delta (a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b)$ такое, что каждый из интегралов $\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(t) dt$ ($1 \leq j \leq n$) имеет особенность в одном из концов. При этом интеграл (1) называется *сходящимся*, если сходится каждый из интегралов $\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(t) dt$. В этом случае

$$\int_a^b f(t) dt \equiv \sum_{j=1}^n \int_{c_{j-1}}^{c_j} f(t) dt. \quad (2)$$

Если хотя бы один из интегралов $\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(t) dt$ расходится, то интеграл (1) называется *расходящимся*.

З а м е ч а н и я. 2. Равенство (2) корректно, то есть его правая часть не зависит от разложения Δ . (Поясним это на примере интеграла (1) с двумя особенностями в точках a и b . Пусть $a < c < c' < b$. Тогда

$$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^c + \left(\int_c^{c'} + \int_{c'}^b \right) = \left(\int_a^c + \int_c^{c'} \right) + \int_{c'}^b = \int_a^{c'} + \int_{c'}^b,$$

так как $\int_c^{c'} f(t) dt$ — обычный (собственный) интеграл Римана.)

3. В случае интеграла с особенностью внутри промежутка интегрирования следует сделать одно предостережение. Пусть интеграл (1) имеет единственную особенность в точке c ($a < c < b$). Для исследования его на сходимости мы должны установить существование пределов

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(t) dt, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{c+\varepsilon}^b f(t) dt. \quad (3)$$

Это, однако, не эквивалентно существованию предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(t) dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t) dt \right], \quad (4)$$

как может показаться на первый взгляд. Из существования (3) следует существование (4) и значение интеграла (1) совпадает с пределом (4). Однако из существования (4) ещё не следует существование (3). Существование пределов (3) следует из существования предела

$$\lim_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(t) dt + \int_{c+\eta}^b f(t) dt \right] \quad (5)$$

в смысле предела функций двух переменных (см. §66). Тем не менее, если (4) существует, то говорят, что интеграл (1) существует в смысле главного значения (*valeur principale*):

$$\text{v.p.} \int_a^b f(t) dt \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(t) dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t) dt \right].$$

Аналогично, если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ имеет особенность лишь на концах $-\infty$ и $+\infty$, то под главным значением понимается предел (если он существует) $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \equiv \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^{+N} f(t) dt$.

4. П р и м е р. Интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ расходится, так как расходится каждый из интегралов $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Однако, $\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right] = 0$.

§132. Кратные несобственные интегралы

Мы приведём не самое общее определение кратного интеграла с особенностью. Однако его вполне достаточно для большинства приложений.

1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ назовём *локально J -измеримым*, если J -измеримо каждое множество вида $B_r(\theta) \cap \Omega$ ($r > 0$). Очевидно, всякое J -измеримое множество, будучи ограниченным, локально J -измеримо.

2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ J -измеримо и невырождено (см. 118.2), $x_0 \in \Omega^-$ и $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ не ограничена на Ω , причём для любого $\varepsilon > 0$ интеграл $\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} f(x) dx$ определён как интеграл Римана. Формальный символ

$$\int_{\Omega} f(x) dx \tag{1}$$

называется *интегралом с особенностью в точке x_0* . Интеграл (1) называется *сходящимся*, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} f(x) dx. \tag{2}$$

При этом $\int_{\Omega} f(x) dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} f(x) dx$. Если предел (2) не существует, то интеграл (1) называется *расходящимся*.

Пусть теперь неограниченное множество $\Omega \subset (\mathbb{R}^n)$ локально J -измеримо, причём множество $B_r(\theta) \cap \Omega$ невырождено, коль скоро $m(B_r(\theta) \cap \Omega) > 0$. Пусть $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману по любому множеству вида $B_r(\theta) \cap \Omega$. В этом случае (1) называется интегралом с особенностью в ∞ . Интеграл (1) называется *сходящимся*, если существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \cap B_r(\theta)} f(x) dx \quad (\equiv \int_{\Omega} f(x) dx).$$

Подобно одномерному случаю определяется интеграл с конечным числом особенностей (несобственный интеграл).

З а м е ч а н и я. 3. Данное определение сходящегося интеграла с особенностью не сводится к соответствующему определению в одномерном случае (126.1, 131.1). В случае особенности внутри промежутка интегрирования приведённое здесь определение даст нам интеграл в смысле главного значения.

4. Если интеграл (1) сходится, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega \cap B_\varepsilon(x_0)} f(x) dx = 0$, когда особенность в $x_0 \in \Omega^-$, и $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\Omega \setminus B_N(\theta)} f(x) dx = 0$, когда особенность в ∞ . Отметим, что интегралы, стоящие в левых частях приведённых равенств, несобственные.

Отметим некоторые свойства введённого понятия.

5. Пусть интегралы $\int_{\Omega} f(x) dx$, $\int_{\Omega} g(x) dx$ имеют единственную особенность в точке $x_0 \in \Omega^- \cup \{\infty\}$ и сходятся. Тогда сходится интеграл $\int_{\Omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx$, причём

$$\int_{\Omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\Omega} f(x) dx + \mu \int_{\Omega} g(x) dx \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

6. Если $f(x) \geq 0$ ($x \in \Omega$) и существует константа $C > 0$ такая, что $\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x_0)} f(x) dx \leq C$ при любом $\varepsilon > 0$, то интеграл (1) с единственной особенностью в точке $x_0 \in \Omega^-$ сходится. (Это свойство легко сформулировать для случая $x_0 = \infty$.)

7. [Критерий Коши (особенность в $x_0 \in \Omega^-$)]. Интеграл (1) сходится тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall r, s \left(r < s < \delta \Rightarrow \left| \int_{[B_s(x_0) \setminus B_r(x_0)] \cap \Omega} f(x) dx \right| < \varepsilon \right).$$

8. Говорят, что несобственный интеграл (1) *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int_{\Omega} |f(x)| dx$. Отметим, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

¶ Например, в случае единственной особенности в точке $x_0 \in \Omega^-$ это следует из п. 7 и оценки

$$\left| \int_{[B_s(x_0) \setminus B_r(x_0)] \cap \Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{[B_s(x_0) \setminus B_r(x_0)] \cap \Omega} |f(x)| dx \quad (r < s).$$

Примеры. 9. Интеграл $J = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha} dx dy dz$ ($\alpha > 0$), где $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, имеет единственную особенность в точке $(0, 0, 0)$. При этом

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \iiint_{\Omega \cap B_{\varepsilon}(\theta)^c} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha} dx dy dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 r^{2-2\alpha} dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 4\pi \int_{\varepsilon}^1 r^{2-2\alpha} dr. \end{aligned}$$

Итак, J сходится при $\alpha < 3/2$ и расходится при $\alpha \geq 3/2$.

10. Вычислим $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ с использованием двойного несобственного интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\int_0^N \int_0^N e^{-x^2-y^2} dx dy \right]^{1/2} \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r e^{-r^2} dr \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

11. У п р а ж н е н и е. Для $\alpha > 0$ исследовать на сходимость интеграл $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha} dx dy dz$, где $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$.

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§133. Непрерывность собственных интегралов по параметру

1. При сведении кратных интегралов к повторным мы встречались с интегралами вида

$$F(x^1, \dots, x^n) = \int_{\Omega''} f(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) dy^1 \dots dy^m. \quad (*)$$

Здесь $\Omega'' \subset \mathbb{R}^m$, а вектор $x = (x^1, \dots, x^n)$ не зависит от переменных y^1, \dots, y^m и играет роль параметра. Настоящий раздел посвящён изучению функций, заданных интегралами указанного вида (возможно, несобственными). Нас будут интересовать вопросы такого сорта: будет ли непрерывна функция F , если непрерывна f ? существует ли $\frac{\partial F}{\partial x^j}$, если существует $\frac{\partial f}{\partial x^j}$? справедливо ли равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^n) = \int_{\Omega''} \frac{\partial f}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m) dy^1 \dots dy^m?$$

и т. д. Начнём изучение со случая собственных интегралов.

2. Пусть множества $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega'' \subset \mathbb{R}^m$ компактны, Ω'' J -измеримо, $\Omega = \Omega' \times \Omega'' (\subset \mathbb{R}^{n+m})$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда функция F , заданная равенством (*), также непрерывна.

¶ Утверждение очевидно, если $m(\Omega'') = 0$. Пусть $m(\Omega'') > 0$. Множество $\Omega' \times \Omega''$ компактно в \mathbb{R}^{n+m} (см. §107), так что функция f равномерно непрерывна на Ω , то есть (обозначая $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^m)$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z, z_1 \in \Omega \left(\|z - z_1\| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| < \frac{\varepsilon}{m(\Omega'')} \right).$$

Если теперь $\|x - x_1\| < \delta$ ($x, x_1 \in \Omega'$), то для векторов $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y)$ ($y \in \Omega''$) имеем $\|z - z_1\| = \|x - x_1\| < \delta$ и, следовательно,

$$\left| \int_{\Omega''} f(x, y) dy - \int_{\Omega''} f(x_1, y) dy \right| \leq \int_{\Omega''} |f(x, y) - f(x_1, y)| dy < \frac{\varepsilon}{m(\Omega'')} \cdot \int_{\Omega''} dy = \varepsilon. \quad \square$$

В следующем утверждении параметр входит не только в подынтегральную функцию, но и в пределы интегрирования.

3. Пусть φ, ψ — непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$), и функция $f(x, y)$ задана и непрерывна на множестве $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Тогда функция $F(x) \equiv \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ непрерывна на $[a, b]$.

¶ Из условий следует, что Ω компактно. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Введём константы (их конечность следует из условий теоремы): $\alpha = \inf_{x \in [a, b]} \varphi(x)$, $\beta = \sup_{x \in [a, b]} \psi(x)$.

Доопределим f на прямоугольнике $[a, b] \times [\alpha, \beta]$, полагая

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in \Omega, \\ f(x, \psi(x)), & \text{если } x \in [a, b], \psi(x) < y \leq \beta, \\ f(x, \varphi(x)), & \text{если } x \in [a, b], \alpha \leq y < \varphi(x) \end{cases}$$

(\tilde{f} — непрерывное продолжение f на указанный прямоугольник (!!)). Пусть $M > 0$ таково, что $|\tilde{f}(x, y)| \leq M$ ($(x, y) \in \Omega$), а $\delta > 0$ таково, что одновременно выполняются оценки:

$$\forall x, x' \in [a, b] \left(|x - x'| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x')|, |\psi(x) - \psi(x')| < \frac{\varepsilon}{3M} \right),$$

$$\begin{aligned} \forall (u, v), (u', v') \in [a, b] \times [\alpha, \beta] \left(\|(u, v) - (u', v')\| < \delta \right. \\ \left. \Rightarrow |\tilde{f}(u, v) - \tilde{f}(u', v')| < \frac{\varepsilon}{3(\beta - \alpha)} \right). \end{aligned}$$

Если теперь $|x - x'| < \delta$, $(x, x' \in [a, b])$, то

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x')| &= \left| \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy - \int_{\varphi(x')}^{\psi(x')} f(x', y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} [\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x', y)] dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \tilde{f}(x', y) dy - \int_{\varphi(x')}^{\psi(x')} \tilde{f}(x', y) dy \right| \\ &\leq \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} |\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x', y)| dy + \left| \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x')} \tilde{f}(x', y) dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{\varphi(x')}^{\psi(x')} \tilde{f}(x', y) dy + \int_{\psi(x')}^{\psi(x)} \tilde{f}(x', y) dy - \int_{\varphi(x')}^{\psi(x')} \tilde{f}(x', y) dy \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3(\beta - \alpha)} [\psi(x) - \varphi(x)] + \left| \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x')} \tilde{f}(x', y) dy \right| + \left| \int_{\psi(x')}^{\psi(x)} \tilde{f}(x', y) dy \right| \\ &\leq \varepsilon/3 + M|\varphi(x') - \varphi(x)| + M|\psi(x) - \psi(x')| < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

4. Т е о р е м а [об интегрировании по параметру]. В условиях п. 3

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

В частности, $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$.

¶ Это следствие п. 3 и §123. Отметим, что из 123.1 следует лишь, что функция $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ ($a \leq x \leq b$) интегрируема по x . Из п. 3 следует дополнительно, что F непрерывна. \square

5. П р и м е р. Вычислим $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx$. Непосредственно применить теорему п. 2 здесь не удаётся. Так как нас интересует значение предела в точке 0, ограничимся промежутком $0 < \sigma \leq 1$. Пусть сначала $0 < a < b$. Тогда функция

$$f(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, & \text{если } \sigma > 0, a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } \sigma = 0, a \leq x \leq b, \end{cases}$$

— непрерывное продолжение подынтегральной функции на прямоугольник $\{(x, \sigma) : a \leq x \leq b, 0 \leq \sigma \leq 1\}$ (!). Из п. 2

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \int_a^b f(x, \sigma) dx = \int_a^b f(x, 0) dx = 0.$$

Аналогично равен нулю предел интеграла при $a < b < 0$. Пусть $a = 0 < b$. Подынтегральная функция в этом случае не продолжается по непрерывности на прямоугольник $[0, b] \times [0, 1]$. Делая в интеграле замену $t = x/\sigma$, имеем

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{b/\sigma} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

С учётом 132.10 имеем окончательно

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \notin [a, b], \\ 1/2, & \text{если } a = 0 \text{ или } b = 0, \\ 1, & \text{если } 0 \in (a, b). \end{cases}$$

§134. Дифференцирование собственных интегралов

1. Пусть $\Omega = U \times [c, d]$, где U открыто в \mathbb{R} , и $f, \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на Ω . Тогда

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \quad (x \in U).$$

¶ Положим $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ ($x \in U$). Пусть $[a, b] \subset U$ и $a < x < b$. По формуле Лагранжа имеем для малых h

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_c^d \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y) dy,$$

здесь $0 < \theta < 1$. Применяя 133.2 к $\Omega' = [a, b]$, $\Omega'' = [c, d]$, имеем

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(x+h) - F(x)] = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy. \quad \square$$

2. Пусть $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, дифференцируемы на (a, b) , $\varphi(x) \leq \psi(x)$. Функция f задана и непрерывна на $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, а $\frac{\partial f}{\partial x}$ определена и непрерывна в точках $(x, y) \in \Omega$ таких, что $a < x < b$. Тогда

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy = f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \quad (a < x < b).$$

¶ Пусть \tilde{f} — продолжение f , рассмотренное в 133.3. Полагая $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$ ($a < x < b$), имеем для малых h :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] &= \frac{1}{h} \left[\int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x+h, y) dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] \\
&= \frac{1}{h} \int_{\varphi(x+h)}^{\varphi(x)} \tilde{f}(x+h, y) dy + \frac{1}{h} \int_{\psi(x)}^{\psi(x+h)} \tilde{f}(x+h, y) dy \\
&\quad + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{1}{h} [\tilde{f}(x+h, y) - \tilde{f}(x, y)] dy.
\end{aligned}$$

Используя формулу Лагранжа и непрерывность $\frac{\partial f}{\partial x}$, имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{1}{h} [\tilde{f}(x+h, y) - \tilde{f}(x, y)] dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

С учётом теоремы о среднем (см. 50.4) имеем при $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} \int_{\psi(x)}^{\psi(x+h)} \tilde{f}(x+h, y) dy &= \tilde{f}(x+h, \psi(x) + \theta[\psi(x+h) - \psi(x)]) \cdot \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \\
&\rightarrow f(x, \psi(x))\psi'(x).
\end{aligned}$$

Аналогично, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi(x+h)}^{\varphi(x)} \tilde{f}(x+h, y) dy = -f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$. \square

3. П р и м е р. Пусть $J(\sigma) = \int_a^b \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} dx$ ($\sigma > 0$). Найдём $\frac{d}{d\sigma} J(\sigma)$. Функции $\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$, $\frac{d}{d\sigma} \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} = \frac{x^2}{\sigma^3} \cdot \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$ ($a \leq x \leq b$) непрерывны. Согласно п. 1 $\frac{d}{d\sigma} J(\sigma) = \frac{1}{\sigma^3} \int_a^b x^2 \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\} dx$.

§135. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Для изучения функций, заданных несобственными интегралами, зависящими от параметра, привлечём (новое для нас) важное понятие равномерной сходимости таких интегралов.

1. Пусть A — абстрактное множество (параметров) и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ локально J -измеримо. Пусть $f: A \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что интеграл

$$J(\alpha) = \int_{\Omega} f(\alpha, x) dx, \quad \alpha \in A \tag{1}$$

обладает единственной особенностью в точке $x_0 \in \Omega^- \cup \{\infty\}$, не зависящей от α , и сходится при любом $\alpha \in A$. Говорят, что интеграл $J(\alpha)$ *сходится равномерно*, если (случай $x_0 \in \Omega^-$):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall \delta < \delta_0 \forall \alpha \in A \left(\left| \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx \right| < \varepsilon \right)$$

либо (случай $x_0 = \infty$):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 > 0 \forall N > N_0 \forall \alpha \in A \left(\left| \int_{\Omega \setminus B_N(\theta)} f(\alpha, x) dx \right| < \varepsilon \right).$$

2. З а м е ч а н и е. Более сложным является случай, когда особенность зависит от параметра. Например, в интеграле $\int_0^1 \frac{dx}{|x - \beta|^c}$ особенность зависит от $\alpha = (\beta, \gamma)$. Этим случаем мы заниматься не будем.

Отметим простой, но полезный признак равномерной сходимости.

3. [Признак Вейерштрасса]. Пусть интеграл (1) обладает единственной особенностью в точке $x_0 \in \Omega^- \cup \{\infty\}$, причём существует функция $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $|f(\alpha, x)| \leq \varphi(x)$ для любых $(\alpha, x) \in A \times \Omega$ и, кроме того, интеграл $\int_{\Omega} \varphi(x) dx$ сходится. Тогда интеграл $J(\alpha)$ сходится равномерно.

¶ Пусть, например, особенность $x_0 \in \Omega^-$ — собственная точка. По условию признака $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \left(\int_{\Omega \cap B_{\delta_0}(x_0)} \varphi(x) dx < \varepsilon \right)$. Поэтому $\forall \delta < \delta_0$:

$$\left| \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx \right| \leq \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} |f(\alpha, x)| dx \leq \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} \varphi(x) dx \leq \int_{\Omega \cap B_{\delta_0}(x_0)} \varphi(x) dx < \varepsilon. \square$$

Признак Вейерштрасса может сработать в случае, когда интеграл (1) сходится абсолютно. Приведём достаточный признак равномерной сходимости (в случае Ω — отрезок в \mathbb{R}^1), который может оказаться полезным, когда абсолютной сходимости нет.

4. Пусть A — множество параметров и интеграл

$$K(\alpha) = \int_a^b f(\alpha, x) g(\alpha, x) dx \quad (\alpha \in A)$$

имеет единственную особенность в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, причём $f(\alpha, x)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(\alpha, x)$ непрерывны по x при каждом α . Если, кроме того, выполнены условия (**признак Дирихле**)

1D) существует $M > 0$ такое, что

$$\forall \eta < b \forall \alpha \in A \left(\left| \int_a^{\eta} f(\alpha, x) dx \right| \leq M \right),$$

2D) $g(\alpha, x)$ монотонно убывает по x при каждом α , причём

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c < b \forall \alpha \in A (x \in (c, b) \Rightarrow |g(\alpha, x)| < \varepsilon);$$

либо выполнены условия (**признак Абеля**)

1A) интеграл $\int_a^b f(\alpha, x) dx$ сходится равномерно,

2A) g ограничена как функция двух переменных и монотонна по x при каждом $\alpha \in A$;

— тогда интеграл $K(\alpha)$ сходится равномерно.

¶ Признак Дирихле. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, и c выбрано согласно 2D. Интегрируя по частям, имеем при $c < \delta < \xi < b$

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\xi} f(\alpha, x) g(\alpha, x) dx &= g(\alpha, x) \int_{\delta}^x f(\alpha, y) dy \Big|_{\delta}^{\xi} - \int_{\delta}^{\xi} \left[\frac{\partial g(\alpha, x)}{\partial x} \int_{\delta}^x f(\alpha, y) dy \right] dx \\ &= g(\alpha, \xi) \int_{\delta}^{\xi} f(\alpha, y) dy - \int_{\delta}^{\xi} \left[\frac{\partial g(\alpha, x)}{\partial x} \int_{\delta}^x f(\alpha, y) dy \right] dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Из оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta}^{\xi} f(\alpha, x) g(\alpha, x) dx \right| &\leq 2M\varepsilon + 2M \int_{\delta}^{\xi} \left| \frac{\partial g(\alpha, x)}{\partial x} \right| dx = 2M\varepsilon - 2M \int_{\delta}^{\xi} \frac{\partial g(\alpha, x)}{\partial x} dx \\ &= 2M\varepsilon + 2M[g(\alpha, \delta) - g(\alpha, \xi)] \leq 4M\varepsilon \end{aligned}$$

следует

$$\left| \int_{\delta}^b f(\alpha, x) g(\alpha, x) dx \right| = \lim_{\xi \rightarrow b-} \left| \int_{\delta}^{\xi} f(\alpha, x) g(\alpha, x) dx \right| \leq 4M\varepsilon.$$

Признак Абеля. Пусть $|g(\alpha, x)| \leq M$ ($\alpha \in A$, $a \leq x < b$), $\varepsilon > 0$ произвольно и c таково, что (см. 1A) $\forall \delta, \xi$ ($c < \delta < \xi < b \Rightarrow \left| \int_{\delta}^{\xi} f(\alpha, y) dy \right| < \varepsilon$). Пусть для определённости $g(\alpha, x)$ не убывает по x при каждом α , так что $\frac{\partial g(\alpha, x)}{\partial x} \geq 0$. Из равенства (2) имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta}^{\xi} f(\alpha, x) g(\alpha, x) dx \right| &\leq M\varepsilon + \int_{\delta}^{\xi} \frac{\partial g(\alpha, x)}{\partial x} \left| \int_{\delta}^x f(\alpha, y) dy \right| dx \leq \varepsilon \left[M + \int_{\delta}^{\xi} \frac{\partial g(\alpha, x)}{\partial x} dx \right] \\ &= \varepsilon [M + g(\alpha, \xi) - g(\alpha, \delta)] \leq 3\varepsilon M. \quad \square \end{aligned}$$

5. П р и м е р. Исследуем на равномерную сходимость интеграл $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot \frac{\sin t}{t} dt$ ($\alpha \geq 0$). Признак Вейерштрасса неприменим, так как $I(0)$ сходится не абсолютно (см. 130.4). Применим признак Абеля, полагая $f(\alpha, t) = \frac{\sin t}{t}$, $g(t) = e^{-\alpha t}$. Условие 1A удовлетворяется в силу 130.4 (функция f от параметра α не зависит!). Так как $e^{-\alpha t} \leq 1$ ($\alpha, t \geq 0$), 2A также выполнено. Итак, $I(\alpha)$ сходится равномерно.

§136. Операции над несобственными интегралами, зависящими от параметра

Сначала установим свойство непрерывности интеграла по параметру и сформулируем условия, при которых такой интеграл можно интегрировать по параметру.

1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ замкнуты, а интеграл

$$J(\alpha) = \int_{\Omega} f(\alpha, x) dx, \quad \alpha \in A,$$

имеет единственную особенность в точке $x_0 \in \Omega \cup \{\infty\}$ и сходится равномерно. Допустим ещё, что подынтегральная функция $f(\alpha, x)$ непрерывна (кроме, быть может, точек вида (α, x_0) в случае, если особенность $x_0 \in \Omega$). Тогда

- 1) $J(\alpha)$ — непрерывная функция параметра α ,
- 2) если к тому же A J -измеримо, то

$$\int_A J(\alpha) d\alpha = \int_{\Omega} dx \int_A f(\alpha, x) d\alpha.$$

¶ Установим 1). Пусть $\alpha_0 \in A$ фиксировано и $A_0 = B_r[\alpha_0] \cap A$. Достаточно доказать непрерывность $J(\alpha)$ ($\alpha \in A_0$) в точке α_0 . Пусть, например, особенность $x_0 \in \Omega$ — собственная точка. Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу равномерной сходимости интеграла $J(\alpha)$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\forall \delta < \delta_0 \quad \forall \alpha \in A \quad \left(\left| \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx \right| < \varepsilon/3 \right).$$

Множества A_0 , $\Omega \setminus B_{\delta}(x_0)$ ограничены и замкнуты, так что к интегралу $\int_{\Omega \setminus B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx$ применима теорема 133.2: существует $\lambda > 0$ ($\lambda < r$) такое, что

$$\|\alpha - \alpha_0\| < \lambda \Rightarrow \left| \int_{\Omega \setminus B_{\delta}(x_0)} [f(\alpha, x) - f(\alpha_0, x)] dx \right| < \varepsilon/3.$$

Таким образом, $\|\alpha - \alpha_0\| < \lambda$ влечёт

$$\begin{aligned} |J(\alpha) - J(\alpha_0)| &\leq \left| \int_{\Omega \setminus B_{\delta}(x_0)} [f(\alpha, x) - f(\alpha_0, x)] dx \right| + \left| \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} f(\alpha_0, x) dx \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Переходим к доказательству свойства 2). Мы имеем

$$\int_A J(\alpha) d\alpha = \int_A d\alpha \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx + \int_A d\alpha \int_{\Omega \setminus B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx. \quad (1)$$

В силу равномерной сходимости интеграла $J(\alpha)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \left| \int_A d\alpha \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx \right| \leq m(A) \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup_{\alpha \in A} \left| \int_{\Omega \cap B_{\delta}(x_0)} f(\alpha, x) dx \right| = 0. \quad (2)$$

Второй интеграл в правой части (1) является собственным, и в нём можно изменить порядок интегрирования. Переходя затем к пределу при $\delta \rightarrow 0+$ в (1), получим с учётом (2)

$$\int_A J(\alpha) d\alpha = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\Omega \setminus B_\delta(x_0)} dx \int_A f(\alpha, x) d\alpha = \int_\Omega dx \int_A f(\alpha, x) d\alpha. \quad \square$$

Следующее свойство касается условия дифференцирования несобственного интеграла по параметру. Ограничимся случаем, когда множество параметров — отрезок числовой прямой.

2. Пусть Ω замкнуто, интеграл $J(\alpha) = \int_\Omega f(\alpha, x) dx$ ($a \leq \alpha \leq b$) имеет един-

ственную особенность в точке $x_0 \in \Omega \cup \{\infty\}$. Допустим ещё, что $f(\alpha, x)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)$ непрерывны на $[a, b] \times \Omega$ (кроме точек вида (α, x_0) в случае, когда особенность $x_0 \in \Omega$). Пусть

(i) $J(\alpha)$ сходится при любом $\alpha \in [a, b]$,

(ii) $J_1(\alpha) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) dx$ сходится равномерно на $[a, b]$,

$$\text{Тогда } \frac{d}{d\alpha} \int_\Omega f(\alpha, x) dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) dx.$$

¶ Достаточно проверить, что $J(\alpha)$ — первообразная для $J_1(\alpha)$. С учётом п. 1 имеем

$$\begin{aligned} \int_a^\xi J_1(\alpha) d\alpha &= \int_\Omega dx \int_a^\xi \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) d\alpha = \int_\Omega [f(\xi, x) - f(a, x)] dx \\ &= \int_\Omega f(\xi, x) dx + C = J(\xi) + C. \quad \square \end{aligned}$$

3. П р и м е р. Вычислим $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Для этого рассмотрим интеграл $K(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cdot \frac{\sin \beta t}{t} dt$ ($\beta \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$). Считая подынтегральную функцию равной β при $t = 0$, из 135.5 находим, что при фиксированном β интеграл $K(\alpha, \beta)$ сходится равномерно по α . Поэтому

$$J = K(0, 1) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} K(\alpha, 1). \quad (3)$$

Пусть $\alpha \geq 0$; из п. 2 следует, что $\frac{\partial K(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos \beta t dt$ (так как интеграл в правой части сходится равномерно по β при фиксированном α). Интегрируя (см. 43.7), находим $\frac{\partial K(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$, откуда $K(\alpha, \beta) = \arctg(\beta/\alpha) + C(\alpha)$. Однако, $C(\alpha) = K(\alpha, 0) = 0$, так что из (3) $J = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \arctg(1/\alpha) = \pi/2$.

§137. Некоторые специальные функции

Применим полученные результаты к анализу важных в приложениях специальных функций, заданных интегралами.

1. *Бэта-функция Эйлера* задаётся интегралом

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \quad (a, b > 0).$$

В указанной области интеграл сходится. Интеграл является собственным в области $\{(a, b) : a \geq 1, b \geq 1\}$. С помощью формулы Ньютона-Лейбница интеграл может быть вычислен лишь при некоторых a, b . Поэтому функцию $B(a, b)$ приходится изучать как интеграл (вообще, несобственный), зависящий от параметра. Покажем сначала, что $B(a, b)$ непрерывна.

¶ Представим $B(a, b)$ в виде $B(a, b) = B_0(a, b) + B_1(a, b)$, где

$$B_0(a, b) = \int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx, \quad B_1(a, b) = \int_{1/2}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Каждый из интегралов B_0, B_1 имеет особенность не более чем в одной точке и достаточно установить непрерывность каждого из них. Утверждение 136.1 непосредственно не применимо, так как множество параметров открыто в \mathbb{R}^2 . Поскольку непрерывность функции в точке есть свойство локальное, можно устранить это затруднение. Пусть $a_0, b_0 > 0$ произвольны. Погрузим точку (a_0, b_0) в некоторый замкнутый прямоугольник $\Delta = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ так, чтобы $0 < a_1 < a_0 < a_2, 0 < b_1 < b_0 < b_2$. Покажем, например, что функция $B_0(a, b)$ непрерывна в точке (a_0, b_0) . В силу 136.1 достаточно установить, что интеграл $\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ сходится равномерно в Δ . Полагая $c = \max_{(x,b) \in [0,1/2] \times [b_1,b_2]} (1-x)^{b-1}$, имеем $x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq cx^{a_1-1}$ ($0 < x < 1/2, (a, b) \in \Delta$). По признаку Вейерштрасса отсюда следует равномерная сходимость. □

Вычислим $\frac{\partial B(a, b)}{\partial a}$. Формально дифференцируя под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial B(a, b)}{\partial a} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx \quad (a, b > 0). \quad (1)$$

Покажем, что дифференцирование законно. Достаточно убедиться (136.2), что интеграл (1) сходится равномерно на любом отрезке $[a_1, a_2]$, $a_1 > 0$. Переходя к интегралам с одной особенностью, докажем, например, что на отрезке $[a_1, a_2]$ равномерно сходится интеграл $\int_0^{1/2} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x dx$. Преобразуя подынтегральную функцию к виду $x^{a-1-\varepsilon}(1-x)^{b-1}x^\varepsilon \ln x$ ($0 < x \leq \frac{1}{2}$), где $\varepsilon > 0$ такое, что $a_1 - \varepsilon > 0$, заметим, что функция $|x^\varepsilon \ln x|$ ограничена на $(0, \frac{1}{2}]$, то есть

$$|x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x| \leq Mx^{a_1-1-\varepsilon} \quad (x \in (0, \frac{1}{2}]),$$

где M — подходящая константа. Теперь можно воспользоваться признаком 135.3.

2. Гамма-функция Эйлера задаётся интегралом

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad a > 0.$$

Интеграл имеет особенности в $+\infty$ и (при $a < 1$) в точке 0. При всех $a > 0$ интеграл сходится. Покажем, что на любом отрезке $[a_1, a_2]$ ($0 < a_1 < a_2 < +\infty$) интеграл сходится равномерно. Отсюда, в частности, следует непрерывность функции $\Gamma(a)$.

¶ Представим $\Gamma(a)$ в виде $\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$. Из оценок

$$x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a_1-1} \quad (0 < x \leq 1), \quad x^{a-1} e^{-x} \leq x^{a_2-1} e^{-x} \quad (x \geq 1)$$

и признака Вейерштрасса следует равномерная сходимостъ интеграла на $[a_1, a_2]$. \square

Из 136.2 и признака Вейерштрасса следует, что функция $\Gamma(a)$ дифференцируема любое число раз в области $a > 0$:

$$\Gamma^{(k)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} (\ln x)^k e^{-x} dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

3. З а м е ч а н и е. Имеет место формула

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1), \quad a > 1. \quad (2)$$

В частности, если $n \in \mathbb{N}$, то

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!\Gamma(1) = n!.$$

Таким образом, гамма-функция является естественным обобщением факториала на нецелые аргументы. {Формула (2) следует из выкладки (для $a > 1$ интеграл $\Gamma(a)$ имеет единственную особенность в $+\infty$):

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N x^{a-1} e^{-x} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[-x^{a-1} e^{-x} \Big|_0^N + (a-1) \int_0^N x^{a-2} e^{-x} dx \right] = (a-1)\Gamma(a-1). \end{aligned}$$

4. У п р а ж н е н и е. Показать, что интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \ln x dx \quad (a, b > 0), \\ \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx, \quad \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad (a > 0) \end{aligned}$$

не сходятся равномерно в указанных областях.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ ФУНКЦИЙ

§138. Равномерная сходимость последовательности функций

1. Пусть Ω — множество. Последовательность функций $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ называется сходящейся к функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ в каждой точке множества Ω (пишем $f_n \rightarrow f$), если числовая последовательность $f_n(\omega)$ сходится к $f(\omega)$ при каждом $\omega \in \Omega$:

$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad (|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon) \quad (1)$$

(здесь натуральное N , конечно, зависит от $\omega \in \Omega$).

Большее значение при изучении функциональных последовательностей играет иной, более сильный вид сходимости.

2. Последовательность $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (будем писать $f_n \Rightarrow f$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall \omega \in \Omega \quad (|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon). \quad (2)$$

(В этом определении число N уже не зависит от ω !)

3. З а м е ч а н и е. Если $f_n \Rightarrow f$, то $f_n \rightarrow f$. Обратное, вообще, неверно (для последовательности функций $f_n(t)$ ($0 \leq t \leq 1$), заданных равенствами $f_n(t) = 0$ ($t \neq 1/n$), $f_n(1/n) = 1$, имеем: $f_n \rightarrow 0$, но f_n не сходится к 0 равномерно).

4. Для ограниченной функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ положим

$$\|f\|_\Omega \equiv \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|.$$

Введённая величина называется равномерной нормой ограниченной функции. Она обладает всеми свойствами нормы:

$$\|f\|_\Omega = 0 \Rightarrow f = 0, \quad \|\lambda f\|_\Omega = |\lambda| \|f\|_\Omega \quad (\lambda \in \mathbb{C}), \quad \|f + g\|_\Omega \leq \|f\|_\Omega + \|g\|_\Omega.$$

В терминах этой нормы удобно сформулировать условия равномерной сходимости.

5. Пусть $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность функций. Следующие условия эквивалентны:

- (а) f_n сходится равномерно (к f),
- (б) $\|f_n - f\|_\Omega \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$),
- (в) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad (\|f_n - f_m\|_\Omega < \varepsilon)$,
- (г) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \forall \omega \in \Omega \quad (|f_n(\omega) - f_m(\omega)| < \varepsilon)$.

¶ (а) \Rightarrow (б). Достаточно заметить, что из (2) следует, что $\|f_n - f\|_\Omega < \varepsilon$ при $n > N$. Уместно обратить внимание читателя, что в условии (а) не требуется ограниченности функций. Тем не менее, при достаточно больших n разность $f_n - f$ уже обязана быть ограниченной функцией.

(б) \Rightarrow (в). Пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что $\|f_n - f\|_\Omega < \varepsilon/2$ при $n > N$. Тогда

$$\|f_n - f_m\|_\Omega \leq \|f_n - f\|_\Omega + \|f_m - f\|_\Omega < \varepsilon \quad (n, m > N).$$

(в) \Rightarrow (г) (!).

(г) \Rightarrow (а). Условие (г) означает, что при каждом $\omega \in \Omega$ числовая последовательность $f_n(\omega)$ фундаментальна, а значит, существует $f(\omega) \equiv \lim_n f_n(\omega)$. Пусть N таково, что $|f_n(\omega) - f_m(\omega)| < \varepsilon$ ($n, m > N, \omega \in \Omega$). Переходя в этом неравенстве к пределу по m , имеем $|f_n(\omega) - f(\omega)| \leq \varepsilon$ ($n > N, \omega \in \Omega$). \square

§139. Равномерная сходимость и непрерывность

Продемонстрируем, как работает понятие равномерной сходимости последовательности функций, заданных на топологическом пространстве.

1. Пусть E — топологическое пространство, функции $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$ ($n = 1, 2, \dots$) непрерывны в точке $\omega_0 \in E$ и $f_n \Rightarrow f$. Тогда f также непрерывна в точке ω_0 .

¶ Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $N \in \mathbb{N}$ таково, что $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon/3$ ($\omega \in E$). Так как f_n непрерывна в ω_0 , найдётся окрестность U точки ω_0 такая, что $|f_n(\omega) - f_n(\omega_0)| < \varepsilon/3$ ($\omega \in U$). Следовательно, для любой точки $\omega \in U$:

$$|f(\omega) - f(\omega_0)| \leq |f(\omega) - f_n(\omega)| + |f_n(\omega) - f_n(\omega_0)| + |f_n(\omega_0) - f(\omega_0)| < \varepsilon. \quad \square$$

2. С л е д с т в и е. Если $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$ — последовательность функций, непрерывных на топологическом пространстве E , и $f_n \Rightarrow f$, то f непрерывна на E .

3. П р и м е р. Рассмотрим последовательность числовых функций $f_n(t) = (1 - nt) \cdot \chi_{[0, 1/n]}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$). Очевидно f_n непрерывны, причём для любой точки $t \in [0, 1]$ существует предел $f(t) = \lim_n f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t \leq 1, \\ 1, & \text{если } t = 0. \end{cases}$ Однако, эта предельная функция уже не непрерывна.

§140. Равномерная сходимость рядов функций

1. Пусть $u_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — последовательность числовых функций, заданных на абстрактном множестве Ω , так что каждой точке $\omega \in \Omega$ можно сопоставить числовой ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(\omega). \quad (*)$$

Ряд (*) называется *равномерно сходящимся*, если равномерно сходится последовательность $\sum_{j=1}^n u_j(\omega)$ его частных сумм.

Отметим непосредственное следствие 139.1.

2. Пусть Ω — топологическое пространство, и функции $u_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, \dots$) непрерывны в точке ω_0 . Пусть ряд (*) сходится равномерно к функции $v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда v непрерывна в точке ω_0 . Если, кроме того, все u_j непрерывны на Ω , то и сумма ряда v непрерывна на Ω .

3. [Критерий Коши]. Ряд (*) сходится равномерно тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \forall \omega \in \Omega \left(\left| \sum_{j=n+1}^{n+p} u_j(\omega) \right| < \varepsilon \right).$$

4. [Признак Вейерштрасса]. Пусть $\alpha_j > 0$, $|u_j(\omega)| \leq \alpha_j$ ($\omega \in \Omega$) и $\sum_{j=1}^n \alpha_j < +\infty$.

Тогда ряд (*) сходится равномерно.

¶ П. 3 — переформулировка для рядов критерия 138.5(г), п. 4 следует из п. 3 (!!). □

5. У п р а ж н е н и е. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ ($0 \leq x < +\infty$). (Примените п. 4.)

§141. Признаки сходимости Дирихле и Абеля

Следующие ниже признаки пригодны для неабсолютно сходящихся рядов вещественных функций. Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{j=1}^{\infty} u_j(\omega) v_j(\omega), \quad (1)$$

где $u_j, v_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественные функции.

1. [Признак Дирихле]. Пусть $u_1(\omega) \geq u_2(\omega) \geq \dots$ ($\omega \in \Omega$), причём $u_k \Rightarrow 0$, и существует $M > 0$ такое, что $|\sum_{j=1}^n v_j(\omega)| \leq M$ ($\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$). Тогда ряд (1) сходится равномерно.

2. [Признак Абеля]. Пусть $u_1(\omega) \geq u_2(\omega) \geq \dots$ ($\omega \in \Omega$), причём существует $M > 0$ такое, что $|u_j(\omega)| \leq M$ ($j = 1, 2, \dots$). Пусть, кроме того, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} v_j(\omega)$ сходится равномерно. Тогда ряд (1) также сходится равномерно.

¶ П. 1. для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ положим $w_k = v_{n+1} + \dots + v_{n+k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^p u_{n+k} v_{n+k} = \sum_{k=1}^{p-1} (u_{n+k} - u_{n+k+1}) w_k + u_{n+p} w_p.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k=1}^p u_{n+k}(\omega) v_{n+k}(\omega) \right| \leq \sum_{k=1}^{p-1} |u_{n+k}(\omega) - u_{n+k+1}(\omega)| |w_k(\omega)| + |u_{n+p}(\omega) w_p(\omega)|. \quad (2)$$

По условию $|w_k(\omega)| = \left| \sum_{j=1}^{n+k} v_j(\omega) - \sum_{j=1}^n v_j(\omega) \right| \leq 2M$. С учётом монотонности последовательности $u_j(\omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^p u_{n+k}(\omega) v_{n+k}(\omega) \right| &\leq 2M(u_{n+1}(\omega) - u_{n+2}(\omega) + u_{n+2}(\omega) - u_{n+3}(\omega) \\ &\quad + \dots - u_{n+p}(\omega) + u_{n+p}(\omega)) = 2Mu_{n+1}(\omega) \quad (\omega \in \Omega). \end{aligned}$$

Так как $u_k \Rightarrow 0$, согласно 140.3 получаем требуемое.

П. 2. В указанных выше обозначениях для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ для всех $\omega \in \Omega$

$$|w_k(\omega)| = |v_{n+1}(\omega) + \dots + v_{n+k}(\omega)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots).$$

(это следует из 140.3, применённого к ряду $\sum_{j=1}^{\infty} v_j(\omega)$). С учётом (2) и монотонности

$\{u_j(\omega)\}$: $\left| \sum_{k=1}^p u_{n+k}(\omega) v_{n+k}(\omega) \right| \leq \varepsilon(u_{n+1}(\omega) - u_{n+p}(\omega)) + \varepsilon|u_{n+p}(\omega)| \leq 3\varepsilon M$. Снова в силу 140.3 получаем требуемое. \square

3. П р и м е р. Исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0). \quad (3)$$

В случае $\alpha > 1$ ряд сходится абсолютно и равномерно (см. 140.4). В случае $\alpha \leq 1$ применим признак Дирихле, полагая $v_n(x) = \sin nx$, $u_n(x) = n^{-\alpha}$ ($\implies 0$). Остаётся исследовать на ограниченность суммы $\left| \sum_{j=1}^n v_j(x) \right| = |\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx|$. С учётом тождества $2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ имеем

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx &= (2 \sin \frac{x}{2})^{-1} [2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin nx] \\ &= (2 \sin \frac{x}{2})^{-1} [\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \dots - \cos(n + \frac{1}{2})x] \\ &= (2 \sin \frac{x}{2})^{-1} [\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x], \quad x \neq 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Тогда на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ мы имеем $\left| \sum_{j=1}^n v_j(x) \right| \leq (\sin \frac{\varepsilon}{2})^{-1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Таким образом, ряд (3) при $\alpha \leq 1$ сходится равномерно на любом отрезке вида $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

У п р а ж н е н и я. Исследовать на равномерную сходимость

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x+n}$ ($0 \leq x < +\infty$),

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$ ($0 < x < 1$).

6. Показать, что ряд (3) на отрезке $[0, 2\pi]$ сходится неравномерно при $0 < \alpha \leq 1$.

§142. Операции над равномерно сходящимися рядами

1. Пусть $\Omega (\subset \mathbb{R}^n)$ J -измеримо и замкнуто, $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и $f_n \implies f$.

Тогда $\lim_n \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx$.

¶ В силу 139.2 функция f непрерывна и, в частности, интегрируема на Ω . Согласно 138.5 $\|f_n - f\|_{\Omega} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). Поэтому

$$\left| \int_{\Omega} f_n(x) dx - \int_{\Omega} f(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| dx \leq \|f_n - f\|_{\Omega} m(\Omega) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty). \quad \square$$

В качестве следствия приведём теорему о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда.

2. Пусть $\Omega (\subset \mathbb{R}^n)$ J -измеримо и замкнуто, $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на Ω . Тогда $\int_{\Omega} (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} u_n(x) dx$.

Полезно выделить случай, когда функции заданы на отрезке числовой прямой.

3. Пусть $u_n(t)$ ($a \leq t \leq b$) непрерывны и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^x (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt \quad (a \leq x \leq b), \quad (1)$$

причём ряд в правой части сходится равномерно.

¶ В силу п. 2 в доказательстве нуждается лишь равномерная сходимостъ ряда в правой части (1). Требуемое следует из оценки

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_a^x u_k(t) dt \right| \leq \int_a^x \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(t) \right| dt \leq (b-a) \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\|_{[a,b]}. \quad \square$$

4. Пусть $u_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, причём

(а) при некотором c ($a \leq c \leq b$) сходится числовой ряд $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(c)$,

(б) ряд $\sum_{j=1}^{\infty} u'_j(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

Тогда ряд $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ и $(\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x))' = \sum_{j=1}^{\infty} u'_j(x)$.

¶ Положим $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u'_j(x)$ ($a \leq x \leq b$), $v_j(x) = u_j(x) - u_j(c)$ ($j \in \mathbb{N}$). Согласно

п. 3 $\int_c^x \varphi(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} (\int_c^x u'_j(t) dt) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x)$, и ряд $\sum_{j=1}^{\infty} v_j(x)$ сходится равномерно.

Поэтому равномерно сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} [v_j(x) + u_j(c)]$. При этом

$$[\sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)]' = [\sum_{j=1}^{\infty} v_j(x)]' = [\int_c^x \varphi(t) dt]' = \varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u'_j(x). \quad \square$$

5. П р и м е р [ζ -функция Римана]. Рассмотрим функцию, заданную рядом $\zeta(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ ($x > 1$). В указанной области функция ζ непрерывна (!!). Покажем, что

$$\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x} \quad (x > 1). \quad (2)$$

Для этого выберем a так, чтобы $1 < a < x$. Тогда из оценки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a} < C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-\varepsilon}}$ (где $\varepsilon > 0$ таково, что $1 < a - \varepsilon$) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ сходится равномерно в области $[a, +\infty)$. В силу п. 4 это означает справедливость (2).

§143. Степенные ряды в комплексной плоскости

Мы рассмотрим некоторые элементарные факты из теории степенных рядов (в основном связанные с общей теорией рядов функций, изложенной выше) в комплексной плоскости. Подробно такие ряды изучаются в курсе теории функций комплексного переменного.

1. Пусть a_0, a_1, \dots — последовательность комплексных чисел. *Степенным рядом по степеням z* называется формальная сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

Первый естественный вопрос — вопрос об области сходимости этого ряда.

2. [1-ая теорема Абеля]. Если ряд $(*)$ сходится в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, то он сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leq q$ при любом q ($0 < q < |z_0|$).

¶ Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ сходится, то $a_k z_0^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$). Следовательно, найдётся $M > 0$ такое, что $|a_k z_0^k| \leq M$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В силу условий теоремы $\alpha = \frac{q}{|z_0|} < 1$. Следовательно в круге $|z| \leq q$: $|a_k z^k| = |a_k z_0^k| \left| \frac{z}{z_0} \right|^k \leq M \alpha^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Осталось к ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ($|z| \leq q$) применить признак 140.4. □

3. Доказанная теорема позволяет сразу очень много сказать об области $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \text{ряд } (*) \text{ сходится}\}$ сходимости ряда $(*)$. Назовём *радиусом сходимости* ряда $(*)$ величину

$$R = \begin{cases} \sup_{z \in \Sigma} |z|, & \text{если } \Sigma \text{ ограничено,} \\ +\infty, & \text{если } \Sigma \text{ не ограничено.} \end{cases}$$

Из п. 2 непосредственно следует:

4. (а) Если $|z| < R$, то $z \in \Sigma$, то есть $(*)$ сходится.
 (б) Если $|z| > R$, то ряд $(*)$ расходится.

Таким образом, область сходимости степенного ряда $(*)$ является кругом (возможно, несобственным). Отметим, что теорема п. 2 не даёт информации о поведении ряда на границе круга сходимости $|z| = R$.

§144. Формула Коши-Адамара

Для определения радиуса сходимости имеется формула, позволяющая иногда эффективно вычислять этот радиус через коэффициенты ряда.

1. $R = [\lim_k |a_k|^{1/k}]^{-1}$ (при этом $1/\infty \equiv 0$, $1/0 \equiv +\infty$).

¶ Наряду с величиной R (§143), положим $r = [\lim_k |a_k|^{1/k}]^{-1}$. Требуется убедиться, что $r = R$.

Случай (а): $R > 0$. Пусть $0 < R_1 < R$. Тогда согласно 143.2 ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k R_1^k|$ сходится, и значит, существует $M > 0$ такое, что $|a_k R_1^k| \leq M$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Следовательно, $[\lim_k |a_k|]^{1/k} \leq \frac{1}{R_1} \cdot \lim_k M^{1/k} = \frac{1}{R_1}$. Отсюда $r \geq R_1$, и следовательно $r \geq R$.

Случай (б): $R < +\infty$. В силу 143.2 в точке $z = R_1 > R$ ряд (*) §143 расходится. Тем более расходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| R_1^k$. В силу 14.3 $[\lim_k |a_k|]^{1/k} = R_1/r \geq 1$. Отсюда $R/r \geq 1$, и следовательно $R \geq r$. Таким образом, равенство $R = r$ установлено для случая, когда $0 < R < +\infty$. Оно, однако, справедливо и для значений $R = 0$, $+\infty$. Если $R = 0$, то в силу случая (б) $r = 0$; если $R = +\infty$, то в силу случая (а) $r = +\infty$. \square

2. П р и м е р. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится при любом $z \in \mathbb{C}$. (По формуле Коши-Адамара $R = \lim_n (n!)^{1/n} = +\infty$.)

§145. Дифференцирование степенного ряда

1. Для степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (1)$$

корректно определена функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (|z| < R), \quad (2)$$

где R — радиус сходимости ряда (1). Эта функция обладает замечательным свойством:

2. Функция $f(z)$ дифференцируема в круге $|z| < R$ и $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ ($|z| < R$).

¶ Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ равен R , так как $[\lim_k |(k+1)a_{k+1}|]^{1/k} = [\lim_k |a_k|]^{1/k}$. Пусть $|z| < R$. Тогда существуют $R_1 < R$ и $\delta > 0$ такие, что $\forall t \in B_\delta(0) (|z+t| < R_1)$, где $B_\delta(0) = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \delta\}$. Определим функции

$$g_k(t) = \begin{cases} a_k \cdot \frac{1}{t} [(z+t)^k - z^k], & \text{если } t \in \check{B}_\delta(0), \\ k a_k z^{k-1}, & \text{если } t = 0, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

При этом $g_k(t) = a_k [(z+t)^{k-1} + z(z+t)^{k-2} + \dots + z^{k-1}]$ ($t \in B_\delta(0)$) непрерывны на $B_\delta(0)$ и

$$|g_k(t)| \leq k |a_k| R_1^{k-1} \quad (t \in B_\delta(0), k \in \mathbb{N}). \quad (3)$$

Тогда для $t \in \check{B}_\delta(0) : \frac{1}{t}[f(z+t) - f(z)] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)$, причём сумма ряда в правой части в силу оценки (3) и свойства 140.2 является непрерывной функцией. Следовательно,

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}[f(z+t) - f(z)] = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \quad \square$$

3. Функция $f(z)$, заданная равенством (2), имеет в круге $|z| < R$ производные всех порядков. При этом справедлива формула Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (|z| < R).$$

¶ Утверждение является непосредственным следствием п. 2. \square

§146. О понятии аналитической функции

1. Вместо рядов по степеням z можно, разумеется, рассматривать степенные ряды по степеням $z - z_0$, где z_0 — фиксированное число. На такие ряды переносятся все доказанные выше результаты.

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ открыто. Функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ называется *аналитической* в G , если для любой точки $z_0 \in G$ существует $\delta > 0$ такое, что $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ для всех $z \in B_\delta(z_0)$. Из 145.3 следует, что аналитическая функция обладает производными всех порядков.

2. П р и м е р [экспонента]. Положим по определению

$$\exp(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В силу 144.2 эта функция корректно задана в \mathbb{C} . Справедливо важное тождество

$$\exp(z+t) = \exp(z) \cdot \exp(t), \quad z, t \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

¶ Его справедливость следует из выкладки

$$\begin{aligned} \exp(z) \cdot \exp(t) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m \right) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k t^m}{k! m!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{k+m=r} \frac{r!}{k! m!} z^k t^m \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} z^k t^{r-k} \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (z+t)^r = \exp(z+t) \end{aligned}$$

(все операции справедливы в силу абсолютной сходимости участвующих в выкладке рядов). \square

Отметим также, что $\exp(z)$ — аналитическая в \mathbb{C} функция. Действительно, из (*) для любой точки $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \exp(z_0) \cdot \exp(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \exp(z_0) (z - z_0)^k \quad (z \in \mathbb{C}).$$

У п р а ж н е н и я. **3.** Доказать, что аналитическими являются следующие функции, заданные рядами: $\sin z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$, $\cos z \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ ($z \in \mathbb{C}$).

4. Охарактеризовать степенные ряды, сходящиеся равномерно во всей комплексной плоскости.

§147. Вещественные степенные ряды

1. Вещественным степенным рядом по степеням x называется формальная сумма

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (1)$$

где коэффициенты a_k также вещественны. В силу свойств комплексных степенных рядов можно говорить о радиусе R сходимости ряда (1). Именно, R ($0 \leq R \leq +\infty$) характеризуется условиями: при $|x| < R$ ряд (1) сходится, а при $|x| > R$ заведомо расходится. Из 1-й теоремы Абеля следует, что при любом $q < R$ ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-q, q]$. Поведение ряда в точках $\pm R$ требует специального изучения. Отметим некоторые специфические свойства вещественных степенных рядов.

2. [2-я теорема Абеля]. Пусть $R(< +\infty)$ — радиус сходимости ряда (1) и ряд сходится в точке $x = R$. Тогда функция f , заданная равенством $f(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($-R < x \leq R$), непрерывна.

¶ Функция f непрерывна на интервале $(-R, R)$ по 1-й теореме Абеля, и нуждается в проверке её непрерывности в точке $x = R$. Для этого рассмотрим наш ряд на отрезке $[0, R]$. Полагая $v_k(x) = a_k R^k$, $u_k(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^k$ ($0 \leq x \leq R$), получим $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$. К ряду, стоящему в правой части, применим признак 141.2, так что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[0, R]$. В силу 140.2 его сумма является непрерывной на отрезке $[0, R]$ функцией. В частности, f непрерывна в точке R . □

3. Ряд (1) можно почленно интегрировать внутри интервала сходимости: $\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ ($|x| < R$). (Это следствие 1-й теоремы Абеля и свойства 141.3.)

4. П р и м е р. Покажем, что

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (|x| \leq 1). \quad (2)$$

В силу п. 3 имеем для $|x| < 1$:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

При $|x| = 1$ ряд в правой части (2) сходится как ряд Лейбница (13.8). Следовательно, по 2-й теореме Абеля равенство (2) имеет место на всём отрезке $[-1, 1]$.

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ. РЯДЫ ФУРЬЕ

В этом разделе мы будем смотреть на функции как на представителей определённого класса функций. Основной интерес для нас будет представлять задача аппроксимации функций такого, например, типа: задана “хорошая” система функций $S = \{f_1(x), f_2(x), \dots\}$; можно ли заданную функцию $f(x)$ приблизить линейной комбинацией функций системы S ? Нужно, конечно, ещё уточнить, что значит “приблизить”. Например, если $S = \{1, x, x^2, \dots\}$, и $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то можно поставить вопрос о равномерной аппроксимации. Иногда разумно в качестве S рассматривать тригонометрическую систему функций $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$.

§148. Нормированные пространства

1. Векторное пространство X над полем Λ ($= \mathbb{C}$ или \mathbb{R}) (см. 62.1) называется *нормированным пространством*, если задано отображение (называемое нормой) $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее свойствами:

$$(I) \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta,$$

$$(II) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\lambda \in \Lambda, x \in X),$$

$$(III) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in X).$$

Мы имели уже дело с нормированными пространствами: вспомним конечномерное пространство, снабжённое евклидовой нормой, пространство линейных отображений из одного евклидова пространства в другое с операторной нормой (74.1).

2. Пусть X — нормированное пространство. Отображение $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, заданное равенством $d(x, y) \equiv \|x - y\|$ ($x, y \in X$), является метрикой в X (!), и потому на нормированные пространства переносятся соответствующие метрические и топологические понятия. В частности, множество Y в нормированном пространстве X называется *ограниченным*, если $\exists C > 0 \forall x \in Y (\|x\| \leq C)$. Нормированное пространство X является *сепарабельным* (см. 95.5), если существует $Y = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ такое, что $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists x_n \in Y (\|x - x_n\| < \varepsilon)$.

Нормированное пространство, полное относительно введённой метрики (§92), называется *банаховым пространством*.

3. В нормированных пространствах можно говорить о сходимости рядов. Говорят, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (u_k \in X) \tag{*}$$

сходится к элементу $u \in X$, если к u сходится последовательность $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$ частных сумм этого ряда. Ряд (*) называется *сходящимся абсолютно*, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$.

4. Нормированное пространство полно тогда и только тогда, когда всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. В силу полноты достаточно показать, что последовательность (s_n) частных сумм ряда $(*)$ фундаментальна. Это следует из оценки $\|s_{n+p} - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|$ с учётом сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть всякий абсолютно сходящийся ряд сходится и (x_n) — произвольная фундаментальная последовательность. Покажем, что она содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\lambda_n = \sup_{m \geq n} \|x_n - x_m\|$. Тогда $\lim \lambda_n = 0$.

Следовательно, у последовательности (λ_n) существует подпоследовательность (λ_{n_j}) такая, что $\lambda_{n_j} < j^{-2}$ при всех j . Тогда $\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| \leq j^{-2}$, откуда ряд $\sum g_j$, где $g_1 = x_{n_1}$, $g_{j+1} = x_{n_{j+1}} - x_{n_j}$ ($j \geq 1$), абсолютно сходится, а следовательно, сходится.

Так как $x_{n_k} = \sum_{j=1}^k g_j$, подпоследовательность (x_{n_k}) сходится. Теперь установим, что сходится сама последовательность (x_n) : если $\lim_k x_{n_k} = x$, то $\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\|$. □

5. Часто при изучении векторных пространств имеют дело с отображениями более общими, чем норма. Отображение $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *полунормой*, если оно обладает свойствами (II), (III) п. 1. Отметим простые свойства полунормы (!!):

- (а) $\|\theta\| = 0$; $\forall u \in X$ ($\|u\| \geq 0$);
- (б) $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$ ($u, v \in X$).

У п р а ж н е н и я. 6. Всякая фундаментальная последовательность в нормированном пространстве ограничена.

7. В банаховом пространстве перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет на его сумму.

§149. Примеры нормированных пространств

1. Пусть Ω — абстрактное множество. Обозначим через $B(\Omega)$ нормированное пространство всех ограниченных функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_{\Omega} \equiv \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|. \quad (*)$$

Сходимость функций по этой норме означает их равномерную сходимость (§138).

2. $B(\Omega)$ — банахово пространство.

¶ Пусть последовательность $f_n \in B(\Omega)$ фундаментальна по норме $(*)$. Из критерия 138.5 следует, что $\|f_n - f\|_{\Omega} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), и остаётся доказать, что предельная функция f ограничена. Пусть $C > 0$ таково, что $\|f_n\|_{\Omega} \leq C$ ($n \in \mathbb{N}$) (см. 148.6). Тогда $|f(\omega)| = \lim_n |f_n(\omega)| \leq C$ ($\omega \in \Omega$). □

3. Пусть Ω — компактное пространство, $C(\Omega)$ — нормированное пространство всех непрерывных функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (или \mathbb{R}) с нормой $(*)$. В силу 106.3 имеет место включение $C(\Omega) \subset B(\Omega)$. Из свойства 139.1 следует:

4. $C(\Omega)$ — банахово пространство.

5. Пусть Ω — невырожденный (см. 118.2) J -измеримый компакт в \mathbb{R}^n . Функция $\|f\|_1 \equiv \int_{\Omega} |f(x)| dx$ — норма на $C(\Omega)$ (!). Однако, $C(\Omega)$ не полно по этой норме.

¶ Например, если $\Omega = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, то последовательность функций

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [-1, -1/n], \\ 0, & \text{если } t \in [1/n, 1], \\ \frac{1}{2}(1 - nt), & \text{если } t \in [-1/n, 1/n] \end{cases}$$

является фундаментальной по норме $\|\cdot\|_1$, но не сходится по этой норме ни к какой функции $f \in C[-1, 1]$ (!). \square

6. З а м е ч а н и е. Если $\|f_n\|_{\Omega} \rightarrow 0$, то $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$. Однако обратное, вообще говоря, неверно: в примере 139.3 последовательность f_n обладает свойствами $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$, но f_n не стремится к 0 равномерно.

У п р а ж н е н и я. 7. Пусть Ω — локально компактное пространство и $C_0(\Omega)$ — нормированное пространство всех непрерывных функций $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, обращающихся в нуль на ∞ (то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset \Omega$ такое, что $|f(\omega)| < \varepsilon$ при любом $\omega \in \Omega \setminus K$ с нормой $(*)$). Показать, что $C_0(\Omega)$ — банахово пространство.

8. Пусть $A = \{f \in C[0, 1] : 0 < f(t) < 1 \text{ (} t \in [0, 1] \text{)}\}$, где $C[0, 1]$ — пространство вещественных непрерывных функций. Докажите, что A — открыто в нормированном пространстве $C[0, 1]$ с нормой $\|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ и A — не открыто в $C[0, 1]$ с

нормой $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

§150. Факторизация. Пространство $\mathcal{R}_1(\Omega)$

1. Пусть $\|\cdot\|$ — полунорма в векторном пространстве X . Отсутствие свойства 148.1 (I) часто бывает неудобным. Однако есть стандартная процедура (факторизация), позволяющая получать из полунормы норму. Введём отношение эквивалентности ρ в X : $\rho(x, y)$ означает, что $\|x - y\| = 0$ (это действительно отношение эквивалентности (!)). Обозначим элементы фактор-множества X/ρ через $\rho(x)$ (это смежные классы). Операции

$$\rho(x) + \rho(y) \equiv \rho(x + y), \quad \lambda \rho(x) \equiv \rho(\lambda x) \quad (x, y \in X, \lambda \in \Lambda)$$

определяют в X/ρ структуру векторного пространства (!). Нуль в X/ρ — это $\rho(\theta) = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Отображение $\|\cdot\|_{\rho}: X/\rho \rightarrow \mathbb{R}$, заданное равенством

$$\|\rho(x)\|_{\rho} \equiv \|x\| \quad (\rho(x) \in X/\rho), \quad (*)$$

определяет норму в X/ρ . Отметим, что отображение $\|\cdot\|_{\rho}$ определено корректно, то есть $\|\rho(x)\|_{\rho}$ не зависит от выбора представителя x из $\rho(x)$. Действительно, пусть z — ещё один элемент множества $\rho(x)$. Тогда $\|x - z\| = 0$ и следовательно,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x - z + z\| \leq \|x - z\| + \|z\| = \|z\|, \\ \|z\| &= \|z - x + x\| \leq \|z - x\| + \|x\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Отображение $\|\cdot\|_\rho$ удовлетворяет требованию 148.1(I):

$$\|\rho(x)\|_\rho = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow \rho(x) = \rho(\theta).$$

Свойства (II) и (III) также, очевидно, выполняются.

2. Проиллюстрируем изложенную схему на характерном примере. Пусть Ω — невырожденный J -измеримый компакт в \mathbb{R}^n . Естественно распространить норму $\|\cdot\|_1$ (см. 149.5) с пространства $C(\Omega)$ на векторное пространство функций абсолютно интегрируемых по Риману, возможно, в несобственном смысле. Однако на этом векторном пространстве функция $\|\cdot\|_1$ уже не является нормой. Применяя процедуру факторизации, мы придём к нормированному пространству (будем обозначать его $\mathcal{R}_1(\Omega)$), элементами которого являются классы функций, абсолютно интегрируемых по Риману. При этом если две функции f и g принадлежат одному классу, то $\int_\Omega |f(x) - g(x)| dx = 0$. В частности, нулём пространства $\mathcal{R}_1(\Omega)$ является класс

всех функций $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $\int_\Omega |\theta(x)| dx = 0$. Допуская вольность, мы будем говорить об элементах пространства $\mathcal{R}_1(\Omega)$ как о функциях, помня, что на деле мы оперируем с представителями классов функций.

3. Более общим образом, пусть Ω — локально J -измеримое подмножество \mathbb{R}^n и $\mathcal{R}_1(\Omega)$ — нормированное пространство функций (точнее, классов функций), абсолютно интегрируемых по Риману, возможно в несобственном смысле, с нормой $\|f\|_1 \equiv \int_\Omega |f(x)| dx$.

4. У п р а ж н е н и е. Пусть Ω — локально J -измеримое подмножество \mathbb{R}^n и функция θ абсолютно интегрируема на Ω . Тогда следующие условия эквивалентны:
(i) $\theta(x) = 0$ п.в., (ii) $\int_\Omega |\theta(x)| dx = 0$.

§151. Теорема о плотности

Мы докажем важную в техническом отношении теорему, показывающую, что при расширении естественной области определения нормы $\|\cdot\|_1$ с пространства $C(\Omega)$ на $\mathcal{R}_1(\Omega)$ исходное пространство остаётся плотным в $\mathcal{R}_1(\Omega)$.

1. Пусть $\Omega (\subset \mathbb{R}^n)$ локально J -измеримо. *Носителем* функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (обозначается $\text{supp}(f)$) назовём замыкание в \mathbb{R}^n множества $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

Обозначим через $C_{00}(\Omega)$ пространство непрерывных функций $f \in C(\Omega)$, носители которых компактны и лежат в Ω° (внутренности Ω). Ясно, что $C_{00}(\Omega) \subset C_0(\Omega)$, где $C_0(\Omega)$ определено в 149.7. Привлекая топологическое понятие плотности (95.5), приведём обещанную теорему.

2. Пространство $C_{00}(\Omega)$ плотно в $\mathcal{R}_1(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_1$.

¶ Приведём доказательство в геометрически наглядном частном случае $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ имеет особенности лишь в точках $\pm\infty$ (доказательство общего случая, по сравнению с разбираемым, не вызывает затруднений). Итак, мы

должны для произвольного $\varepsilon > 0$ суметь подобрать функцию $\varphi \in C_{00}(\Omega)$ так, чтобы $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \varphi(x)| dx < \varepsilon$.

Сначала выберем $N > 0$ так, чтобы $\int_{|x| \geq N} |f(x)| dx < \varepsilon/3$ (это возможно в силу

сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$). Положим $g \equiv \chi_{[-N, N]} \cdot f$, где $\chi_{[-N, N]}$ — характеристическая функция отрезка $[-N, N]$ (см. 1.10). Функция g интегрируема по Риману на отрезке $[-N, N]$ и, следовательно, существует разложение $\Delta(-N = x_0 < x_1 < \dots < x_n = N)$ такое, что

$$\left| \int_{-N}^N g(x) dx - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon/3, \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} g(x).$$

Положим $h = \sum_{i=1}^n m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}$ и заметим (Рис. 22), что существует $\varphi \in C_{00}(\Omega)$ со свойством $\int_{-N}^N |\varphi(x) - h(x)| dx < \varepsilon/3$, $\text{supp}(\varphi) \subset [-N, N]$. Функция φ искомая:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \varphi(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-N} + \int_{-N}^N + \int_{-N}^{+\infty} = \int_{|x| \geq N} |f(x)| dx + \int_{-N}^N |f(x) - \varphi(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \int_{-N}^N |g(x) - h(x)| dx + \int_{-N}^N |\varphi(x) - h(x)| dx < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

§152. Унитарные пространства

1. На векторные пространства переносится понятие скалярного произведения в \mathbb{C}^n . Напомним (см. 62.5), что скалярным произведением векторов $u = (u^1, \dots, u^n)$, $v = (v^1, \dots, v^n)$ из \mathbb{C}^n называется число $\langle u, v \rangle \equiv \sum_{i=1}^n u^i \overline{v^i}$. Отметим основные свойства этого скалярного произведения:

(I) $\langle u, v \rangle$ — линейная форма по u и антилинейная по v , то есть

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v \rangle &= \lambda_1 \langle u_1, v \rangle + \lambda_2 \langle u_2, v \rangle, \\ \langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle &= \overline{\lambda_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle u, v_2 \rangle \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

$$(II) \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle},$$

$$(III) \quad \langle u, u \rangle \geq 0,$$

$$(IV) \quad \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = \theta.$$

Указанные свойства берутся в качестве постулатов скалярного произведения в общем случае.

2. Векторное пространство E над полем $\Lambda (= \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{R})$ называется *унитарным пространством*, если определено отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \Lambda$, сопоставляющее каждой паре $\{u, v\} \in E \times E$ скаляр $\langle u, v \rangle \in \Lambda$, причём удовлетворяются требования (I)–(IV). В этом случае это отображение называется скалярным произведением в E . Если $\Lambda = \mathbb{R}$, унитарное пространство называется *вещественным*.

3. Всякое унитарное пространство E является нормированным относительно нормы, индуцированной скалярным произведением:

$$\|u\| \equiv \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (u \in E). \quad (*)$$

Чтобы доказать это утверждение, установим сначала неравенство Коши-Буняковского для унитарного пространства:

$$4. \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

¶ Пусть $\langle u, v \rangle \neq 0$ (иначе утверждение очевидно). Тогда при $\lambda \in \mathbb{R}$ с использованием свойства (I) имеем

$$0 \leq \left\| \frac{\langle v, u \rangle}{|\langle u, v \rangle|} u + \lambda v \right\|^2 = \lambda^2 \|v\|^2 + 2\lambda |\langle u, v \rangle| + \|u\|^2.$$

Из неотрицательности трехчлена переменной λ в правой части этого неравенства следует, что дискриминант трехчлена неположителен: $|\langle u, v \rangle|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$, что и требовалось. \square

5. З а м е ч а н и е. При доказательстве п. 4 свойство (IV) не использовалось.

6. Доказательство п. 3. В проверке нуждается лишь свойство 148.1 (III). С учётом п. 4 имеем

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

7. З а м е ч а н и е. Если форма $\langle u, v \rangle$ обладает свойствами (I) — (III), то равенство (*) определяет полунорму в E .

8. В дальнейшем, говоря о топологических свойствах унитарного пространства, мы всегда имеем в виду, что речь идёт о топологии, определяемой нормой (*). Отметим, в частности, что скалярное произведение является непрерывной функцией своих переменных: если $u_n \rightarrow u$, $v_n \rightarrow v$, то $\langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$.

¶ Так как $u_n \rightarrow u$, существует константа $C > 0$ такая, что $\|u_n\| \leq C$ ($n \in \mathbb{N}$). Следовательно, с учётом п. 4 имеем

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle - \langle u_n, v_n \rangle| &= |\langle u, v \rangle - \langle u_n, v \rangle + \langle u_n, v \rangle - \langle u_n, v_n \rangle| \\ &\leq |\langle u - u_n, v \rangle| + |\langle u_n, v - v_n \rangle| \\ &\leq \|u_n - u\| \cdot \|v\| + \|u_n\| \cdot \|v - v_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad \square \end{aligned}$$

У п р а ж н е н и я. 9. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — невырожденный J -измеримый компакт. Равенство $\langle f, g \rangle \equiv \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$ ($f, g \in C(\Omega)$) определяет скалярное произведение в $C(\Omega)$.

10. Показать, что в унитарном пространстве

(i) для попарно ортогональных векторов f_1, \dots, f_n :

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2 \quad (\text{теорема Пифагора}),$$

(ii) [равенство параллелограмма] для любых векторов f, g :

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2),$$

(iii) в неравенстве п. 4 имеет место равенство тогда u и v линейно зависимы,

(iv) равенство $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ выполняется тогда $u = \lambda v$, $\lambda \geq 0$ (если $v \neq \theta$).

§153. Пространство $\mathcal{R}_2(\Omega)$

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — локально J -измеримо. Рассмотрим множество всех функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, обладающих свойством: интеграл $\int_{\Omega} f(x) dx$ имеет не более конечного числа особенностей, а интеграл $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$ сходится как несобственный интеграл Римана. Из неравенства $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2} [|f(x)|^2 + |g(x)|^2]$ следует, что для двух функций f и g из данного класса сходится интеграл $\int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$, и потому этому же классу функций принадлежит $f + g$. Таким образом, рассматриваемый класс функций является векторным пространством относительно обычных операций сложения функций и умножения их на скаляр. Равенство

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (*)$$

определяет на этом векторном пространстве форму, обладающую, очевидно, свойствами (I) — (III), и в силу 152.5 имеет место интегральное неравенство Коши-Буняковского

$$2. \left| \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right]^{1/2},$$

а также интегральное неравенство Шварца (см. 152.7)

$$3. \left[\int_{\Omega} [f(x) + g(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \left[\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

4. Факторизуя (методом §150) наше векторное пространство по полунорме $\|f\|_2 \equiv \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$, придём к нормированному пространству $\mathcal{R}_2(\Omega)$, элементы которого — классы функций рассмотренного выше векторного пространства. Причём функции f и g принадлежат одному классу тогда $\int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$.

Допуская вольность, мы будем говорить о классах функций как о функциях. Итак, $\mathcal{R}_2(\Omega)$ — унитарное пространство со скалярным произведением (*).

5. З а м е ч а н и е. Если Ω ограничено и J -измеримо, то $\mathcal{R}_2(\Omega) \subset \mathcal{R}_1(\Omega) \setminus \{\chi_{\Omega} \in \mathcal{R}_2(\Omega)\}$, и для $f \in \mathcal{R}_2(\Omega)$ (см. п. 2):

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_{\Omega} |f(x)\chi_{\Omega}(x)| dx \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot m(\Omega)^{1/2} < +\infty.$$

Для пространства $\mathcal{R}_2(\Omega)$ также справедлива теорема о плотности, аналогичная доказанной в §151.

6. Пусть $\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$ локально J -измеримо. Тогда пространство $C_{00}(\Omega)$ плотно в $\mathcal{R}_2(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_2$.

¶ Пусть $f \in \mathcal{R}_2(\Omega)$, и для определённости интеграл $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$ имеет единственную особенность в точке ∞ . Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $N > 0$ таково, что $\int_{\Omega \setminus B_N(\theta)} |f(x)|^2 dx < \varepsilon^2/2$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Omega_N \equiv \Omega \cap B_N(\theta)$ невырождено. Так как $\int_{\Omega_N} |f(x)|^2 dx$ определён как интеграл Римана, существует $K = \sup_{x \in \Omega_N} |f(x)|$. В силу п. 5 и 151.2 существует $\varphi \in C_{00}(\Omega_N)$ такая, что $\int_{\Omega_N} |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon^2}{4K}$. С учётом способа построения функции φ в 151.2 можно считать, что $\sup_{x \in \Omega_N} |\varphi(x)| \leq K$, так что $|f(x) - \varphi(x)| \leq 2K$ ($x \in \Omega_N$). Поэтому $\int_{\Omega_N} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \leq 2K \int_{\Omega_N} |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Наконец,

$$\|f - \varphi\|_2^2 = \left[\int_{\Omega} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \right]^{1/2} = \left[\int_{\Omega_N} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx + \int_{\Omega \setminus B_N(\theta)} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq \varepsilon. \square$$

§154. Гильбертово пространство. Пространство ℓ^2

1. Унитарное пространство, полное относительно нормы, индуцированной скалярным произведением, называется *гильбертовым пространством* (или пространством Гильберта).

Это очень важный для анализа класс пространств, детально изучаемый позднее. Здесь мы только в небольшой степени коснёмся свойств гильбертовых пространств.

2. П р и м е р [гильбертово пространство ℓ^2]. Это пространство уже вводилось (см. 92.8). Напомним, что элементами его являются комплексные последовательности $u = (u^1, u^2, \dots)$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |u^i|^2 < +\infty$. Относительно обычных операций сложения и умножения на скаляр — это векторное пространство, а форма $\langle u, v \rangle \equiv \sum_{i=1}^{\infty} u^i \overline{v^i}$ ($u, v \in \ell^2$) определяет в ℓ^2 скалярное произведение. Покажем, что унитарное пространство ℓ^2 является полным относительно индуцированной нормы $\|u\| = [\sum_{i=1}^{\infty} |u^i|^2]^{1/2}$.

¶ Пусть $u_k = (u_k^1, u_k^2, \dots)$ — фундаментальная последовательность из ℓ^2 , то есть

$$\|u_k - u_s\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_k^i - u_s^i|^2 \rightarrow 0 \quad (k, s \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Следовательно, для каждого фиксированного i числовая последовательность $(u_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ фундаментальна и потому сходится. Пусть $u^i \equiv \lim_k u_k^i$. Чтобы завершить доказательство полноты, нужно установить:

$$u = (u^1, u^2, \dots) \in \ell^2, \quad (2)$$

$$\|u_k - u\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3)$$

В силу (1) $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \forall k > k_0 \forall p (\|u_{k+p} - u_k\| < \varepsilon)$, то есть при любом фиксированном $N : \sum_{i=1}^n |u_{k+p}^i - u_k^i|^2 \leq \|u_{k+p} - u_k\|^2 < \varepsilon^2$. Устремляя p к ∞ , имеем $\sum_{i=1}^n |u^i - u_k^i|^2 \leq \varepsilon^2$ ($k > k_0$). Из произвольности N теперь заключаем, что $\sum_{i=1}^{\infty} |u^i - u_k^i|^2 \leq \varepsilon^2$ ($k > k_0$), то есть $u = (u - u_k) + u_k \in \ell^2$, и (2) установлено. Отсюда же $\|u - u_k\|^2 < \varepsilon^2$ для любого $k > k_0$, так что (3) также имеет место. \square

§155. Ортонормированные системы векторов

1. С помощью скалярного произведения естественно вводится понятие ортогональности: векторы u, v в унитарном пространстве E называются *ортогональными*, если $\langle u, v \rangle = 0$. Более общим образом, система векторов $(e_j)_{j \in J}$ называется ортогональной, если векторы её попарно ортогональны. Если, кроме того, $\|e_j\| = 1$ ($j \in J$), то система называется *ортонормированной*.

Пусть $(e_j)_{j \in J}$ — ортонормированная система в унитарном пространстве E и $u \in E$ произволен. Числа $\langle u, e_j \rangle$ называются коэффициентами Фурье вектора u относительно системы $(e_j)_{j \in J}$. Следующее свойство показывает, что коэффициенты Фурье реализуют наилучшее приближение элемента линейными комбинациями данной ортонормированной системы.

2. Пусть $u \in E$ и $(e_j)_{j \in J}$ — ортонормированная система. Тогда для любого конечного подмножества $\sigma \subset J$:

$$\min_{\lambda_j} \|u - \sum_{j \in \sigma} \lambda_j e_j\| = \|u - \sum_{j \in \sigma} \langle u, e_j \rangle e_j\| = [\|u\|^2 - \sum_{j \in \sigma} |\langle u, e_j \rangle|^2]^{1/2}.$$

¶ Для произвольных λ_j ($j \in \sigma$) имеем

$$\begin{aligned} \|u - \sum_{j \in \sigma} \lambda_j e_j\|^2 &= \|u\|^2 - \sum_{j \in \sigma} [\overline{\lambda_j} \langle u, e_j \rangle + \lambda_j \overline{\langle u, e_j \rangle}] + \sum_{j \in \sigma} |\lambda_j|^2 \\ &= \|u\|^2 + \sum_{j \in \sigma} |\lambda_j - \langle u, e_j \rangle|^2 - \sum_{j \in \sigma} |\langle u, e_j \rangle|^2 \geq \|u\|^2 - \sum_{j \in \sigma} |\langle u, e_j \rangle|^2, \end{aligned}$$

откуда следует требуемое. \square

3. [Неравенство Парсеваля]. В условиях п. 2: $\sum_{j \in \sigma} |\langle u, e_j \rangle|^2 \leq \|u\|^2$.

¶ Это непосредственное следствие п. 2. \square

У п р а ж н е н и я. **4.** Всякая ортонормированная система линейно независима.

5. В условиях п. 2 числа $\langle u, e_j \rangle \neq 0$ не более чем для счётного семейства индексов j . (Указание: воспользуйтесь неравенством Парсеваля.)

6. Пусть $(e_j)_{j \in J}$ — ортонормированная система в унитарном пространстве E . Каждому вектору $u \in E$ сопоставим ряд $\sum_{j \in J} \langle u, e_j \rangle e_j$. Будем считать по определению, что в формальной сумме $\sum_{j \in J} \langle u, e_j \rangle e_j$ присутствуют лишь те слагаемые, у которых $\langle u, e_j \rangle \neq 0$. В силу п. 5 таких слагаемых не более, чем счётное число, так что действительно мы имеем дело с обычным рядом в нормированном пространстве. Этот ряд называется *рядом Фурье* элемента u по системе $(e_j)_{j \in J}$. Найдём условия, при которых ряд Фурье элемента сходится к этому элементу по норме. Будем называть подмножество нормированного пространства E *полным*, если его линейная оболочка плотна в E .

7. Пусть $(e_j)_{j \in J}$ — ортонормированная система в унитарном пространстве E . Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) система $(e_j)_{j \in J}$ полна в E ;

(б) ряд Фурье произвольного элемента $u \in E$ сходится к u :

$$u = \sum_{j \in J} \langle u, e_j \rangle e_j;$$

(в) $\langle u, v \rangle = \sum_{j \in J} \langle u, e_j \rangle \overline{\langle v, e_j \rangle}$ для любых $u, v \in E$;

(г) $\|u\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle u, e_j \rangle|^2$ для любого $u \in E$ [равенство Парсеваля].

¶ (а) \Rightarrow (б). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Покажем, что найдётся конечное подмножество $\sigma \subset J$ такое, что для любого конечного $\sigma' \supset \sigma$: $\|u - \sum_{j \in \sigma'} \langle u, e_j \rangle e_j\| < \varepsilon$ (это и есть сходимость ряда $\sum_{j \in J} \langle u, e_j \rangle e_j$ к u). В силу полноты $(e_j)_{j \in J}$ существует конечное

$\sigma \subset J$ и $\mu_j \in \mathbb{C}$ ($j \in \sigma$) такие, что $\|u - \sum_{j \in \sigma} \mu_j e_j\| < \varepsilon$. Тогда для любого конечного $\sigma' \supset \sigma$ с учётом п. 2 имеем

$$\|u - \sum_{j \in \sigma'} \langle u, e_j \rangle e_j\| = \min_{\lambda_j} \|u - \sum_{j \in \sigma'} \lambda_j e_j\| \leq \min_{\lambda_j} \|u - \sum_{j \in \sigma} \lambda_j e_j\| \leq \|u - \sum_{j \in \sigma} \mu_j e_j\| < \varepsilon.$$

(б) \Rightarrow (в). Перенумеруем натуральным индексом k (произвольным образом) все индексы $j \in J$, для которых $\langle u, e_j \rangle \neq 0$, либо $\langle v, e_j \rangle \neq 0$ (см. п. 5). Тогда $u = \lim_n \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k$, $v = \lim_n \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k$. Используя 152.8, имеем

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle \lim_n \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle e_k, \lim_n \sum_{s=1}^n \langle v, e_s \rangle e_s \rangle = \lim_n \sum_{s,k=1}^n \langle u, e_k \rangle \overline{\langle v, e_s \rangle} \langle e_k, e_s \rangle \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^n \langle u, e_k \rangle \overline{\langle v, e_k \rangle} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle \overline{\langle v, e_k \rangle} = \sum_{j \in J} \langle u, e_j \rangle \overline{\langle v, e_j \rangle}. \end{aligned}$$

Отметим, что сумма в правой части на самом деле не зависит от порядка следования слагаемых, так что ряд в правой части (в) сходится абсолютно.

(в) \Rightarrow (г). Положим в (в) $v = u$.

(г) \Rightarrow (а). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\sigma \subset J$ конечно и таково, что $\sum_{j \in J \setminus \sigma} |\langle u, e_j \rangle|^2 < \varepsilon$. Тогда $\|u - \sum_{j \in \sigma} \langle u, e_j \rangle e_j\|^2 = \sum_{j \in J \setminus \sigma} |\langle u, e_j \rangle|^2 < \varepsilon$, так что система $(e_j)_{j \in J}$ полна. \square

8. Понятием, близким к полноте системы, является её замкнутость: ортонормированная система $(e_j)_{j \in J}$ называется *замкнутой*, если $\langle u, e_j \rangle = 0$ ($j \in J$) влечёт $u = \theta$.

9. Полная ортонормированная система $(e_j)_{j \in J}$ в унитарном пространстве E замкнута. Если E — гильбертово пространство, то обратно — замкнутая ортонормированная система полна.

¶ Из полноты следует замкнутость в силу п. 7(г). Обратно, пусть E — гильбертово пространство и $u \in E$ произволен. Ряд Фурье $\sum_{j \in J} \langle u, e_j \rangle e_j$ вектора u сходится в E (в силу полноты E). Пусть $v = \sum_{j \in J} \langle u, e_j \rangle e_j$. Тогда $\langle u - v, e_j \rangle = 0$ ($j \in J$), откуда $u - v = \theta$, и значит, $u = v$. \square

10. П р и м е р. Система $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 на j -м месте) векторов в ℓ^2 является полной ортонормированной системой. (Это следует, например, из п. 7 (г).)

§156. 2 π -периодические функции

1. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется 2 π -периодической, если $f(x) = f(x + 2\pi)$ ($x \in \mathbb{R}$). Будем для такой функции обозначать через \tilde{f} функцию, являющуюся ограничением f на отрезок $[0, 2\pi]$: $\tilde{f}(x) = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). Обратно, если некоторая функция $\psi(x)$ определена на $[0, 2\pi]$ и $\psi(0) = \psi(2\pi)$, то эта функция допускает продолже-

ние по периодичности до функции $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Класс всех 2π -периодических функций обозначим через Π и введём следующие нормированные пространства функций:

$$\tilde{C} = \{f \in \Pi : \tilde{f} \in C[0, 2\pi]\} \text{ с нормой } \|f\| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|,$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 = \{f \in \Pi : \tilde{f} \in \mathcal{R}_1[0, 2\pi]\} \text{ с нормой } \|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx,$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \{f \in \Pi : \tilde{f} \in \mathcal{R}_2[0, 2\pi]\} \text{ с нормой } \|f\|_2 = \left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

($\tilde{\mathcal{R}}_1, \tilde{\mathcal{R}}_2$ мыслятся как пространства классов эквивалентных функций).

З а м е ч а н и я 2. Имеют место включения: $\tilde{C} \subset \tilde{\mathcal{R}}_2 \subset \tilde{\mathcal{R}}_1$. Отметим также простое, но полезное утверждение (!!):

$$3. \text{ Для } f \in \tilde{\mathcal{R}}_1 : \int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t-x) dt = \int_x^{x+2\pi} f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

§157. Тригонометрический ряд Фурье

1. Система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \dots \quad (1)$$

является ортонормированной системой в унитарном пространстве $\mathcal{R}_2[0, 2\pi]$ (!!). Тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in \tilde{\mathcal{R}}_2$ назовём ряд Фурье функции \tilde{f} относительно системы (1). Этот ряд обычно записывается в виде

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Например, член ряда Фурье, соответствующий функции $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx$ ($k \geq 1$), имеет вид

$$\left(\int_0^{2\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt dt \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx = a_k \cos kx.$$

З а м е ч а н и я 2. Если f абсолютно интегрируема на отрезке $[0, 2\pi]$, то интегралы (3) сходятся и, следовательно, формальный ряд (1) можно сопоставить функции из класса $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (а не только из класса $\tilde{\mathcal{R}}_2$).

3. Можно рассматривать периодические функции с другим периодом 2ω . Делая подстановку $x = u\omega/\pi$, получим функцию $F(u) = f(\frac{u\omega}{\pi})$ 2π -периодическую,

если f — 2ω -периодическая. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением 2π -периодических функций.

4. Идея представления функции f рядом Фурье представляется разумной, когда есть основания считать $f(t)$ координатой колеблющейся точки (t — время). Рассмотрим частную сумму ряда (1) — тригонометрический полином порядка n :

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos(kt - \varphi_k),$$

где $A_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$, $A_k \cos \varphi_k = a_k$, $A_k \sin \varphi_k = b_k$. Итак, колебательный процесс распадается в сумму гармоник с амплитудами A_k и начальными фазами φ_k , соответствующими частотам k .

У п р а ж н е н и я 5. Покажите, что если f — чётная функция, то представление (2) приобретает вид $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$. Аналогично, если f — нечётная функция, то $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$.

6. Если некоторый ряд по системе функций (1) сходится к функции f равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$, то он является её тригонометрическим рядом Фурье.

§158. Осцилляционная лемма

Пусть функция f абсолютно интегрируема на \mathbb{R} . Если рассмотреть произведение $f(x) \cos \lambda x$, то при больших λ эта функция сильно осциллирует, так что площади, ограниченные графиком функции, лежащие выше и ниже оси OX , компенсируются. Точное утверждение таково:

$$1. \text{ Если } f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}), \text{ то } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

¶ Отметим сначала, что (ниже пишем \int вместо $\int_{-\infty}^{+\infty}$)

$$\left| \int f(x) \sin \lambda x \, dx \right| = \frac{1}{2} \left| \int [f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})] \sin \lambda x \, dx \right| \leq \frac{1}{2} \int |f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})| \, dx.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\varphi \in C_{00}(\mathbb{R})$ такова, что (см. 151.2) $\int |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon/2$.

Из 133.2 следует, что интеграл $J(\lambda) \equiv \int |\varphi(x + \frac{\pi}{\lambda}) - \varphi(x)| \, dx$ является непрерывной функцией параметра λ (носитель функции φ компактен). При этом $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J(\lambda) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int |\varphi(x + \pi\mu) - \varphi(x)| \, dx = 0$. Следовательно, существует $N > 0$ такое, что $J(\lambda) < \varepsilon/2$ при $|\lambda| > N$. Поэтому при $|\lambda| > N$:

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) \sin \lambda x \, dx \right| &\leq \frac{1}{2} \int |f(x + \frac{\pi}{\lambda}) - f(x)| \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int |f(x + \frac{\pi}{\lambda}) - \varphi(x + \frac{\pi}{\lambda})| \, dx + J(\lambda) + \frac{1}{2} \int |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

2. Следствие. Коэффициенты Фурье a_k, b_k функции $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_1$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

§159. Оценка остатка ряда Фурье

1. Займёмся изучением тригонометрического ряда Фурье. Пусть $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_1$. Рассмотрим частную сумму ряда Фурье этой функции: $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Используя выражения §157 (3) для коэффициентов a_k и b_k , имеем

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) [\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t-x) f(t) dt, \end{aligned} \quad (1)$$

где $D_n(s) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})s}{\sin \frac{s}{2}}$ — ядро Дирихле порядка n (последнее

равенство в его выражении можно получить методом, использованным в 141.3). Заметим, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(s) ds = 1 + \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} \cos ks ds = 1. \quad (2)$$

2. Получим теперь удобное выражение для остатка аппроксимации функции f её частной суммой Фурье. Из (1) и (2) имеем с учётом чётности ядра Дирихле

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(u) [f(x+u) - f(x)] du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) \Delta_u^2(f(x)) du,$$

где $\Delta_u^2(f(x)) \equiv f(x+u) - 2f(x) + f(x-u)$. Таким образом, вопрос о сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$ сводится к изучению поведения интеграла $J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) \Delta_u^2(f(x)) du$. Преобразуем этот интеграл. Зафиксируем для этого число η ($0 < \eta < \pi$). Тогда

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nu}{2 \operatorname{tg}(u/2)} + \frac{\cos nu}{2} \right) \Delta_u^2(f(x)) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\eta} \frac{\sin nu}{u} \Delta_u^2(f(x)) du + \rho_n(x).$$

Здесь (всюду ниже мы пишем \int вместо $\int_{-\infty}^{+\infty}$)

$$\begin{aligned} \rho_n(x) &= \int \cos nu \cdot h(u) \Delta_u^2(f(x)) du + \int \sin nu \cdot g(u) \Delta_u^2(f(x)) du, \\ g(u) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2 \operatorname{tg}(u/2)} - \frac{1}{u} \right] \chi_{(0, \eta)}(u) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(u/2)} \cdot \chi_{[\eta, \pi]}(u), \quad h = \frac{1}{2\pi} \chi_{[0, \pi]}. \end{aligned}$$

Функции g, h — ограниченные и с компактными носителями. В частности, $g, h \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Из осцилляционной леммы следует, что $\rho_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Например,

$$\begin{aligned} \int \sin nu \cdot g(u) \Delta_u^2(f(x)) du &= \int \sin nu \cdot g(u) f(x+u) du \\ &\quad - 2f(x) \int \sin nu \cdot g(u) du + \int \sin nu \cdot g(u) f(x-u) du. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $\text{supp}(g) = [0, \pi]$, функция $g(u)f(x+u) \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ (по переменной u). Поэтому (158.2) $\int \sin nu \cdot g(u)f(x+u) du \rightarrow 0$. Аналогично стремятся к нулю остальные интегралы в правой части (3). Подведём итог проделанной работы.

3. Для функции $f \in \tilde{\mathcal{R}}_1$ имеет место представление

$$f(x) = S_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin nu}{u} \Delta_u^2(f(x)) du - \rho_n(x), \quad (4)$$

причём $\rho_n(x) = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$).

4. *З а м е ч а н и е.* В условиях п. 3 $\rho_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) равномерно на каждом отрезке $[a, b]$, где функция f ограничена. Это означает равномерную сходимость ряда Фурье на таких отрезках. Ниже (см. 164.3) мы докажем это утверждение для непрерывной кусочно-гладкой функции.

§160. Функции класса $\text{Lip } \alpha$

1. Вопрос о сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$, как показано выше, сводится к изучению поведения интеграла в правой части (4) §159. Мы введём класс функций, для которых исследуемая задача получает исчерпывающее решение. Скажем, что функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) — классу Липшица с показателем α , если существует константа $M > 0$ такая, что

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \text{ для любых } x, y \in [a, b]. \quad (*)$$

Отметим, что $\text{Lip } \alpha \subset C[a, b]$ (!!).

П р и м е р ы. 2. Если f — непрерывная кусочно-гладкая на отрезке $[a, b]$, то $f \in \text{Lip } 1$. {Пусть M таково, что $|f'(t)| \leq M$ ($a \leq t \leq b$). Тогда

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t) dt \right| \leq M|x - y|.$$

3. $f(x) = |x|^\alpha \in \text{Lip } \alpha$ на любом отрезке $[a, b]$. {Полагая для определённости $0 < |y| < |x|$ и обозначив $t = \frac{|x|}{|y|}$, имеем

$$\frac{||x|^\alpha - |y|^\alpha|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{||x|^\alpha - |y|^\alpha|}{||x| - |y||^\alpha} = \frac{t^\alpha - 1}{(t - 1)^\alpha} \leq 1.$$

Последнее неравенство в написанной цепочке верно для любого $\alpha \in (0, 1]$.

4. Пусть функция $f \in \tilde{\mathcal{R}}_1$ принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$ на отрезке $[a, b]$. Тогда её тригонометрический ряд Фурье сходится к f равномерно на каждом отрезке $[c, d] \subset (a, b)$.

¶ При достаточно малых u точки вида $x \pm u \in [a, b]$ для любых $x \in [c, d]$, так что

$$|\Delta_u^2(f(x))| \leq |f(x+u) - f(x)| + |f(x) - f(x-u)| \leq 2M|u|^\alpha,$$

где M — константа, фигурирующая в (*). В силу представления (4) §159 имеем

$$\begin{aligned} |S_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\eta \frac{\sin nu}{u} \Delta_u^2(f(x)) du \right| + |\rho_n(x)| \\ &\leq \frac{2M}{\pi} \int_0^\eta \frac{|u|^\alpha}{u} du + |\rho_n(x)| = \frac{2M}{\pi\alpha} \cdot \eta^\alpha + |\rho_n(x)|. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем сначала $\eta > 0$ так, чтобы $\frac{2M}{\pi\alpha} \cdot \eta^\alpha < \varepsilon/2$, а затем N так, чтобы $|\rho_n(x)| < \varepsilon/2$ при $n > N$ для любого $x \in [c, d]$ (это можно сделать в силу 159.4). Следовательно, $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при $n > N$ для всех $x \in [c, d]$. \square

5. Если $f \in \tilde{C}$ — непрерывная кусочно-гладкая (на $[0, 2\pi]$) функция, то её тригонометрический ряд Фурье сходится к ней равномерно.

¶ Пусть $\delta > 0$ произвольно. В силу п. 2 $f \in \text{Lip } 1$ и остаётся применить п. 4 к отрезкам $[a, b] = [-\delta, 2\pi + \delta]$, $[c, d] = [0, 2\pi]$. \square

У п р а ж н е н и я. **6.** Если $f \in C[a, b]$ и $f'(x)$ ограничена на (a, b) , то $f \in \text{Lip } 1$.

7. Каков класс функций, удовлетворяющий (*) при $\alpha > 1$?

§161. Полнота тригонометрической системы функций

Теперь можно доказать полноту тригонометрической системы функций (1) §157 в унитарном пространстве $\mathcal{R}_2[0, 2\pi]$.

1. (а) Система $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ полна в пространстве \tilde{C} .

(б) Система $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ полна в $C[0, \pi]$, а также в подпространстве пространства \tilde{C} , состоящем из чётных функций.

(в) Система функций $\{\sin x, \sin 2x, \dots\}$ полна в пространстве $\{f \in C[0, \pi] : f(0) = f(\pi) = 0\}$, а также в подпространстве пространства \tilde{C} , состоящем из нечётных функций.

¶ Докажем (а). Функция $f \in \tilde{C}$ равномерно непрерывна на $[0, 2\pi]$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся полигон (то есть непрерывная кусочно-линейная функция) $\psi \in \tilde{C}$ такой, что $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x) - \psi(x)| < \varepsilon/2$. Каждый полигон является непрерывной кусочно-гладкой функцией, и в силу 160.5 $|\psi(x) - S_n(x)| < \varepsilon/2$ ($x \in [0, 2\pi]$) при достаточно большом n (здесь $S_n(x)$ — частная сумма ряда Фурье для функции ψ). Тогда для любого $x \in [0, 2\pi]$

$$|f(x) - S_n(x)| \leq |f(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда $\|f - S_n\| \leq \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ — норма в \tilde{C} . \square

2. Тригонометрическая система функций (1) §157 полна в $\tilde{\mathcal{R}}_2$, и следовательно тригонометрический ряд Фурье функции $f \in \tilde{\mathcal{R}}_2$ сходится к f по норме $\|\cdot\|_2$.

¶ Пусть $f \in \tilde{\mathcal{R}}_2$. В силу 153.6 существует функция $\varphi \in \tilde{C}$ такая, что $\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 dx < \varepsilon^2$. В силу п. 1 можно подобрать тригонометрический полином $S_n(x)$ такой, что $\|\varphi - S_n\|_{[0, 2\pi]} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$. Значит, $\|f - S_n\|_2 \leq \|f - \varphi\|_2 + \|\varphi - S_n\|_2 < 2\varepsilon$. \square

3. [Равенство Парсеваля]. Для $f \in \tilde{\mathcal{R}}_2$: $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$.

¶ Это следствие 155.7(г). \square

З а м е ч а н и е. **4.** Л. Карлесон доказал (1966), что тригонометрические ряды Фурье функций из $\tilde{\mathcal{R}}_2$ сходятся п.в.

5. П р и м е р. Рассмотрим 2π -периодическую функцию $f(x)$ такую, что

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ -1, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

В силу 157.5 $a_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots$), $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \, dx = -\frac{2}{\pi k}((-1)^k - 1)$ ($k \in \mathbb{N}$).

Таким образом, $f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ ($x \in \mathbb{R}$). Ряд в правой части сходится к $f(x)$ в $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$ согласно 160.5. В остальных точках сходимость ряда к 0 — значению функции $f(x)$ для $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ — очевидна.

§162. Полнота системы полиномов в $C[a, b]$

1. Система функций $\{1, x, x^2, \dots\}$ полна в $C[a, b]$.

2. Определим вещественные полиномы $Q_n(x)$ степени n (они называются полиномами Чебышева) равенствами $\cos nt = Q_n(\cos t)$, так что $Q_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В частности, $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = 2x^2 - 1$. При произвольном n для получения полинома Q_n можно воспользоваться тождеством

$$\cos nt + i \sin nt = e^{int} = (e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n = \sum_{k=0}^n i^{n-k} \binom{n}{k} \cos^k t \cdot \sin^{n-k} t.$$

Таким образом, каждый чётный тригонометрический полином $T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt$ подстановкой $t = \arccos x$, которая гомеоморфно отображает отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[-1, 1]$, преобразуется в алгебраический полином

$$P_n(x) = T_n(\arccos x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k Q_k(x).$$

Обратно, любой вещественный полином $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ подстановкой $x = \cos t$ преобразуется в чётный тригонометрический полином $T_n(t) = P_n(\cos t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kt$. Это ясно, если учесть тождество

$$\cos^k t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^k = 2^{-k} \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} e^{i(2s-k)t} = 2^{-k} \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \cos(2s-k)t.$$

3. Переходим к доказательству п. 1. Случай 1: $[a, b] = [-1, 1]$. Для всякой $f \in C[-1, 1]$ функция $f(\cos t)$ непрерывна на $[0, \pi]$ и согласно 161.1 существует тригонометрический полином $T_n(t) = P_n(\cos t)$ такой, что $|f(\cos t) - T_n(t)| < \varepsilon$ при всех $t \in [0, \pi]$. Следовательно, $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ при всех $|x| \leq 1$.

Случай 2 (общий). Преобразование $x = a + \frac{b-a}{2}(z+1)$ переводит $[-1, 1]$ в $[a, b]$, функция $F(z) = f(a + \frac{b-a}{2}(z+1))$ непрерывна на $[-1, 1]$, если $f \in C[a, b]$. При этом в

силу случая 1 существует алгебраический полином $P_n(x)$ такой, что $\|F - P_n\|_{[-1,1]} < \varepsilon$. Обращая подстановку, имеем

$$\|f - R_n\|_{[a,b]} < \varepsilon, \text{ где } R_n(x) \equiv P_n\left(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1\right).$$

§163. Комплексная форма ряда Фурье

1. Во многих отношениях удобна комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Чтобы получить её, заметим, что

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{a_k}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{b_k}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}) = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx},$$

где $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ ($k \in \mathbb{Z}$). Если f — вещественная функция, то $c_k = \overline{c_{-k}}$. Итак, представление (2) §157 преобразуется к комплексной форме ряда Фурье

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

Ряд в правой части можно рассматривать как ряд Фурье f относительно ортонормированной системы $\{(2\pi)^{-1/2} \cdot e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, полной в унитарном пространстве $\tilde{\mathcal{R}}_2$.

З а м е ч а н и я. 2. Равенство Парсеваля 161.3 приобретает вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

3. В соответствии с вещественным случаем ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ называется сходящимся в точке x , если существует предел $\lim_n \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ (предел $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^n c_k e^{ikx}$ может не существовать!).

4. Комплексная форма ряда Фурье удобна для перенесения понятия ряда Фурье на многомерный случай. Система функций $\{(2\pi)^{-n/2} e^{i\langle k, x \rangle} : k = (k^1, \dots, k^n) \in \mathbb{Z}^n\}$ является ортонормированной в $\mathcal{R}_2(\Delta)$ с $\Delta = \{x = (x^1, \dots, x^n) : -\pi \leq x^i \leq \pi, 1 \leq i \leq n\}$. Таким образом, каждой функции $f \in \mathcal{R}_2(\Delta)$ (и даже функции из $\mathcal{R}_1(\Delta)$) можно сопоставить ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{i\langle k, x \rangle}$, где $c_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta} f(u) e^{-i\langle k, u \rangle} du$. На многомерные ряды переносятся основные теоремы одномерных рядов Фурье.

§164. Операции над рядами Фурье

Докажем утверждения о возможности почленного дифференцирования и интегрирования ряда Фурье. Нам будет удобно пользоваться комплексной формой ряда Фурье.

1. Пусть $f \in \tilde{C}$ — непрерывная кусочно-гладкая и $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ — её ряд Фурье.

Тогда $f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} i k c_k e^{ikx}$.

¶ Функция $f'(x)$ кусочно-непрерывная, так что $f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c'_k e^{ikx}$. Найдём выражение для коэффициентов c'_k . С учётом 2π -периодичности f :

$$c'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) dt = \frac{1}{2\pi} [f(2\pi) - f(0)] = 0,$$

$$c'_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left[e^{-ikt} f(t) \Big|_0^{2\pi} + ik \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right] = ikc_k. \quad \square$$

2. Пусть φ — кусочно-непрерывная 2π -периодическая функция и $\varphi(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c'_k e^{ikx}$,

$$c'_0 = 0. \text{ Тогда для } f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt: f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{c'_k}{ik} e^{ikx}.$$

¶ Функция f непрерывная кусочно-гладкая на $[0, 2\pi]$ и 2π -периодическая, так как $f(2\pi) - f(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 2\pi c'_0 = 0$. Следовательно, ряд Фурье функции f сходится к f равномерно. При этом k -й коэффициент Фурье функции f равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = -\frac{1}{2\pi ik} e^{-ikt} f(t) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{c'_k}{ik}. \quad \square$$

Насколько быстро сходится ряд Фурье к функции? Приведём оценку остатка при дополнительном предположении гладкости.

3. Пусть $f \in \tilde{C}$ непрерывная кусочно-гладкая функция и S_n — её частная сумма ряда Фурье. Тогда $\|f - S_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \|f'\|_2$, где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве \tilde{C} .

¶ Для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем, используя обозначения п. 1,

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \frac{c'_k}{ik} e^{ikx} - \frac{c'_{-k}}{ik} e^{-ikx} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} (|c'_k| + |c'_{-k}|) \leq \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right]^{1/2} \cdot \left[2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (|c'_k|^2 + |c'_{-k}|^2) \right]^{1/2} \\ &\leq \left(\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|f'\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \|f'\|_2. \quad \square \end{aligned}$$

§165. Вспомогательная лемма

Пусть $f, \varphi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, а функция двух переменных $\lambda(s, t)$ ($s, t \in \mathbb{R}$) непрерывна и ограничена. Тогда $\mu(s) \equiv \int \lambda(s, t) f(t) dt$ ($s \in \mathbb{R}$) — непрерывная и ограниченная функция. При этом

$$\int \varphi(s) \int \lambda(s, t) f(t) dt = \int f(t) dt \int \lambda(s, t) \varphi(s) ds. \quad (1)$$

¶ Отметим, что в данном случае обычная теорема о непрерывности интеграла по параметру неприменима.

Пусть $K > 0$ таково, что $|\lambda(s, t)| \leq K$ ($s, t \in \mathbb{R}$). Очевидно, $\mu(s)$ — ограниченная функция. Установим непрерывность $\mu(s)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, $f_1 \in C_{00}(\mathbb{R})$ такова, что $\|f - f_1\|_1 < \varepsilon/3K$ (см. 151.2). Функция

$$\mu_1(s) \equiv \int \lambda(s, t) f_1(t) dt = \int_{-N}^N \lambda(s, t) f_1(t) dt, \text{ где } \operatorname{supp}(f_1) \subset [-N, N],$$

непрерывна в силу 133.2. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|s - s_0| < \delta \Rightarrow |\mu_1(s) - \mu(s_0)| < \varepsilon/3.$$

Но тогда при $|s - s_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |\mu(s) - \mu(s_0)| &\leq |\mu(s) - \mu_1(s)| + |\mu_1(s) - \mu_1(s_0)| + |\mu_1(s_0) - \mu(s_0)| \\ &< \left| \int \lambda(s, t) [f_1(t) - f(t)] dt \right| + \varepsilon/3 + \left| \int \lambda(s_0, t) [f_1(t) - f(t)] dt \right| \\ &\leq 2K\|f - f_1\|_1 + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь можно утверждать существование интегралов в левой и правой частях (1). Для доказательства (1) допустим для определённости, что интегралы $\int f(t) dt$, $\int \varphi(t) dt$ имеют особенности лишь в точках $\pm\infty$. Требуемое равенство следует из выкладки (асимптотика берётся при $N \rightarrow +\infty$):

$$\begin{aligned} \int \varphi(s) ds \int \lambda(s, t) f(t) dt &= \int_{-N}^N \varphi(s) ds \int_{-N}^N \lambda(s, t) f(t) dt + o(1) \\ &= \int_{-N}^N f(t) dt \int_{-N}^N \lambda(s, t) \varphi(s) ds + o(1) = \int f(t) dt \int \lambda(s, t) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Здесь первое равенство справедливо в силу оценки

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|s| \geq N} \varphi(s) ds \int_{|t| \leq N} \lambda(s, t) f(t) dt + \int_{|s| \leq N} \int_{|t| \geq N} + \int_{|s| \geq N} \int_{|t| \geq N} \right| \\ &\leq K \left(\int_{|s| \geq N} |\varphi(s)| ds \int_{|t| \leq N} |f(t)| dt + \int_{|s| \leq N} |\varphi(s)| ds \int_{|t| \geq N} |f(t)| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{|s| \geq N} |\varphi(s)| ds \int_{|t| \geq N} |f(t)| dt \right) = o(1), \end{aligned}$$

а перемена порядка интегрирования во 2-м равенстве возможна за отсутствием особенностей на собственном отрезке в \mathbb{R} . \square

§166. Понятие интеграла Фурье

Для функций $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ (заведомо непериодических, если $f \neq 0$) будем построим континуальный аналог ряда Фурье — интеграл Фурье.

1. Пусть $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Тогда определены интегралы

$$a(\lambda) \equiv \frac{1}{\pi} \int f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) \equiv \frac{1}{\pi} \int f(t) \sin \lambda t dt, \quad c(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad (1)$$

— континуальные аналоги коэффициентов Фурье.

2. $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ — непрерывные функции λ и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} b(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) = 0.$$

¶ 1-е утверждение — следствие §165, 2-е — следствие 158.1. \square

3. Интеграл

$$\gamma_N(x) \equiv \int_0^N (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda \quad (2)$$

называется *простым интегралом Фурье* функции $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Это аналог частной суммы ряда Фурье периодической функции. В силу п. 2 интеграл (2) корректно определён. Отметим комплексную форму этого интеграла:

$$\gamma_N(x) = \int_{-N}^N c(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{i\lambda x} d\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

Нас будет интересовать вопрос о сходимости простого интеграла Фурье к функции. Для этого сначала получим удобное асимптотическое выражение для простого интеграла Фурье.

4. Для всякой функции $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ и любого $\eta > 0$

$$\gamma_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{\eta} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t} dt + o(1) \quad (N \rightarrow +\infty). \quad (3)$$

При этом остаток $o(1)$ стремится к нулю равномерно на любом отрезке $[a, b]$.

¶ Из представления (2) мы имеем с учётом (1)

$$\begin{aligned} \gamma_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^N d\lambda \int f(t) \cos \lambda(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int f(t) dt \int_0^N \cos \lambda(t-x) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int f(t) \frac{\sin N(t-x)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x+t)}{t} \sin Nt dt \end{aligned}$$

(здесь 2-е равенство справедливо в силу §165). Взяв произвольное $\eta > 0$ и положив $h(t) = \frac{1}{t} f(x+t) \chi_{(\eta, +\infty)}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$), получим $|h(t)| \leq \frac{1}{\eta} |f(x+t)|$, откуда $h \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, и по лемме 158.1

$$J_\eta = \int_\eta^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin Nt dt = \int h(t) \sin Nt dt = o(1) \quad (N \rightarrow +\infty). \quad (4)$$

Аналогично $\int_{-\infty}^{-\eta} \frac{f(x+t)}{t} \sin Nt dt = o(1)$ ($N \rightarrow +\infty$). Итак, имеет место (3).

Для доказательства последнего утверждения покажем, например, что интеграл (4) стремится к нулю равномерно на отрезке $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\zeta > \eta$ таково, что $\frac{1}{\zeta} \int_{\zeta+a}^{+\infty} |f(u)| du < \varepsilon$. Тогда

$$J_\eta = \int_\eta^\zeta \frac{f(x+t)}{t} \sin Nt dt + \int_\zeta^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin Nt dt.$$

Полагая $g(t) = \frac{1}{t} \chi_{[\eta, \zeta]}$ в формуле (5) §159, заключаем, что для достаточно больших N : $|\int_{\eta}^{\zeta} \frac{f(x+t)}{t} \sin Nt dt| < \varepsilon$ ($a \leq x \leq b$). Вместе с этим $|\int_{\zeta}^{+\infty} \frac{f(x+t)}{t} \sin Nt dt| \leq \frac{1}{\zeta} \int_{\zeta}^{+\infty} |f(x+t)| dt \leq \frac{1}{\zeta} \int_{\zeta+a}^{+\infty} |f(u)| du < \varepsilon$. Отсюда следует требуемое. \square

§167. Сходимость интеграла Фурье

1. Пусть $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ непрерывная кусочно-гладкая на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функция. Тогда простой интеграл Фурье этой функции сходится к ней равномерно на каждом отрезке числовой прямой.

¶ Не ограничивая общности, можно считать, что $b-a < 2\pi$. Пусть $[a, b] \subset (\alpha, \alpha+2\pi)$ и $\varphi \in \tilde{\mathcal{R}}_1$ такова, что $\varphi(x) = f(x)$ ($\alpha \leq x < \alpha+2\pi$). Обозначая через $S_N(x)$ частную сумму ряда Фурье функции φ , запишем простой интеграл Фурье $\gamma_N(x)$ функции f в виде $\gamma_N(x) = S_N(x) + [\gamma_N(x) - S_N(x)]$. В силу 160.2 достаточно установить, что

$$\gamma_N(x) - S_N(x) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty) \text{ равномерно на } [a, b]. \quad (1)$$

Выберем $\eta > 0$ таким, чтобы $[a-\eta, b+\eta] \subset (\alpha, \alpha+2\pi)$. Тогда

$$\varphi(x+t) = f(x+t) \text{ при } x \in [a, b] \text{ и } |t| \leq \eta. \quad (2)$$

Следовательно ((4) §159),

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin Nu}{u} \Delta_u^2(\varphi(x)) du + o(1) \\ &= \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin Nu}{u} [\varphi(x+u) + \varphi(x-u)] du - \varphi(x) \frac{2}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin Nu}{u} du + o(1) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin Nu}{u} [\varphi(x+u) + \varphi(x-u)] du + \left[1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin t}{t} dt\right] \varphi(x) + o(1). \end{aligned}$$

Из 136.3 и непрерывности φ на $[a, b]$ 1-е слагаемое в последнем равенстве стремится к нулю равномерно, остаток также стремится к нулю равномерно на $[a, b]$ (см. 159.4).

С учётом (2) имеем при $N \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin Nu}{u} f(x+u) du + \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin Nu}{u} f(x-u) du + o(1) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{\sin Nu}{u} f(x+u) du + \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^0 \frac{\sin Nu}{u} f(x+u) du + o(1) \\ &= \gamma_N(x) + o(1), \end{aligned}$$

где остаток $o(1)$ стремится к нулю равномерно в силу сказанного выше и 166.4. \square

2. С л е д с т в и е. В условиях п. 1

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\lambda} \int e^{i\lambda x} d\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\lambda t} dt \right). \quad (3)$$

3. У п р а ж н е н и е. Утверждение п. 1 доказано на самом деле лишь для случая, когда $N \rightarrow +\infty$, пробегаая натуральные числа. Завершите доказательство в общем случае.

§168. Преобразование Фурье

1. Введём класс \mathcal{R}_1^{loc} локально интегрируемых функций на числовой прямой: этот класс состоит из функций f , обладающих свойством $\forall a, b \in \mathbb{R} (a < b) \Rightarrow f \in \mathcal{R}_1[a, b]$. Очевидно, $\mathcal{R}_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}_1^{loc}$. Для каждой функции $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$ и точки $x \in \mathbb{R}$ определены интегралы

$$f_N^\sharp(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(t) e^{-ixt} dt, \quad f_N^\flat(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(t) e^{ixt} dt.$$

2. З а м е ч а н и е. $f_N^\flat(x) = f_N^\sharp(-x)$.

3. Преобразованием Фурье (соответственно обратным преобразованием Фурье) функции $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$ называется интеграл (если он существует)

$$f^\sharp(x) \equiv \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-ixt} dt. \quad (1)$$

(соответственно

$$f^\flat(x) \equiv \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{ixt} dt). \quad (2)$$

З а м е ч а н и я. 4. Если определено f^\sharp , то определено f^\flat (и наоборот), причём

$$f^\flat(x) = f^\sharp(-x), \quad f^\sharp(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N^\sharp(x), \quad f^\flat(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N^\flat(x).$$

5. Если $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, то f^\sharp, f^\flat определены, причём интегралы (1) и (2) сходятся в обычном смысле (а не в смысле v.p.).

6. Если $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ — непрерывная кусочно-гладкая на каждом отрезке числовой прямой функция, то $f(x) = f^{\sharp\flat}(x) = f^{\flat\sharp}(x)$.

¶ С учётом 167.2, пп. 4 и 5

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{i\lambda x} d\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f^\sharp(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} (f^\sharp)^\flat_N(x) = f^{\sharp\flat}(x). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} f^{\flat\sharp}(x) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{-i\lambda x} d\lambda \int f(t) e^{i\lambda t} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N e^{i\lambda x} d\lambda \cdot \int f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= f^{\sharp\flat}(x) \end{aligned}$$

(2-е равенство получается заменой λ на $-\lambda$). \square

7. В заключение установим интересную формулу, показывающую, что преобразование Фурье сводит операцию дифференцирования к операции умножения на независимую переменную. Для удобства обозначим через \mathcal{S} операцию умножения на независимую переменную в классе \mathcal{R}_1^{loc} : $f^{\mathcal{S}}(t) \equiv tf(t)$ ($t \in \mathbb{R}$).

8. Пусть $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ — непрерывная кусочно-гладкая на каждом отрезке числовой прямой функция и $f^\# \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Тогда f гладкая (на каждом отрезке числовой прямой) и

$$f' = if^\# \quad (3)$$

¶ Так как $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, из §165 следует, что $f^\#$ непрерывна и принадлежит классу $\mathcal{R}_1(\mathbb{R} \setminus (-1, 1))$, поскольку $f^\# \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Отсюда с учётом непрерывности $f^\#$ следует, что $f^\# \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Из пп. 6 и 5

$$f(x) = f^\#(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f^\#(u) e^{ixu} du.$$

Интеграл в правой части этого равенства можно дифференцировать по параметру:

$$f'(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int f^\#(u) u e^{ixu} du. \quad (4)$$

Действительно, подынтегральная функция в (4) непрерывна по переменным x и u , причём $|f^\#(u) u e^{ixu}| = |f^\#(u) u| \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, и по признаку Вейерштрасса интеграл в правой части (4) сходится равномерно; $f'(x)$ непрерывна по x в силу §165. □

9. З а м е ч а н и е. Утверждение п. 6 остаётся справедливым (вычисления опущены) для кусочно-гладких (не обязательно непрерывных) функций f , имеющих конечное число точек разрыва:

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \text{v.p.} \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda} e^{i\lambda x} d\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\lambda t} dt \right).$$

10. П р и м е р. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x - a| < \gamma, \\ 1/2, & \text{если } |x - a| = \gamma, \\ 0, & \text{если } |x - a| > \gamma. \end{cases}$$

Тогда $f^\#(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-ixa} \frac{\sin \gamma x}{x}$, так что из пп. 6,9 $f(x) = \left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-ixa} \frac{\sin \gamma x}{x} \right\}^\flat$. В данном примере f финитна (то есть $\text{supp}(f)$ компактен), но $f^\#$ уже не финитна и $f^\# \in \mathcal{R}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$.

11. У п р а ж н е н и е. Пусть f, f' абсолютно интегрируемы, f' непрерывна. Тогда $(f')^\#(x) = i x f^\#(x)$.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

§169. Введение

Основы математической теории обобщённых функций заложены в 30-е годы С. Л. Соболевым в связи с решением задачи Коши для гиперболических уравнений. Французский математик Л. Шварц в начале 50-х годов дал систематическое изложение теории обобщённых функций на базе топологических линейных пространств и указал ряд важных применений этой теории.

Техника обобщённых функций даёт удобный аппарат для описания распределений физических величин, включая такие идеализированные понятия, как плотность точечного заряда, интенсивность силы, приложенной к точке и т. д. В данном разделе будут приведены лишь первоначальные понятия, связанные с идеей обобщённой функции, и совсем не затронуты вопросы их применений.

1. С целью лучшего усвоения идеи обобщённой функции начнём со случая, представляющего лишь методический интерес. В этом параграфе $\mathfrak{D} = C_{00}(\mathbb{R})$ — векторное пространство вещественных непрерывных функций на числовой прямой с компактными носителями. Будем называть \mathfrak{D} пространством основных функций. Определим сходимость в \mathfrak{D} следующим образом: $\varphi_n \rightarrow \varphi$ ($\varphi_n, \varphi \in \mathfrak{D}$), если

- (а) $\exists [a, b] \forall n \in \mathbb{N} (\text{supp } (\varphi_n) \subset [a, b]),$
- (б) $\varphi_n \Rightarrow \varphi.$

Линейный функционал $\Phi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ (см. 71.1) назовём непрерывным, если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ ($\varphi_n, \varphi \in \mathfrak{D}$) влечёт $\Phi(\varphi_n) \rightarrow \Phi(\varphi)$. Всякий такой функционал будем называть обобщённой функцией над \mathfrak{D} , а векторное пространство всех линейных непрерывных функционалов на пространстве \mathfrak{D} назовём пространством обобщённых функций над \mathfrak{D} . Оно обозначается символом \mathfrak{D}' .

2. З а м е ч а н и е. Линейный функционал $\Phi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывен тогда он непрерывен в θ , т. е. $\varphi_n \rightarrow \theta$ влечёт $\Phi(\varphi_n) \rightarrow 0$.

Поясним теперь, что приведённая конструкция в определённом смысле расширяет класс функций \mathcal{R}_1^{loc} .

3. Каждой функции $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$ соответствует обобщённая функция $\Phi_f \in \mathfrak{D}'$, определённая равенством

$$\Phi_f(\varphi) \equiv \int f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}. \quad (*)$$

При этом указанное соответствие инъективно.

¶ Интеграл в правой части корректно определён (!) и Φ_f — линейный функционал на \mathfrak{D} . Установим непрерывность функционала Φ_f . Пусть $\varphi_n \rightarrow \theta$ ($\varphi_n \in \mathfrak{D}$) и отрезок $[a, b]$ таков, что $\text{supp } (\varphi_n) \subset [a, b]$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда $\Phi_f(\varphi_n) \rightarrow 0$ в силу оценки

$$|\Phi_f(\varphi_n)| \leq \int_a^b |f(x)| |\varphi_n(x)| dx \leq \|\varphi_n\|_{[a,b]} \int_a^b |f(x)| dx$$

с учётом того, что в силу (б) $\varphi_n \Rightarrow \theta$.

Докажем инъективность. Так как соответствие $f \rightarrow \Phi_f$ линейно по f , достаточно проверить, что $f \neq \theta$ влечёт $\Phi_f \neq 0$. Итак, пусть $\theta \neq f \in \mathcal{R}_1^{loc}$. Это означает, что существует отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ такой, что интеграл $\int_a^b f(x) dx$ не имеет особенностей на $[a, b]$ и $\int_a^b |f(x)| dx > 0$. Следовательно, f непрерывна п.в. на $[a, b]$, и значит, найдётся $x_0 \in (a, b)$ — точка непрерывности функции f , в которой $f(x_0) \neq 0$; например, пусть $f(x_0) > 0$. Следовательно, f строго положительна в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$. Возьмём $\varphi \in \mathfrak{D}$, $\varphi \geq 0$, чтобы $\text{supp}(\varphi) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varphi(x_0) = 1$. В силу 50.3 получим $\Phi_f(\varphi) = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x)\varphi(x) dx > 0$, то есть $\Phi_f \neq 0$. \square

Таким образом, осуществлено вложение \mathcal{R}_1^{loc} в \mathfrak{D}' . Оказывается, пространство \mathfrak{D}' шире, чем \mathcal{R}_1^{loc} : существуют обобщённые функции, не являющиеся функционалами вида Φ_f ($f \in \mathcal{R}_1^{loc}$).

4. [δ -функция]. Определим функционал δ на пространстве \mathfrak{D} формулой $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ ($\varphi \in \mathfrak{D}$). Тогда $0 \neq \delta \in \mathfrak{D}'$ (!!). Покажем, что не существует $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$ такой, что $\delta = \Phi_f$. Пусть, напротив, $\varphi(0) = \int f(x)\varphi(x) dx$ ($\varphi \in \mathfrak{D}$), где f — некоторая функция из \mathcal{R}_1^{loc} . Покажем, что $f(x) = 0$ п.в. (это будет означать, что $\Phi_f = 0$ в противоречие с тем, что $\delta \neq 0$). Пусть $x_0 (\neq 0)$ — точка непрерывности функции f . Если $f(x_0) \neq 0$, то легко подобрать $\varphi \in \mathfrak{D}$ так, чтобы $0 \notin \text{supp}(\varphi) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varphi(x_0) = 1$, где $\varepsilon > 0$ таково, что $\text{sgn } f(x) = \text{sgn } f(x_0)$ ($x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$). В этом случае $0 = \varphi(0) = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x)\varphi(x) dx \neq 0$ — противоречие. Таким образом, $f(x) = 0$ п.в.

5. Для обычных функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по самому определению можно говорить о значении $f(x)$ функции f в точке x . Для элемента f пространства \mathcal{R}_1^{loc} это уже не так (вспомним, что f — это класс функций, отличающихся между собой на множестве лебеговой меры нуль). Выбрав функцию — представителя класса, можно говорить о её значениях в точках. Для обобщённых функций утрачивается и такое понимание. Отметим, однако, что при рассмотренном выше вложении \mathcal{R}_1^{loc} в \mathfrak{D}' по обобщённой функции Φ_f можно восстановить значение f в её точках непрерывности. Действительно, пусть x_0 — точка непрерывности f , и последовательность $\varphi_n \in \mathfrak{D}$ определена условиями $\varphi_n \geq 0$, $\text{supp}(\varphi_n) \subset (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$, $\int \varphi_n(x) dx = 1$. Тогда по теореме о среднем 50.4

$$\Phi_f(\varphi_n) = \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} f(x)\varphi_n(x) dx = \lambda_n \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} \varphi_n(x) dx = \lambda_n,$$

где $\lambda_n \in [\inf_{x_0 - \frac{1}{n} \leq x \leq x_0 + \frac{1}{n}} f(x), \sup_{x_0 - \frac{1}{n} \leq x \leq x_0 + \frac{1}{n}} f(x)]$. Так как f непрерывна в точке x_0 , то $\lambda_n - f(x_0 + \frac{1}{n}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). Следовательно,

$$f(x_0) = \lim_n f(x_0 + \frac{1}{n}) = \lim_n [f(x_0 + \frac{1}{n}) - \lambda_n] + \lim_n \lambda_n = \lim_n \lambda_n = \lim_n \Phi_f(\varphi_n).$$

§170. Пространства основных функций \mathcal{D} и \mathcal{S}

Выбор пространства основных функций, как правило, диктуется задачами, которые предполагается решать методами теории обобщённых функций. Обычно это пространства бесконечно дифференцируемых, быстро убывающих на бесконечности функций. Рассмотрим два характерных пространства основных функций, ограничившись случаем функций одного переменного. Топологические структуры в них будем описывать в терминах сходящихся последовательностей. Это возможно, так как пространства обладают 1-й аксиомой счётности (см. 101.7).

1. Пространством \mathcal{D} называется комплексное векторное пространство функций, заданных на числовой прямой, неограниченное число раз дифференцируемых и обладающих компактными носителями. Сходимость в этом пространстве определена условием: последовательность $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \theta$, если

- (а) $\exists [a, b] \forall n \in \mathbb{N} (\text{supp}(\varphi_n) \subset [a, b]),$
- (б) $\varphi_n^{(k)} \Rightarrow \theta \ (n \rightarrow +\infty), \ k = 0, 1, 2, \dots,$

то есть последовательность φ_n стремится к нулю равномерно вместе со всеми своими производными.

З а м е ч а н и я. **2.** Пространство \mathcal{D} нетривиально. Например, в \mathcal{D} входит функция $\varphi(x) = \chi_{(0,1)}(x) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{x(1-x)}\right\} (x \in \mathbb{R})$ (!!).

3. Функции

$$\|\varphi\|_k \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)| \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (*)$$

являются полунормами в \mathcal{D} и условие (б) п. 1 эквивалентно тому, что $\|\varphi_n\|_k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) при любом $k = 0, 1, 2, \dots$.

4. Пространством \mathcal{S} (пространством быстро убывающих на бесконечности функций) называется комплексное векторное пространство неограниченное число раз дифференцируемых функций φ , заданных на числовой прямой и удовлетворяющих требованию:

$$\|\varphi\|_{k,m} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^m) |\varphi^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Сходимость в пространстве определена условием: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \theta$, если $\|\varphi_n\|_{k,m} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), $k, m = 0, 1, 2, \dots$.

5. **З а м е ч а н и е.** Справедливо включение $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, которое согласуется со структурами сходимости: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \theta \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \theta$.

У п р а ж н е н и я. **6.** Покажите, что полунормы (*) в пространстве \mathcal{D} являются нормами.

7. Покажите, что имеют место включения $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_1(\mathbb{R}), \mathcal{R}_2(\mathbb{R})$. Более того, $\varphi \in \mathcal{S}$ влечёт $\varphi^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{R}_2(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}$).

8. Сходимость в пространствах основных функций \mathcal{D} и \mathcal{S} , определённая в пп. 1 и 4, естественно связана с подходящими топологиями в этих пространствах. Опишите базис окрестностей точки $\varphi \in \mathcal{D}$ (соответственно $\varphi \in \mathcal{S}$) в соответствующей топологии пространства \mathcal{D} (соответственно пространства \mathcal{S}).

§171. Линейные отображения в пространствах основных функций

1. Всюду ниже через \mathfrak{D} обозначается одно из пространств основных функций \mathcal{D} или \mathcal{S} . Отображение $A : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$ называется непрерывным, если $\varphi_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} \varphi$ влечёт $A(\varphi_n) \xrightarrow{\mathfrak{D}} A(\varphi)$.

Линейное отображение $A : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$ непрерывно тогда и только тогда, когда A непрерывно в точке θ (!!). Рассмотрим основные примеры линейных непрерывных отображений.

2. Операция дифференцирования. Отображения

$$D^{(N)}(\varphi) \equiv \varphi^{(N)} \quad (\varphi \in \mathfrak{D}, N \in \mathbb{N})$$

— непрерывные линейные отображения в пространстве \mathfrak{D} .

¶ Рассмотрим, например, случай пространства \mathcal{S} . С учётом 170.3 имеем $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \theta \Rightarrow \|\varphi_n\|_{k,m} \rightarrow 0$ ($k, m = 0, 1, 2, \dots$) $\Rightarrow \|D^{(N)}\varphi_n\|_{k,m} = \|\varphi_n\|_{k+N,m} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). □

Рассмотрим теперь операцию умножения на функцию.

3. Пусть $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция. Отображение $T_\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, заданное равенством $(T_\psi\varphi)(x) \equiv \psi(x)\varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, есть линейное непрерывное отображение пространства \mathcal{D} (!!).

Чтобы корректно определить аналогичную операцию в пространстве \mathcal{S} , нам понадобится некоторая подготовка.

4. Бесконечно дифференцируемую функцию $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ назовём функцией полиномиального роста, если для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ найдутся $m = m(k) \in \mathbb{N}$ и константа $C > 0$ такие, что $|\psi^{(k)}(x)| \leq C(1 + |x|^m)$, $x \in \mathbb{R}$.

5. П р и м е р. Всякий полином является функцией полиномиального роста.

¶ Достаточно установить оценку $|a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n| \leq C(1 + |x|^n)$. Утверждение следует из замечания, что конечны пределы $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n|}{1 + |x|^n}$. □

6. Пусть ψ — функция полиномиального роста. Тогда отображение $(T_\psi\varphi)(x) \equiv \psi(x)\varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{S}$, — линейное непрерывное отображение пространства \mathcal{S} .

¶ Пусть k, m — произвольные неотрицательные целые числа. Тогда при подходящих константах C_1, C_2 и целых $m_j \geq 0$

$$\begin{aligned} (1 + |x|^m)(\psi(x)\varphi(x))^{(k)} &= (1 + |x|^m) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \psi^{(j)}(x) \varphi^{(k-j)}(x) \\ &\leq C_1 \sum_{j=0}^k (1 + |x|^m)(1 + |x|^{m_j}) |\varphi^{(k-j)}(x)| \\ &\leq C_2 \sum_{j=0}^k (1 + |x|^{m+m_j}) |\varphi^{(k-j)}(x)| \\ &\leq C_2 \sum_{j=0}^k \|\varphi\|_{k-j, m+m_j}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\varphi_n \xrightarrow{S} \theta$. С учётом доказанного неравенства:

$$\|T_\psi(\varphi_n)\|_{k,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^m) |(\psi(x)\varphi_n(x))^{(k)}| \leq C_2 \sum_{j=0}^k \|\varphi_n\|_{k-j, m+m_j} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

7. Преобразование Фурье \sharp) — линейное непрерывное отображение, биективно отображающее \mathcal{S} на \mathcal{S} .

¶ Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда определено её преобразование Фурье $\varphi^\sharp(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(t) e^{-ixt} dt$, причём φ^\sharp — непрерывная функция (так как $\varphi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, см. 170.7). Покажем, что $\varphi^\sharp \in \mathcal{S}$. Формально дифференцируя под знаком интеграла, имеем для $k \in \mathbb{N}$:

$$\varphi^{\sharp(k)}(x) = \int \psi(t) e^{-ixt} dt, \quad \text{где } \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-it)^k \varphi(t). \quad (1)$$

В силу п. 6 $\psi \in \mathcal{S}$, и значит, $\psi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, откуда интеграл в правой части (1) сходится равномерно, так что равенство (1) справедливо. Итак, ψ обладает производными всех порядков. Последовательно интегрируя по частям в (1), имеем

$$\varphi^{\sharp(k)}(x) = \frac{1}{ix} \int \psi'(t) e^{-ixt} dt = \dots = \frac{1}{(ix)^m} \int \psi^{(m)}(t) e^{-ixt} dt,$$

откуда для любых k, m

$$\|\varphi^\sharp\|_{k,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^m) |\varphi^{\sharp(k)}(x)| \leq \int |\psi(t)| dt + \int |\psi^{(m)}(t)| dt < +\infty.$$

Итак, $\varphi^\sharp \in \mathcal{S}$. Установим теперь, что \sharp) — непрерывное линейное отображение. Пусть $\varphi_n \xrightarrow{S} \theta$, то есть $\|\varphi_n\|_{k,m} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) для любых k, m . Тогда

$$\|\varphi_n^\sharp\|_{k,m} \leq \int |\psi_n(t)| dt + \int |\psi_n^{(m)}(t)| dt, \quad (3)$$

где $\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-it)^k \varphi_n(t)$. Достаточно показать, что интегралы в правой части (3) стремятся к нулю. Действительно,

$$\int |\psi_n^{(m)}(t)| dt = \int |\psi_n^{(m)}(t)| (1+t^2) \frac{dt}{1+t^2} \leq \|\psi_n\|_{m,2} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Осталось убедиться в биективности отображения \sharp). С учётом 168.6 $\varphi^\sharp = \theta \Rightarrow \varphi = \varphi^{\sharp\flat} = \theta^\flat = \theta$, то есть \sharp) инъективно. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$ произвольно. Полагая $\psi = \varphi^\flat$, имеем $\psi \in \mathcal{S}$, $\varphi = \psi^\sharp$, так что \sharp) сюръективно. \square

8. У п р а ж н е н и е. Пусть $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ такова, что $\varphi_0(0) = 1$. Показать, что отображение $A_0 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, заданное равенством

$$(A_0\varphi)(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} [\varphi(t) - \varphi(0)\varphi_0(t)], & \text{если } t \neq 0, \\ \varphi'(0) - \varphi(0)\varphi_0'(0), & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

является линейным непрерывным отображением. {Указание: показать сначала, что $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow A_0\varphi \in \mathcal{S}$. Для проверки непрерывности достаточно получить оценку вида $\|A_0\varphi\|_{k,m} \leq C \sum_{j=1}^n \|\varphi\|_{k_j, m_j}$. Пусть, например, $k = 0$. Зафиксируем $\delta > 0$. Тогда при $|t| \geq \delta$:

$$(1 + |t|^m) \left| \frac{1}{t} [\varphi(t) - \varphi(0)\varphi_0(t)] \right| \leq \frac{1}{\delta} (\|\varphi\|_{0,m} + |\varphi(0)|\|\varphi_0\|_{0,m}) \leq C_1 \|\varphi\|_{0,m};$$

при $|t| < \delta$:

$$\begin{aligned} (1 + |t|^m) \left| \frac{1}{t} [\varphi(t) - \varphi(0)\varphi_0(t)] \right| &= (1 + |t|^m) \left| \frac{1}{t} [\varphi(t) - \varphi(0) + \varphi(0)(1 - \varphi_0(t))] \right| \\ &\leq C_2 [\|\varphi\|_{1,0} + \|\varphi\|_{0,0}], \end{aligned}$$

так что $\|A_0\varphi\|_{0,m} \leq C(\|\varphi\|_{0,m} + \|\varphi\|_{1,0} + \|\varphi\|_{0,0})$.

§172. Определение обобщённой функции

1. Пусть \mathfrak{D} ($= \mathcal{D}$ или \mathcal{S}) — пространство основных функций. *Обобщённой функцией (над \mathfrak{D})* называется непрерывный линейный функционал $\Phi : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{C}$. При этом непрерывность естественно означает, что $\varphi_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} \theta \Rightarrow \Phi(\varphi_n) \rightarrow 0$.

Нам будет удобно несколько изменить обозначения: вместо $\Phi(\varphi)$ будем писать $\langle \Phi, \varphi \rangle$. На 1-м месте в форме $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ставится обобщённая функция, а на 2-м — основная функция, значение в которой вычисляется. Совокупность всех обобщённых функций над \mathfrak{D} будет обозначаться через \mathfrak{D}' . В \mathfrak{D}' естественно определяется структура комплексного векторного пространства:

$$\langle \Phi_1 + \Phi_2, \varphi \rangle \equiv \langle \Phi_1, \varphi \rangle + \langle \Phi_2, \varphi \rangle, \quad \langle \lambda \Phi, \varphi \rangle \equiv \lambda \langle \Phi, \varphi \rangle \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Здесь 1-е равенство определяет сумму $\Phi_1 + \Phi_2$ обобщённых функций, а 2-е — произведение обобщённой функции Φ на скаляр λ .

2. З а м е ч а н и е. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. (Пусть $\Phi \in \mathcal{S}'$, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \theta$ ($\varphi_n \in \mathcal{D}$). В силу 170.5 $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \theta$, откуда $\langle \Phi, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$.)

П р и м е р ы. 3. Для каждой функции $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$ равенство $\langle f, \varphi \rangle \equiv \int f(x)\varphi(x) dx$ ($\varphi \in \mathcal{D}$) определяет обобщённую функцию $\langle f, \cdot \rangle$ над \mathcal{D} .

4. Если $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$ такова, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $|f(x)| \leq C(1 + |x|^m)$ ($x \in \mathbb{R}$), то равенство $\langle f, \varphi \rangle \equiv \int f(x)\varphi(x) dx$ ($\varphi \in \mathcal{S}$) определяет обобщённую функцию над \mathcal{S} .

5. Равенство $\langle \delta, \varphi \rangle \equiv \varphi(0)$ ($\varphi \in \mathcal{S}$) определяет обобщённую функцию над \mathcal{S} ; она называется *δ -функцией Дирака*. δ -функция обозначается также символом $\delta(x)$, и указанное выше равенство записывают в виде $\int \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0)$. δ -функция представляет собой математическое выражение плотности единичной массы, сосредоточенной в точке $x = 0$. Если такая масса сосредоточена в точке $x = a$, мы приходим к δ -функции $\delta_a \equiv \delta(x - a)$, определяемой равенством $\langle \delta_a, \varphi \rangle \equiv \varphi(a)$ ($\varphi \in \mathcal{S}$).

6. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Положим

$$\langle f, \varphi \rangle = \text{v.p.} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}). \quad (1)$$

Отметим, что $f \notin \mathcal{R}_1^{\text{loc}}$, так что ситуация отлична от рассмотренной в п. 3. Равенство (1) определяет обобщённую функцию над \mathcal{D} . {Правая часть (1) определена в силу представления

$$\langle f, \varphi \rangle = \int \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \text{v.p.} \int \frac{\varphi(0)}{x} dx, \quad (2)$$

если учесть, что интегрирование фактически ведётся по компактному множеству — носителю функции φ . Пусть теперь $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \theta$ и отрезок $[a, b]$ таков, что $\text{supp}(\varphi_n) \subset [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Если $0 \notin [a, b]$, то $|\langle f, \varphi_n \rangle| = \left| \int_a^b \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \right| \leq \|\varphi_n\|_0 \left| \ln \frac{b}{a} \right| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). Если $0 \in [a, b]$, то из (2) имеем

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| = \left| \int_a^b \varphi'_n(\theta_n x) dx \right| + \left| \text{v.p.} \int_a^b \frac{\varphi_n(0)}{x} dx \right|, \quad |\theta_n| < 1.$$

Итак, $|\langle f, \varphi_n \rangle| \leq (b-a)\|\varphi_n\|_1 + \|\varphi_n\|_0 \cdot \left| \text{v.p.} \int_a^b \frac{dx}{x} \right| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$).}

7. У п р а ж н е н и е. Показать, что функционал $\langle f, \cdot \rangle$ из п. 6 является обобщённой функцией над \mathcal{S} .

§173. Сходимость обобщённых функций

1. В векторном пространстве \mathcal{D}' обобщённых функций над основным пространством \mathcal{D} вводится понятие сходимости: последовательность $\Phi_n \in \mathcal{D}'$ называется сходящейся к обобщённой функции $\Phi \in \mathcal{D}'$, если $\lim_n \langle \Phi_n, \varphi \rangle = \langle \Phi, \varphi \rangle$ для любой $\varphi \in \mathcal{D}$.

В соответствии с этим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k$ из обобщённых функций $\Psi_k \in \mathcal{D}'$ называется сходящимся к обобщённой функции $\Psi \in \mathcal{D}'$, если к Ψ сходится последовательность $\sum_{k=1}^n \Psi_k$ его частных сумм.

2. П р и м е р. Рассмотрим последовательность обычных функций $f_n = n\chi_{(0, 1/n)}$ ($n \in \mathbb{N}$). В силу 172.4 $\langle f_n, \cdot \rangle \in \mathcal{S}'$. При этом $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \langle f_n, \varphi \rangle = \int_0^{1/n} \varphi(t) dt = \varphi\left(\frac{1}{n}\theta_n\right) \rightarrow \varphi(0)$ ($n \rightarrow +\infty$) ($0 < \theta_n < 1$). Следовательно, $\langle f_n, \cdot \rangle \rightarrow \delta$ ($n \rightarrow +\infty$), где δ — δ -функция.

§174. Умножение обобщённых функций на бесконечно дифференцируемые функции

1. Пусть ψ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция и $\Phi \in \mathcal{D}'$. Тогда равенство

$$\langle \psi\Phi, \varphi \rangle \equiv \langle \Phi, \psi\varphi \rangle \quad (*)$$

определяет обобщённую функцию $\psi\Phi$ над \mathcal{D} .

¶ Функционал $\langle \psi\Phi, \cdot \rangle$ линеен на \mathcal{D} (!!). Пусть $\varphi_n \xrightarrow{S} \theta$. В силу 171.3 $\langle \psi\Phi, \varphi_n \rangle = \langle \Phi, \psi\varphi_n \rangle = \langle \Phi, T_\psi \varphi_n \rangle \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). □

Аналогично имеет место утверждение

2. Если функция ψ полиномиального роста, то равенство (*) определяет обобщённую функцию $\psi\Phi$ над \mathcal{S} (!!).

3. В частности, для $\psi(x) \equiv x$ ($x \in \mathbb{R}$) и $\Phi \in \mathcal{S}'$ положим $\Phi^\S \equiv \psi\Phi$, так что $\Phi^\S \in \mathcal{S}'$.

З а м е ч а н и я. **4.** Данное выше определение согласуется с обычным умножением функций. Например, если ψ — бесконечно дифференцируемая функция, то $\psi\langle f, \cdot \rangle = \langle \psi f, \cdot \rangle$, $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$.

5. Произведение обобщённой функции на обобщённую функцию определить невозможно, если требовать, чтобы эта операция была непрерывной и на классе обычных функций совпадала бы с обычным умножением функций.

У п р а ж н е н и я. **6.** Найти δ^\S .

7. Найти $(\frac{1}{x})^\S$, где $\frac{1}{x}$ — обобщённая функция из 172.6.

§175. Дифференцирование обобщённых функций

1. Пусть $\mathfrak{D} = \mathcal{D}$ или \mathcal{S} . Производной обобщённой функции $\Phi \in \mathfrak{D}'$ называется обобщённая функция Φ' , определённая равенством

$$\langle \Phi', \varphi \rangle \equiv -\langle \Phi, \varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathfrak{D}.$$

Данное определение корректно: Φ' — линейный функционал, его непрерывность следует из 171.2. По индукции определяются производные высших порядков: $\Phi^{(n)} \equiv (\Phi^{(n-1)})'$ ($n = 2, 3, \dots$).

Операция дифференцирования обобщённых функций согласуется с дифференцированием обычных функций.

2. Пусть $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$ — гладкая на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда для обобщённой функции $\langle f, \cdot \rangle \in \mathcal{D}'$ имеет место равенство $\langle f, \cdot \rangle' = \langle f', \cdot \rangle$.

¶ Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ произвольна. Обозначая через $\langle f, \varphi \rangle'$ значение обобщённой функции $\langle f, \cdot \rangle'$ в точке φ , имеем

$$\langle f, \varphi \rangle' = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int f(x)\varphi'(x)dx = -f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int f'(x)\varphi(x)dx = \langle f', \varphi \rangle. \quad \square$$

3. **З а м е ч а н и е.** Обратим внимание на замечательное обстоятельство: всякая обобщённая функция дифференцируема (а значит, обладает производными всех порядков!). В частности, каждая функция $f \in \mathcal{R}_1^{loc}$, будучи не обязательно дифференцируемой в обычном смысле, как обобщённая функция уже дифференцируема и притом сколько угодно раз.

4. Пусть $\Phi_n \rightarrow \Phi$ ($\Phi_n, \Phi \in \mathfrak{D}'$). Тогда $\Phi'_n \rightarrow \Phi'$. Если $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n$ ($\Psi_n, \Psi \in \mathfrak{D}'$), то $\Psi' = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi'_n$, то есть сходящийся ряд из обобщённых функций можно дифференцировать почленно.

¶ Для $\varphi \in \mathfrak{D}$: $\lim_n \langle \Phi'_n, \varphi \rangle = -\lim_n \langle \Phi_n, \varphi' \rangle = -\langle \Phi, \varphi' \rangle$, то есть $\Phi'_n \rightarrow \Phi'$. 2-е утверждение непосредственно следует из 1-го. \square

Примеры 5. Найдём производные δ -функции:

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0), \quad \langle \delta'', \varphi \rangle = -\langle \delta', \varphi' \rangle = \varphi''(0), \dots, \quad \langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$

6. Найдём производную от функции Хэвисайда $h \equiv \chi_{(0,+\infty)}$ в смысле обобщённых функций над \mathcal{S} . Имеем

$$\langle h', \varphi \rangle = -\langle h, \varphi' \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) \quad (\varphi \in \mathcal{S}),$$

так что $\langle h, \cdot \rangle' = \delta$.

7. Пусть f — 2π -периодическая функция, заданная на периоде равенствами

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{если } 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{если } x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

Её ряд Фурье (он сходится поточечно) имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad (*)$$

Этот ряд сходится в смысле обобщённых функций над \mathcal{D} (!!). Поэтому обобщённая производная функции f в соответствии с п. 8 (см. ниже) равна $\langle f, \cdot \rangle' = \langle -\frac{1}{2} + \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi j}, \cdot \rangle$, то есть

$$\langle f, \varphi \rangle' = -\frac{1}{2} \int \varphi(x) dx + \pi \cdot \sum_{j \in \text{supp}(\varphi)} \varphi(2\pi j) \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

С другой стороны, дифференцируя почленно ряд (*) согласно п. 4, имеем равенство в смысле обобщённых функций $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ (ряд в правой части в смысле обычных функций расходится!).

Упражнение 8. Пусть $f \in \mathcal{R}_1^{\text{loc}}$ кусочно-гладкая на каждом отрезке, причём $f(x_i+) - f(x_i-) = h_i$ ($i = 1, \dots, s$). Тогда производная функции f в смысле обобщённых функций имеет вид $\langle f, \cdot \rangle' = \langle f' + \sum_{i=1}^s h_i \delta_{x_i}, \cdot \rangle$ (см. 175.6).

9. Найти предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$ в \mathcal{D}' .

10. Доказать, что ряды (а) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \delta_n$, (б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\delta_n)^{(n)}$ сходятся в \mathcal{D}' при любых a_n . Какое условие следует наложить на a_n , чтобы ряд (а) сходиллся в \mathcal{S}' ?

11. Найти производные в смысле обобщённых функций: $|x|'$, $|x|''$, $[\psi(x)h(x)]'$ (ψ — гладкая функция, h — функция Хэвисайда).

§176. Преобразование Фурье обобщённых функций

1. Преобразованием Фурье (обратным преобразованием Фурье) обобщённой функции $\Phi \in \mathcal{S}'$ называется обобщённая функция Φ^\sharp (соответственно Φ^\flat), определяемая равенством $\langle \Phi^\sharp, \varphi \rangle \equiv \langle \Phi, \varphi^\sharp \rangle$, $\varphi \in \mathcal{S}$ (соответственно $\langle \Phi^\flat, \varphi \rangle \equiv \langle \Phi, \varphi^\flat \rangle$).

Корректность определения следует из того, что $\sharp) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ — линейное непрерывное отображение (171.7). Отметим основные свойства преобразования Фурье обобщённых функций.

$$2. \Phi^{\sharp\flat} = \Phi^{\flat\sharp} = \Phi.$$

$$3. \Phi_n \rightarrow \Phi \ (\Phi_n, \Phi \in \mathcal{S}') \Rightarrow \Phi_n^\sharp \rightarrow \Phi^\sharp, \ \Phi_n^\flat \rightarrow \Phi^\flat.$$

4. Отображения $\sharp), \flat) : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ суть биекции.

¶ П. 2: $\langle \Phi^{\sharp\flat}, \varphi \rangle = \langle \Phi^\sharp, \varphi^\flat \rangle = \langle \Phi, \varphi^{\flat\sharp} \rangle = \langle \Phi, \varphi \rangle$ ($\varphi \in \mathcal{S}$).

П. 3.: $\Phi_n \rightarrow \Phi \Rightarrow \langle \Phi_n^\sharp, \varphi \rangle = \langle \Phi_n, \varphi^\sharp \rangle \rightarrow \langle \Phi, \varphi^\sharp \rangle = \langle \Phi^\sharp, \varphi \rangle$ ($\varphi \in \mathcal{S}$) $\Rightarrow \Phi_n^\sharp \rightarrow \Phi^\sharp$.

П. 4.: $\Phi \in \mathcal{S}' \Rightarrow \Phi = (\Phi^\flat)^\sharp \Rightarrow \sharp) — сюръекция. \Phi^\sharp = F^\sharp (F, \Phi \in \mathcal{S}') \Rightarrow \Phi = \Phi^{\sharp\flat} = F^{\sharp\flat} = F \Rightarrow \flat) — инъекция. \square$

Имеет место аналог свойства 168.8.

5. Для каждой $\Phi \in \mathcal{S}' : \Phi' = i\Phi^{\sharp\flat}$.

¶ Для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем (см. 168.8)

$$\langle \Phi', \varphi \rangle = -\langle \Phi, \varphi' \rangle = -\langle \Phi, i\varphi^{\sharp\flat} \rangle.$$

Однако

$$\begin{aligned} \varphi^{\sharp\flat}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{its} ds \cdot s \int e^{-is\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda \text{ [делаем замену } s \rightarrow -s] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int e^{-its} ds \cdot s \int e^{is\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda = -\varphi^{\flat\sharp}(t). \end{aligned}$$

Поэтому $\langle \Phi', \varphi \rangle = i\langle \Phi, \varphi^{\flat\sharp} \rangle = \langle i\Phi^{\sharp\flat}, \varphi \rangle$ ($\varphi \in \mathcal{S}$). \square

6. П р и м е р. Найдём преобразование Фурье δ -функции:

$$\langle \delta^\sharp, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi^\sharp \rangle = \varphi^\sharp(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(t) dt = \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \rangle \ (\varphi \in \mathcal{S}),$$

откуда $\delta^\sharp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Аналогично, $\delta^\flat = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

§177. Простейшие дифференциальные уравнения в классе обобщённых функций

1. Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение

$$\Phi' = 0. \tag{1}$$

Будем решать его в пространстве обобщённых функций \mathcal{S}' . Воспользуемся результатом 176.5. Из него следует, что (1) эквивалентно уравнению $\Phi^{\sharp\sharp} = 0$ или, что всё равно, уравнению

$$\langle \Phi^\sharp, \varphi^\sharp \rangle = 0 \ (\varphi \in \mathcal{S}). \tag{2}$$

Зафиксируем функцию $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ такую, что $\varphi_0(0) = 1$. Тогда каждая функция $\varphi \in \mathcal{S}$ однозначно представима в виде $\varphi = \psi^\S + \alpha\varphi_0$, где ψ — подходящая функция из \mathcal{S} . {Действительно, $\alpha = \varphi(0)$ и $\psi^\S = \varphi - \alpha\varphi_0$, причём $\psi \in \mathcal{S}$ в силу 171.8.} Таким образом, решение уравнения (2), удовлетворяющего “начальному” условию $\langle \Phi^\sharp, \varphi_0 \rangle = 1$, находится из равенства

$$\langle \Phi^\sharp, \varphi \rangle = \varphi(0) \langle \Phi^\sharp, \varphi_0 \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Итак, $\Phi^\sharp = \delta$, так что $\Phi = \delta^\flat = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Мы пришли к утверждению

2. *Общее решение уравнения (1) в \mathcal{S}' имеет вид $\Phi = \text{const}$.*

З а м е ч а н и я. 3. Как известно, общее решение уравнения (1) в обычных функциях также $\Phi = \text{const}$. Поскольку, однако, класс \mathcal{S}' существенно шире класса обычных функций, полученный выше результат заранее не был ясен.

4. Можно было бы решать уравнение (1) в классе \mathcal{D}' . Утверждение п. 2 сохраняется и для этого случая, причем из него в силу замечания 172.2 следует результат п. 2 для \mathcal{S}' .

Рассмотрим теперь более общее уравнение

$$\Phi' = F, \tag{3}$$

где в правой части стоит известная обобщённая функция.

5. **З а м е ч а н и е.** Если решение (3) существует, то в силу п. 2 оно единственно с точностью до постоянного слагаемого.

6. *Уравнение (3) разрешимо в \mathcal{S}' .*

¶ Беря преобразование Фурье от обеих частей (3) и используя 176.5, получим $\Phi'^\sharp = i\Phi^{\sharp\S} = F^\sharp$. Обозначая $\Psi = \Phi^\sharp$, $G = -iF^\sharp$, приходим к эквивалентному уравнению в пространстве \mathcal{S}' :

$$\Psi^\S = G. \tag{4}$$

Решением этого уравнения является, например, обобщённая функция Ψ , заданная равенством $\langle \Psi, \varphi \rangle = \langle G, A_0\varphi \rangle$ ($\varphi \in \mathcal{S}$), где A_0 — линейное непрерывное отображение, определённое в 171.8. В самом деле,

$$\langle \Psi^\S, \varphi \rangle = \langle \Psi, \varphi^\S \rangle = \langle G, A_0(\varphi^\S) \rangle = \langle G, \varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S})$$

(так как $A_0(\varphi^\S)(t) = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$). □

У п р а ж н е н и я. 7. Решить уравнение (1) в \mathcal{D}' .

8. Найти общее решение уравнения $\Phi^{(n)} = 0$ в \mathcal{S}' .

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО МНОГООБРАЗИЯМ

§178. Гладкие кривые

1. *Гладкой кривой* в \mathbb{R}^n называется пара $\{\gamma; x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ или, короче, $\{\gamma; x(\cdot)\}$, где

(а) $\gamma = \{x(t) : a \leq t \leq b\} (\subset \mathbb{R}^n)$,

(б) вектор-функция x гладкая, причём $\forall t \in [a, b] (x'(t) \neq 0)$.

Непрерывной кусочно-гладкой кривой в \mathbb{R}^n называется пара $\{\gamma; x(\cdot)\}$, причём удовлетворяются требования (а) и

(б') вектор-функция x непрерывна и существует разложение $\Delta(a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b)$ такое, что для любого i ($1 \leq i \leq k$) пара $\{\gamma_i; x : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ — гладкая кривая.

Непрерывная кусочно-гладкая кривая $\{\gamma; x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ называется *замкнутой*, если $x(a) = x(b)$. Функцию $x(\cdot)$ будем называть *параметризацией* кривой γ .

2. Гладкие кривые $\{\gamma; x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ и $\{\tilde{\gamma}; \tilde{x} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ считаются равными, если $\gamma = \tilde{\gamma}$ и параметр t , с помощью которого осуществляется параметризация γ , связан с параметром τ , параметризующим $\tilde{\gamma}$, допустимым образом, то есть функция $t = \lambda(\tau)$ ($c \leq \tau \leq d$) гладкая, строго монотонная и $\lambda'(\tau) \neq 0$ ($\tau \in [c, d]$). В силу данного соглашения одна и та же кривая допускает различные параметризации.

3. Введём специальную параметризацию непрерывной кусочно-гладкой кривой $\{\gamma; x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$. Пусть $s(t) = \int_a^t \left[\sum_{i=1}^n x^{i'}(\tau)^2 \right]^{1/2} d\tau$ — длина дуги нашей кривой от начальной точки a до переменной точки t (эта величина в данном случае корректно определена). Обозначим $\ell = s(b)$ и зададим отображение $p : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Положим $p(0) = x(a)$, $p(s) \equiv x(t) \in \gamma$, где $t \in [a, b]$ таково, что $s(t) = s$. В частности, $p(\ell) = x(b)$. Отображение $p : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$ параметризует γ , причём $\{\gamma; x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n\} = \{\gamma; p : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ в смысле п. 2, так как $s'(t) = \|x'(t)\| > 0$ ($a \leq t \leq b$).

§179. Криволинейный интеграл 1-го рода

1. Пусть $\{\gamma; p : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ — непрерывная кусочно-гладкая кривая, параметризованная длиной дуги s . Пусть $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. *Криволинейным интегралом 1-го рода* от функции f вдоль кривой γ называется интеграл

$$\int_{\gamma} f \equiv \int_0^{\ell} f(p(s)) ds. \quad (1)$$

З а м е ч а н и я. 2. Если кривая параметризована каким-либо параметром t , отличным от s , то с учётом 178.3 и формулы замены переменной получим выражение для криволинейного интеграла по кривой $\{\gamma; x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$:

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{\ell} f(p(s)) ds = \int_a^b f(x(t)) \|x'(t)\| dt. \quad (2)$$

3. Величина криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от направления обхода кривой: полагая $\sigma = \ell - s$, $\tilde{p}(\sigma) = p(\ell - \sigma)$, имеем

$$\int_0^\ell f(\tilde{p}(\sigma)) d\sigma = \int_\ell^0 f(p(s)) d(-s) = \int_0^\ell f(p(s)) ds.$$

4. К криволинейному интегралу 1-го рода мы приходим, решая, например, задачу определения массы криволинейного стержня с заданной линейной плотностью (площадь сечения стержня считается постоянной). Пусть уравнение стержня задано параметрически $\gamma = \{r(t) : a \leq t \leq b\}$, где $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Пусть плотность описывается функцией $\rho(x, y, z)$, определённой в точках стержня. Взяв некоторое разложение $\Delta(a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b)$, примем приближённо массу m_i i -го участка стержня, заключённого между точками $r(t_{i-1})$, $r(t_i)$, равной $m_i \cong \rho(r(\tau_i))\Delta\ell_i$, где τ_i — пока произвольная точка из $[t_{i-1}, t_i]$, а $\Delta\ell_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|r'(t)\| dt$ — длина этого участка. По теореме о среднем существует точка $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, что $\Delta\ell_i = \|r'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1})$. Полагая $\tau_i = \xi_i$, получим $m \cong \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k \rho(r(\xi_i))\|r'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1})$. В качестве точного значения искомой массы естественно принять предел

$$m = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum m_i = \int_a^b \rho(r(t))\|r'(t)\| dt = \int_\gamma \rho.$$

5. П р и м е р. Вычислим $\int_\gamma \sqrt{x}$, где γ — часть кривой $x = y^2$, заключённая между точками $(1, -1)$, $(1, 1)$. Как чаще всего случается на практике, кривая задаётся её геометрическим образом γ , а параметризацию следует подобрать. Отметим, что параметром x параметризовать всю кривую в данном случае нельзя (γ не является графиком функции вида $y = f(x)$). Кривую можно параметризовать переменной y : $x(y) = y^2, y(y) = y$ ($-1 \leq y \leq 1$). Имеем $f(x, y) = \sqrt{x(y)} = |y|$. Используя формулу (2), получаем $\int_\gamma \sqrt{x} = \int_{-1}^1 |y|(1 + 4y^2)^{1/2} dy = 2 \int_0^1 y(1 + 4y^2)^{1/2} dy = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

§180. Криволинейный интеграл 2-го рода

1. Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (здесь и ниже под областью понимается открытое линейно связное множество) задано векторное поле a (то есть задано отображение $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$). Это может быть, например, силовое поле или поле тяготения. Чтобы сместить материальную точку с координатами $(x^1, x^2, x^3) \in \Omega$ на малый вектор $h = (h^1, h^2, h^3)$, нужно совершить “элементарную” работу

$$W_{\text{эл.}} = \langle a(x), h \rangle = a^1(x)h^1 + a^2(x)h^2 + a^3(x)h^3.$$

Пусть непрерывная кусочно-гладкая кривая $\{\gamma; r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ целиком лежит в Ω (то есть $r(t) \in \Omega$ ($c \leq t \leq d$)), и требуется найти работу поля a по перемещению материальной точки вдоль кривой γ от точки $r(c)$ до точки $r(d)$ в направлении возрастания параметра t . Будем предполагать векторное поле непрерывным. Рассмотрим некоторое разложение $\Delta(c = t_0 < t_1 < \dots < t_N = d)$. Тогда приближённое

значение искомой работы

$$W = \sum_{j=1}^N \langle a(r(t_{j-1})), r(t_j) - r(t_{j-1}) \rangle \approx \sum_{j=1}^N \langle a(r(\tau_j)), r'(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) \rangle, \quad t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j.$$

Устремляя $d(\Delta)$ к 0, получим $W = \int_c^d \langle a(r(t)), r'(t) dt \rangle$ (в силу непрерывности a замены $a(r(t_{j-1})) \rightarrow a(r(\tau_j))$ корректны; однако мы опускаем детали выкладок).

2. Полученное выражение можно переписать иначе. Имеем с учётом 179.2

$$W = \int_c^d \langle a(r(t)), \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \cdot \|r'(t)\| dt \rangle = \int_{\gamma} \langle a, \varkappa \rangle,$$

где $\varkappa(t)$ — орт касательной к кривой γ в точке t в направлении возрастания параметра t . Полученный интеграл имеет специфическую особенность: он зависит не только от векторного поля и кривой, но и от выбора направления, в котором точка движется по кривой. Если изменить направление на противоположное, то касательный вектор перейдёт в $(-\varkappa)$ и, следовательно, интеграл изменит знак.

3. Указанное обстоятельство приводит к необходимости ввести понятие ориентации кривой — направление возрастания параметра, участвующего в параметризации кривой. Если одна и та же кривая параметризована двумя вектор-функциями $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\tilde{r} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, а $t = \lambda(\tau)$ ($c \leq \tau \leq d$) — функция связи параметров t ($a \leq t \leq b$) и τ , то (равные) кривые $\{\gamma; r(\cdot)\}$ и $\{\gamma; \tilde{r}(\cdot)\}$ имеют одинаковую (соответственно противоположную) ориентацию, если $\lambda'(\tau) > 0$ ($c \leq \tau \leq d$) (соответственно $\lambda'(\tau) < 0$). Далее через $^{-}\gamma$ обозначается кривая γ , у которой ориентация заменена на противоположную.

4. Теперь своевременно дать общее определение. Пусть $a(x) = (a^1(x), \dots, a^n(x))$ ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) — непрерывное векторное поле и $\{\gamma; r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ — непрерывная кусочно-гладкая кривая в Ω . *Криволинейным интегралом 2-го рода* от векторного поля a вдоль ориентированной кривой γ называется величина

$$\int_{\gamma} a^1(x) dx^1 + \dots + a^n(x) dx^n \equiv \int_a^b \langle a(r(t)), r'(t) dt \rangle.$$

В силу сказанного в п. 2 этот интеграл может быть записан через криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int_{\gamma} a^1(x) dx^1 + \dots + a^n(x) dx^n = \int_{\gamma} \langle a, \varkappa \rangle,$$

где $\varkappa(t)$ — касательный орт к кривой, вычисленный в точке t . Отсюда, в частности, следует, что криволинейный интеграл 2-го рода определён корректно: его величина не зависит от параметризации кривой, если сохраняется её ориентация. При изменении ориентации кривой интеграл изменяет знак на противоположный:

$$\int_{^{-}\gamma} \sum_{i=1}^n a^i(x) dx^i = - \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n a^i(x) dx^i.$$

З а м е ч а н и я. 5. Непрерывная кусочно-гладкая замкнутая кривая γ называется замкнутым контуром. Интеграл по замкнутому контуру обычно обозначается символом $\oint_{\gamma} \langle a, \varkappa \rangle$ и называется *циркуляцией векторного поля a вдоль контура γ* .

6. Определение криволинейного интеграла обобщается на случай кривых γ , представимых в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся непрерывных кусочно-гладких ориентированных кусков:

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^k \gamma_i \quad (\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset, i \neq j) \Rightarrow \int_{\gamma} \langle a, \varkappa \rangle \equiv \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \langle a, \varkappa \rangle.$$

7. П р и м е р. Вычислим $\int_{\gamma} (x^2 + 2xy)dy$, где γ — верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 1$, пробегаемая против часовой стрелки. Параметризуем $\gamma : x = \cos t, y = \sin t$ ($t \in [0, \pi]$). Векторное поле имеет вид $a(x, y) = (0, x^2 + 2xy)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$). Поэтому $\int_{\gamma} (x^2 + 2xy)dy = \int_0^{\pi} (\cos^2 t + 2 \cos t \cdot \sin t) \cos t dt = \frac{4}{3}$.

§181. Потенциальные поля

1. Пусть функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область) дифференцируема в Ω . Тогда в Ω определено векторное поле

$$(\nabla u)(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x^n}(x) \right), \quad (x \in \Omega)$$

(знак ∇ читается “набла”). Функция u называется в этом случае потенциалом векторного поля, а само поле — *потенциальным*. Векторное поле ∇u называют *градиентом* функции u и обозначают $\text{grad } u$.

2. П р и м е р. Напряжённость E электрического поля (в \mathbb{R}^3) точечного заряда q , помещённого в начало координат, в точке пространства, имеющей радиус-вектор r , задаётся формулой (закон Кулона) $E = \lambda q \frac{r}{\|r\|^3}$, где λ — константа, зависящая от выбора системы физических единиц. Это поле потенциально: $E = \nabla u$, где $u(x, y, z) = -\lambda q(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

3. Пусть $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное векторное поле в области Ω . Следующие условия эквивалентны:

- (1) существует непрерывно дифференцируемая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $a = \nabla u$,
- (2) $\oint_{\gamma} \langle a, \varkappa \rangle = 0$ для каждого замкнутого контура $\gamma \subset \Omega$.

¶ (1) \Rightarrow (2). Если $\{\gamma; x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ — замкнутый контур (т. е. $x(c) = x(d)$), то

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \langle a, \varkappa \rangle &= \varepsilon \int_c^d \left[\sum_{i=1}^n a^i(x(t)) x^{i'}(t) \right] dt = \varepsilon \int_c^d \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i}(x(t)) x^{i'}(t) \right] dt \\ &= \varepsilon \int_c^d \frac{d}{dt} [u(x(t))] dt = \varepsilon [u(x(d)) - u(x(c))] = 0 \end{aligned}$$

(здесь $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от ориентации γ).

(2) \Rightarrow (1). Если выполнено (2), то интеграл $\int_{\gamma} \langle a, \varkappa \rangle$, где γ — любая ориентированная кусочно-гладкая кривая с началом в точке x_0 и концом в точке x_1 , зависит лишь от точек x_0 и x_1 и не зависит от самой кривой. Действительно, если γ_1 — ещё одна такая кривая, то $\gamma_2 = -\gamma_1 \cup \gamma$ — замкнутый контур и следовательно, $\int_{\gamma_2} \langle a, \varkappa \rangle = 0$, откуда

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma} - \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma} - \left[\int_{-\gamma_1} + \int_{\gamma} \right] = - \int_{-\gamma_1} = \int_{\gamma_1}.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и положим

$$u(x) = \int_{\gamma(x_0, x)} \langle a, \varkappa \rangle \quad (x \in \Omega), \quad (*)$$

где $\gamma(x_0, x)$ — произвольная непрерывная кусочно-гладкая кривая, лежащая в Ω и соединяющая x_0 с x (она всегда существует (!)), ориентированная условием, что x_0 — её начало. Покажем, что $u(x)$ — потенциал поля a . Убедимся, например, что $\frac{\partial u}{\partial x^1}(x) = a^1(x)$ ($x \in \Omega$). Пусть x получает малое смещение h по 1-й координате и $\delta_h = [x, x + he_1]$ — прямолинейный отрезок с концами в x и $x + he_1$, ориентированный условием, что x — его начало. Из независимости интеграла (*) от пути имеем

$$\begin{aligned} u(x + he_1) - u(x) &= \int_{\gamma(x_0, x+he_1)} - \int_{\gamma(x_0, x)} = \int_{\gamma(x_0, x) \cup \delta_h} - \int_{\gamma(x_0, x)} \\ &= \int_{\gamma(x_0, x)} + \int_{\delta_h} - \int_{\gamma(x_0, x)} = \int_{[x_0, x+he_1]} \langle a, \varkappa \rangle. \end{aligned}$$

Параметризуя отрезок $[x, x + he_1]$ параметром $t = x^1$ и замечая, что в этом случае касательный вектор $\varkappa = \varepsilon e_1$ ($\varepsilon = \operatorname{sgn} h$), имеем с учётом теоремы о среднем:

$$\begin{aligned} u(x + he_1) - u(x) &= \begin{cases} \int_{x^1}^{x^1+h} a^1(t, x^2, \dots, x^n) dt, & \text{если } h > 0, \\ \int_{x^1+h}^{x^1} a^1(t, x^2, \dots, x^n) dt, & \text{если } h < 0, \end{cases} \\ &= a^1(x^1 + \theta h, x^2, \dots, x^n) h \quad (0 \leq \theta \leq 1). \end{aligned}$$

Из непрерывности функции a^1 имеем отсюда $\frac{\partial u}{\partial x^1}(x) = a^1(x)$. \square

§182. Ротор

1. Пусть $a(x)$ ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$) — непрерывно дифференцируемое векторное поле. Ротором поля a (обозначается $\operatorname{rot} a$) называется векторное поле

$$\operatorname{rot} a = \left(\frac{\partial a^3}{\partial x^2} - \frac{\partial a^2}{\partial x^3}, \frac{\partial a^1}{\partial x^3} - \frac{\partial a^3}{\partial x^1}, \frac{\partial a^2}{\partial x^1} - \frac{\partial a^1}{\partial x^2} \right).$$

Для запоминания удобно представление ротора в виде формального определителя (как “векторного произведения” оператора $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$ на вектор $a(x)$):

$$(\operatorname{rot} a)(x) = (\nabla \times a)(x) \equiv \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ a^1(x) & a^2(x) & a^3(x) \end{vmatrix},$$

где $\{e_1, e_2, e_3\}$ — стандартный базис в \mathbb{R}^3 .

2. Если непрерывно дифференцируемое векторное поле a потенциально в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то $\operatorname{rot} a = 0$.

¶ Пусть $a = \nabla u$. Тогда, например,

$$\frac{\partial a^3}{\partial x^2}(x) - \frac{\partial a^2}{\partial x^3}(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^3 \partial x^2} = 0. \quad \square$$

Обратное утверждение, вообще, неверно. Однако, оно справедливо, когда Ω — параллелепипед.

3. Если a — непрерывно дифференцируемое векторное поле в $\Pi = [\alpha^1, \beta^1] \times [\alpha^2, \beta^2] \times [\alpha^3, \beta^3]$, причём $\operatorname{rot} a = 0$ в Π , то в Π поле a потенциально.

¶ Положим для $(x^1, x^2, x^3) \in \Pi$

$$u(x^1, x^2, x^3) = \int_{\alpha^1}^{x^1} a^1(\xi, \alpha^2, \alpha^3) d\xi + \int_{\alpha^2}^{x^2} a^2(x^1, \eta, \alpha^3) d\eta + \int_{\alpha^3}^{x^3} a^3(x^1, x^2, \zeta) d\zeta.$$

Тогда с учётом 134.1 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x^1}(x) &= a^1(x^1, \alpha^2, \alpha^3) + \int_{\alpha^2}^{x^2} \frac{\partial a^2}{\partial x^1}(x^1, \eta, \alpha^3) d\eta + \int_{\alpha^3}^{x^3} \frac{\partial a^3}{\partial x^1}(x^1, x^2, \zeta) d\zeta \\ &= a^1(x^1, \alpha^2, \alpha^3) + \int_{\alpha^2}^{x^2} \frac{\partial a^1}{\partial x^2}(x^1, \eta, \alpha^3) d\eta + \int_{\alpha^3}^{x^3} \frac{\partial a^1}{\partial x^3}(x^1, x^2, \zeta) d\zeta \end{aligned}$$

(мы воспользовались условием $\operatorname{rot} a = 0$). Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x^1}(x) &= a^1(x^1, \alpha^2, \alpha^3) + a^1(x^1, x^2, \alpha^3) - a^1(x^1, \alpha^2, \alpha^3) + a^1(x^1, x^2, x^3) - a^1(x^1, x^2, \alpha^3) \\ &= a^1(x). \end{aligned}$$

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial x^2}(x) = a^2(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x^3}(x) = a^3(x)$. \square

4. З а м е ч а н и е. Утверждение п. 3 остаётся справедливым для довольно широкого класса областей, так называемых односвязных. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ называется односвязной, если (грубо говоря) каждый замкнутый контур, лежащий в Ω , можно непрерывно стянуть в точку так, что при стягивании контур остаётся в Ω . Мы не даём точного определения односвязной области, ограничившись сказанным и двумя примерами: (а) область, заключённая между двумя концентрическими сферами, односвязна, (б) область $\mathbb{R}^3 \setminus (\text{ось } OZ)$ не односвязна.

§183. Ориентация плоской области

1. Введём понятие ориентации плоской области, границей которой является конечная система замкнутых контуров. Зафиксируем в \mathbb{R}^2 прямоугольную систему координат и направление обхода единичной окружности с центром в O , при котором проходимся кратчайший путь от положительного направления оси OX к положительному направлению оси OY . Если при таком обходе точки внутренности круга остаются слева (соответственно справа), будем говорить что на плоскости задана положительная (соответственно отрицательная) ориентация (см. Рис. 23). В соответствии с этим область, границей которой является конечная система замкнутых контуров, называется положительно ориентированной, если ориентация контуров согласована с ориентацией плоскости, то есть при положительной (соответственно отрицательной) ориентации при движении вдоль контуров точки области остаются слева (соответственно справа). Аналогично область отрицательно ориентирована, если при положительной (соответственно отрицательной) ориентации при движении вдоль контуров точки области остаются справа (соответственно слева).

2. Приведённое определение ориентации числовой плоскости может показаться искусственным. Кроме того, не совсем ясно, как его обобщить на пространства высших размерностей. Приведём общее определение ориентации пространства \mathbb{R}^n , частным случаем которого является рассмотренный плоский случай.

Задать ориентацию в пространстве \mathbb{R}^n — это, по определению, указать в этом пространстве упорядоченный ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Если в \mathbb{R}^n задан ещё один такой базис $\{f_1, \dots, f_n\}$, то определена матрица $[a_i^j]$ перехода от 1-го базиса ко 2-му ($f_i = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$, $1 \leq j \leq n$). При этом $\det[a_i^j] = \pm 1$. Две ориентации, задаваемые базисами $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$, называются эквивалентными (или ещё говорят, что эти базисы задают в \mathbb{R}^n одинаковую ориентацию), если $\det[a_i^j] = 1$. Если $\det[a_i^j] = -1$, то соответствующие ориентации называются различными. Таким образом, в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n имеется всего две ориентации (или 2 класса ориентаций).

§184. Формула Грина

1. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ назовём правильной, если это область одного из следующих четырёх типов: (1) область вида, изображённого на Рис. 24, где $\varphi(x)$ — строго возрастающая непрерывная кусочно-гладкая функция; (2)–(4) получаются из (1)

поворотами соответственно на углы $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$.

2. [Формула Грина]. Пусть Ω — плоская ограниченная область с непрерывной кусочно-гладкой положительно ориентированной границей γ , и $\Omega^- = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ ($\Omega_i \cap \Omega_j \cong \emptyset$ ($i \neq j$)), где Ω_i правильны. Пусть $a(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ ($(x, y) \in \Omega^-$) — непрерывно дифференцируемое векторное поле. Тогда

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} u(x, y) dx + v(x, y) dy$$

(справа стоит криволинейный интеграл 2-го рода).

¶ Пусть сначала область Ω сама является правильной, то есть является областью одного из типов (1) — (4). Проверка формулы осуществляется непосредственным просчётом. Проверим, например, формулу для области типа (1) (см. Рис. 24). Имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy &= - \int_a^b dx \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy = - \int_a^b [u(x, \varphi(x)) - u(x, \varphi(a))] dx \\ &= \int_a^b [u(x, \varphi(a)) - u(x, \varphi(x))] dx. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\int_{\gamma} u(x, y) dx = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}$. Здесь $\int_{\gamma_2} = 0$, так как касательная к γ_2 ортогональна оси OX . Участки γ_1, γ_3 параметризуем параметром x ($a \leq x \leq b$):

$$\int_{\gamma_1} u(x, y) dx = \int_a^b u(x, \varphi(a)) dx, \quad \int_{\gamma_3} u(x, y) dx = - \int_{-\gamma_3} u(x, y) dx = - \int_a^b u(x, \varphi(x)) dx.$$

Следовательно, $\iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_a^b u(x, \varphi(a)) dx - \int_a^b u(x, \varphi(x)) dx = \int_{\gamma} u(x, y) dx$.

Аналогично $\iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \int_{\gamma} v(x, y) dy$, и формула доказана.

В общем случае, когда Ω разрезается на правильные области, остаётся заметить, что двойной интеграл $\iint_{\Omega} = \sum_i \iint_{\Omega_i}$. Для каждого куска $\iint_{\Omega_i} = \int_{\gamma_i}$, где γ_i — ориентированная граница куска Ω_i . Но соседние куски на общей части их границ индуцируют противоположные ориентации и при сложении криволинейных интегралов в результате останется только интеграл по границе γ области Ω . \square

В качестве следствия отметим формулу для вычисления площади плоской области через криволинейный интеграл.

3. Для области Ω в условиях п. 2 $m(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx$.

¶ Положим в формуле Грина $u(x, y) = -y$, $v(x, y) = x$. □

§185. Гладкие поверхности в \mathbb{R}^3

1. Пусть $\Omega(\subset \mathbb{R}^2)$ — область в пространстве параметров. Гладкой поверхностью в \mathbb{R}^3 называется пара $\{\sigma; r : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}^3\}$, где $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ и

(а) $\sigma = \{r(u, v) : (u, v) \in \Omega^-\} (\subset \mathbb{R}^3)$,

(б) координатные функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ гладкие в Ω^- , причём

$$|J(x(u, v), y(u, v))|^2 + |J(y(u, v), z(u, v))|^2 + |J(z(u, v), x(u, v))|^2 \neq 0 \quad ((u, v) \in \Omega). \quad (1)$$

З а м е ч а н и я. 2. Удобно пользоваться векторной записью, полагая $r(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$, где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные орты осей OX, OY, OZ соответственно. В этом случае условие (б) п. 1 означает, что

$$r'_u \times r'_v \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

где определитель в правой части этого равенства формально раскрывается по первой строке. Вектор $r'_u \times r'_v$ является вектором нормали к данной поверхности, и требования, наложенные на поверхность, означают, что поверхность обладает в каждой точке нормалью. Отметим, что

$$\|r'_u \times r'_v\|^2 = |J(x(u, v), y(u, v))|^2 + |J(y(u, v), z(u, v))|^2 + |J(z(u, v), x(u, v))|^2. \quad (2)$$

3. Если $(u_0, v_0) \in \Omega$, то один из определителей в (1) отличен от нуля. Пусть, например, $J(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \neq 0$. Тогда по теореме о существовании неявной функции существует окрестность $U(u_0, v_0) \subset \Omega$ такая, что уравнения $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ в этой окрестности разрешимы относительно u, v : $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Подставив эти выражения в уравнение $z = z(u, v)$, получим, что некоторый кусок $s \subset \sigma$ описывается уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$. Итак, для любой точки $(u_0, v_0) \in \Omega$ существует некоторая окрестность $U(u_0, v_0) \subset \Omega$ такая, что соответствующий ей кусок s (именно $s = \{r(u, v) : (u, v) \in U(u_0, v_0)\}$) биективно отображается на одну из координатных плоскостей.

4. Гладкие поверхности $\{\sigma; r : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ и $\{\tilde{\sigma}; \tilde{r} : \tilde{\Omega}^- \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ считаются равными, если $\sigma = \tilde{\sigma}$ и параметры u, v , определяющие σ , связаны с параметрами λ, μ , определяющими $\tilde{\sigma}$, допустимым образом, то есть $u = u(\lambda, \mu)$, $v = v(\lambda, \mu)$ $((\lambda, \mu) \in \tilde{\Omega}^-)$, причём (а) это биективное преобразование Ω на $\tilde{\Omega}$, (б) $u(\lambda, \mu)$, $v(\lambda, \mu)$ непрерывно дифференцируемы и $|J(u, v)| \neq 0$.

5. П р и м е р. Единичная сфера S в \mathbb{R}^3 определяется координатными функциями

$$x = \cos \varphi \cdot \cos \psi, \quad y = \sin \varphi \cdot \cos \psi, \quad z = \sin \psi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2),$$

$\Omega = \{(\varphi, \psi) : 0 < \varphi < 2\pi, -\pi/2 < \psi < \pi/2\}$. Это — гладкая поверхность (!!).

§186. Поверхностный интеграл 1-го рода

1. В §125 была получена формула для площади гладкой поверхности в прямоугольных координатах. Аналогичная формула может быть выписана в случае общего задания поверхности. Именно, в обозначениях 185.1–2 площадь S гладкой поверхности $\{\sigma; r : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ равна

$$S = \iint_{\Omega} \|r'_u \times r'_v\| dudv. \quad (1)$$

¶ В силу 185.3 наша поверхность локально может быть параметризована прямоугольными координатами. Поэтому достаточно доказать (1) для куска, допускающего такую параметризацию. Пусть для определённости поверхность параметризована координатами x, y . Имеем (см. §125) $S = \iint_{\Omega'} [1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2]^{1/2} dxdy$, где функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ ($(u, v) \in \Omega$) задают допустимое преобразование параметров $(u, v) \in \Omega \rightarrow (x, y) \in \Omega'$. Пользуясь формулой замены переменных в кратном интеграле, имеем

$$S = \iint_{\Omega} [1 + (\frac{\partial z}{\partial x}(u, v))^2 + (\frac{\partial z}{\partial y}(u, v))^2]^{1/2} |J(u, v)| dudv. \quad (2)$$

Производные $\frac{\partial z}{\partial x}(u, v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(u, v)$ находятся из системы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{J(u, v)} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{J(z(u, v), y(u, v))}{J(u, v)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{J(x(u, v), z(u, v))}{J(u, v)}$. Подставляя эти выражения в (2) с учётом (2) §185, получаем (1). □

2. Пусть $\{\sigma; r : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ — гладкая поверхность и $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда интеграл

$$\int_{\sigma} f \equiv \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|r'_u \times r'_v\| dudv \quad (3)$$

называется *поверхностным интегралом 1-го рода* от функции f по поверхности σ .

З а м е ч а н и я. 3. Данное определение корректно: величина (3) не зависит от выбора допустимой параметризации поверхности (используйте для этого обычную процедуру замены переменных в кратном интеграле (!!)).

4. Если поверхность σ задана в прямоугольной системе координат уравнением $z = z(x, y)$ ($(x, y) \in \Omega^-$), то $\int_{\sigma} f = \iint_{\Omega} f(x, y, z(x, y)) [1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2]^{1/2} dxdy$.

§187. Поток вектора через ориентированную поверхность

1. Пусть $\{\sigma; r : \Omega^- \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ — гладкая поверхность. Используя векторную запись, положим $r(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$. Как уже отмечалось (185.2), гладкая поверхность обладает в каждой точке нормалью $r'_u \times r'_v$. Нормируя этот вектор, получим орт нормали $n(u, v) = \frac{r'_u \times r'_v}{\|r'_u \times r'_v\|}$. Отметим, что на самом деле можно говорить о двух нормалях $\pm n(u, v)$, которым соответствуют две “стороны” поверхности. Можно, однако, всегда считать, что впереди стоит знак $+$, так как (если это необходимо) можно поменять местами параметры u, v .

Гладкая поверхность $\{\sigma; r\}$ называется *ориентированной*, если на σ задана непрерывная функция нормали $n(\cdot) : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$. Будем писать σ^* (вместо σ), если поверхность ориентирована.

2. Пусть $G(\subset \mathbb{R}^3)$ — область, в которой задано непрерывное векторное поле

$$a(x, y, z) = \alpha(x, y, z)\mathbf{i} + \beta(x, y, z)\mathbf{j} + \gamma(x, y, z)\mathbf{k} \quad ((x, y, z) \in G),$$

и в G лежит гладкая ориентированная поверхность $\{\sigma^*; r\}$, где $r(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$, а $n(u, v)$ — соответствующая функция нормали. Потоком векторного поля a через поверхность σ^* называется поверхностный интеграл (1-го рода)

$$\int_{\sigma} \langle a, n \rangle = \iint_{\Omega} [\alpha(x, y, z)J(y, z) + \beta(x, y, z)J(z, x) + \gamma(x, y, z)J(x, y)] dudv$$

(здесь x, y, z — функции u, v). Физическая интерпретация: если в G имеет место стационарное течение жидкости, $a(x, y, z)$ — её скорость в точке (x, y, z) , то поток скорости через поверхность σ^* — количество жидкости, проходящее через поверхность σ за единицу времени в направлении ориентации σ .

§188. Поверхностный интеграл 2-го рода

1. Как отмечалось выше (183.2), в пространстве \mathbb{R}^3 имеются две ориентации. Назовём ориентацию, определяемую упорядоченным базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ положительной (терминология условная), а ориентацию, определяемую базисом $\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}$ — отрицательной. При положительной ориентации кратчайший поворот от оси OX к оси OY совершается по часовой стрелке, если смотреть вдоль положительного направления оси OZ (Рис. 25). Если теперь задана ориентированная поверхность σ^* , то можно говорить об ориентации контуров, ограничивающих эту поверхность или какую-либо её часть. Действительно, если n_0 — нормаль к части σ , вырезаемой шаром малого радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0, z_0) , то контур γ , ограничивающий этот кусок, должен пробегаться по часовой стрелке (если смотреть вдоль нормали n_0) (Рис. 26).

2. Рассмотрим теперь задачу вычисления потока вектора через ориентированную поверхность в декартовых координатах. Пусть поверхность σ биективно проектируется на каждую из трех координатных плоскостей, то есть она описывается любым из трёх уравнений:

$$\begin{aligned}x &= f(y, z), (y, z) \in \sigma_x, \sigma_x \text{ — проекция } \sigma \text{ на плоскость } x = 0; \\y &= g(z, x), (z, x) \in \sigma_y, \sigma_y \text{ — проекция } \sigma \text{ на плоскость } y = 0; \\z &= h(x, y), (x, y) \in \sigma_z, \sigma_z \text{ — проекция } \sigma \text{ на плоскость } z = 0.\end{aligned}$$

Пусть σ^* — та же поверхность с ориентацией, а $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*$ — ориентированные проекции σ^* на соответствующие плоскости (обход контура на σ^* определяет обходы на её проекциях $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и тем самым задаёт на них ориентации).

Пусть a — векторное поле вида $a(x, y, z) = \gamma(x, y, z)\mathbf{k}$. Параметризовав σ параметрами x и y , имеем

$$\int_{\sigma} \langle a, n \rangle = \varepsilon \iint_{\sigma_z} \gamma(x, y, h(x, y)) dx dy, \quad (*)$$

где $\varepsilon = +1$, если ориентация σ_z^* согласована с положительной ориентацией плоскости XOY (см. 183.1) и $\varepsilon = -1$ — в противном случае. Интеграл в правой части (*) называется поверхностным интегралом 2-го рода от векторного поля $a = \gamma\mathbf{k}$ по ориентированной поверхности σ^* и обозначается символом $\int_{\sigma^*} \gamma(x, y, z) dx dy$. По-

добным образом определяются интегралы $\int_{\sigma^*} \alpha(x, y, z) dy dz, \int_{\sigma^*} \beta(x, y, z) dz dx$. Таким образом, для общего векторного поля получаем выражение потока через общий поверхностный интеграл 2-го рода:

$$\int_{\sigma} \langle a, n \rangle = \int_{\sigma^*} \alpha(x, y, z) dy dz + \beta(x, y, z) dz dx + \gamma(x, y, z) dx dy.$$

§189. Формула Гаусса-Остроградского

1. Пусть в области $G(\subset \mathbb{R}^3)$, ограниченной непрерывной кусочно-гладкой поверхностью σ , задано векторное поле $a(x, y, z) = \alpha(x, y, z)\mathbf{i} + \beta(x, y, z)\mathbf{j} + \gamma(x, y, z)\mathbf{k}$ такое, что функции α, β, γ вместе с частными производными $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial \gamma}{\partial z}$ обладают непрерывным продолжением на G^- . Дивергенцией векторного поля a называется функция $\operatorname{div} a : G^- \rightarrow \mathbb{R}$, заданная формулой

$$(\operatorname{div} a)(x, y, z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x, y, z).$$

2. Введём полезное в техническом отношении понятие. Назовём областью типа (z) область G (см. Рис. 27), ограниченную поверхностями

$$\sigma_1 : z = f_1(x, y), (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \sigma_2 : z = f_2(x, y), (x, y) \in \Omega,$$

σ_3 — боковая поверхность цилиндра с основанием Ω и образующими, параллельными оси OZ . Аналогично определяются области типа (x) и (y) .

3. Пусть $a(x, y, z)$ — векторное поле в области G , удовлетворяющее предположениям п. 1, σ^* — поверхность, ограничивающая область G и ориентированная внешней (к области G) нормалью n . Допустим, что существует представление $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$, где G_k — области типов (x) , (y) , (z) одновременно, и $G_i \cap G_j \cong \emptyset$ ($i \neq j$). Тогда

$$\iiint_G (\operatorname{div} a) dx dy dz = \int_{\sigma} \langle a, n \rangle.$$

¶ Пусть поле a таково, что $\alpha(x, y, z) = \beta(x, y, z) = 0$ ($(x, y, z) \in G$) и G является областью типа (z) , описанной в п. 2. Имеем тогда

$$\begin{aligned} \iiint_G (\operatorname{div} a) dx dy dz &= \iiint_G \frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{f_2(x, y)}^{f_1(x, y)} \frac{\partial \gamma}{\partial z} dz \\ &= \iint_{\Omega} [\gamma(x, y, f_1(x, y)) - \gamma(x, y, f_2(x, y))] dx dy \\ &= \int_{\sigma_1^*} \gamma(x, y, z) dx dy + \int_{\sigma_2^*} \gamma(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

$\int_{\sigma_3^*} \gamma(x, y, z) dx dy = 0$, так как для куска поверхности σ_3^* орт нормали n ортогонален

вектору k . Прибавляя этот интеграл к правой части полученного равенства, имеем

$$\iiint_G (\operatorname{div} a) dx dy dz = \int_{\sigma^*} \gamma(x, y, z) dx dy, \text{ и утверждение доказано.}$$

Пусть теперь G является областью типов (x) , (y) и (z) одновременно, и векторное поле a удовлетворяет условиям п. 1. Тогда для общего векторного поля с учётом доказанного выше

$$\begin{aligned} \iiint_G (\operatorname{div} a) dx dy dz &= \iiint_G \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx dy dz + \iiint_G \frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy dz + \iiint_G \frac{\partial \gamma}{\partial z} dx dy dz \\ &= \int_{\sigma^*} \alpha(x, y, z) dy dz + \int_{\sigma^*} \beta(x, y, z) dz dx + \int_{\sigma^*} \gamma(x, y, z) dx dy \\ &= \int_{\sigma^*} \alpha dy dz + \beta dz dx + \gamma dx dy. \end{aligned}$$

Наконец, в самом общем случае рассмотрим представление $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ в услови-

ях теоремы. По доказанному $\iiint_{G_k} (\operatorname{div} a) dx dy dz = \int_{\sigma_k} \langle a, n \rangle$, где σ_k — поверхности,

ограничивающие G_k и ориентированные внешней нормалью. Тогда

$$\iiint_G (\operatorname{div} a) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \iiint_{G_k} (\operatorname{div} a) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_k} \langle a, n \rangle.$$

При этом каждая из поверхностей σ_k распадается на куски двух типов: (1) куски, являющиеся частью поверхности σ , (2) новые куски, возникшие при разложении G на части G_k . Куски типа (2) встречаются в сумме $\sum_{k=1}^n \int_{\sigma_k} \langle a, n \rangle$ дважды как куски,

ограничивающие смежные области (они снабжены противоположными ориентациями), так что соответствующие поверхностные интегралы взаимно уничтожаются и остаются лишь интегралы по кускам типа (1).

4. С л е д с т в и е. Для области G в условиях п. 3

$$m(G) = \frac{1}{3} \int_{\sigma^*} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

¶ К векторному полю $a(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ применим формулу п. 2. □

Таким образом, получена формула вычисления объема области через поверхностный интеграл.

5. З а м е ч а н и е. Из формулы Гаусса-Остроградского усматривается физический смысл дивергенции. Пусть в G имеет место стационарное течение жидкости, скорость которой в каждой точке $(x, y, z) \in G$ равна $a(x, y, z)$. Пусть σ_ε^* — поверхность шара $B_\varepsilon(x_0, y_0, z_0)$, ориентированная внешней нормалью. Имеем

$$\iiint_{B_\varepsilon} (\operatorname{div} a) dx dy dz = \int_{\sigma_\varepsilon} \langle a, n \rangle.$$

Правая часть — количество жидкости, вытекающее из шара B_ε за единицу времени. По теореме о среднем 122.6: $(\operatorname{div} a)(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{V_\varepsilon} \cdot \int_{\sigma_\varepsilon} \langle a, n \rangle$, где V_ε — объем шара, а $(x_1, y_1, z_1) \in B_\varepsilon(x_0, y_0, z_0)$. Устремляя ε к 0, получим $(\operatorname{div} a)(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V_\varepsilon} \cdot \int_{\sigma_\varepsilon} \langle a, n \rangle$. Итак, $(\operatorname{div} a)(x_0, y_0, z_0)$ — производительность источника в точке (x_0, y_0, z_0) . В частности, если $(\operatorname{div} a)(x_0, y_0, z_0) < 0$, то в точке имеет место сток.

§190. Формула Стокса

1. Приведём сначала формулу замены переменных для интегралов по ориентированным плоским областям. Пусть на плоскости \mathbb{R}^2 точек (u, v) задана ориентированная область Ω^* , ограниченная контуром γ , и задано биективное непрерывно дифференцируемое преобразование $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ области Ω на область Ω' переменных (x, y) , ограниченную контуром γ' , причём

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом преобразовании обход контура γ индуцирует обход γ' и тем самым Ω' также ориентирована (пишем Ω'^*). Если при обходе γ область Ω остаётся, например, слева и $J(u, v) > 0$ (соответственно $J(u, v) < 0$), то при обходе контура γ' точки области Ω' остаются слева (соответственно справа). Если $f(x, y)$ — непрерывная на области Ω' функция, то из сказанного имеем

$$\iint_{\Omega'^*} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega^*} f(x(u, v), y(u, v)) J(u, v) du dv$$

(в этой формуле якобиан берётся уже без знака модуля).

2. [Формула Стокса]. Пусть σ^* — ориентированная гладкая поверхность с непрерывным кусочно-гладким краем γ такая, что $\sigma^* = \bigcup_{k=1}^n \sigma_k^*$ ($\sigma_k \cap \sigma_j \cong \emptyset$, ($k \neq j$)), где σ_k — гладкие куски, биективно проектирующиеся на все три координатные плоскости. Тогда

$$\int_{\sigma} \langle \text{rot } a, n \rangle = \int_{\gamma} \langle a, \varkappa \rangle,$$

где ориентация кривой γ согласована с ориентацией поверхности.

¶ Утверждение достаточно доказать для одного гладкого куска. Далее, так как $\text{rot } a$ — аддитивная функция векторного аргумента, достаточно рассмотреть случай поля $a(x, y, z) = \alpha(x, y, z) \mathbf{i}$ (то есть $\beta = \gamma = 0$). Пусть σ описывается уравнениями

$$z = h(x, y) \quad (x, y) \in \sigma_z, \quad y = g(z, x) \quad (z, x) \in \sigma_y$$

(каждое из указанных уравнений задаёт σ). Тогда

$$\begin{aligned} \text{rot } a &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \mathbf{k}, \\ \int_{\sigma} \langle \text{rot } a, n \rangle &= \iint_{\sigma_y^*} \frac{\partial \alpha}{\partial z}(x, g(z, x), z) dz dx - \iint_{\sigma_z^*} \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y, h(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Делая в 1-м интеграле замену переменных $x \rightarrow x$, $z \rightarrow h(x, y)$, имеем $J(z, x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial h}{\partial y}$ и (с учётом п. 1)

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \langle \text{rot } a, n \rangle &= - \iint_{\sigma_z^*} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial z}(x, y, h(x, y)) \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y, h(x, y)) \right] dx dy \\ &= - \iint_{\sigma_z^*} \frac{d}{dy} \alpha(x, y, h(x, y)) dx dy = \int_{\gamma_z} \alpha(x, y, h(x, y)) dx. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использована формула Грина, и γ_z — контур, являющийся границей области σ_z^* , обход которого согласован с ориентацией σ_z^* . Если γ параметризована длиной дуги s (в направлении возрастания s), то мы имеем пару

$\{\gamma; p : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3\}$, где $p(s) = \{\varphi(s), \psi(s), \chi(s)\}$ ($0 \leq s \leq \ell$) и $\chi(s) = h(\varphi(s), \psi(s))$. Тогда контур γ_z также параметризуется параметром s с помощью отображения $p_z(s) = (\varphi(s), \psi(s), 0)$ ($0 \leq s \leq \ell$) (это уже не длина дуги для γ_z !), причём ориентации γ_z и γ согласованы, так что

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_z} \alpha(x, y, h(x, y)) dx &= \int_0^\ell \alpha(\varphi(s), \psi(s), h(\varphi(s), \psi(s))) \varphi'(s) ds \\ &= \int_0^\ell \alpha(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)) \varphi'(s) ds = \int_\gamma \langle a, \varkappa \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

3. З а м е ч а н и е. Формула Стокса верна и для случая, когда σ^* — кусок, лежащий в одной из координатных плоскостей (более общо, в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей). Если, например, σ лежит в плоскости $z = 0$, то

$$\begin{aligned} \int_\sigma \langle \text{rot } a, n \rangle &= \int_\sigma \left\langle \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \mathbf{k} \right\rangle = \iint_\Omega \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx dy = \int_\gamma \alpha dx + \beta dy \\ &= \int_\gamma \langle a, \varkappa \rangle \end{aligned}$$

(последнее равенство верно, так как вектор \varkappa ортогонален \mathbf{k}).

МЕРА ЛЕБЕГА

В этом разделе курса мы возвращаемся к проблеме мероопределения, начатой в разделе “Мера Жордана”. В §113 было доказано, что площадь прямоугольника в \mathbb{R}^2 обладает свойством счётной аддитивности (свойством существенно более глубоким, чем обычная аддитивность). Это свойство легло в основу по существу принципиально новой теории мероопределения и связанной с ней теории интегрирования, основы которой изложены в монографии французского математика А. Лебега “Лекции по интегрированию и отысканию примитивных функций” (1904). Дальнейшие многочисленные и плодотворные применения концепции А. Лебега (в частности, в аксиоматизации теории вероятностей А. Н. Колмогоровым в 1933 г.) стимулировали развитие абстрактной концепции меры и интеграла (не связанной с топологической структурой пространств, являющихся областью задания меры). Именно такой подход и принят за основу в данном разделе курса.

В этом разделе знаки \sum и $+$ в контексте операций над множествами означают, что берётся объединение попарно непересекающихся множеств; для краткости мы пишем часто XY вместо $X \cap Y$.

§191. Полукольца множеств

1. Пусть \mathfrak{S} — класс всех прямоугольников в \mathbb{R}^2 со сторонами, параллельными координатным осям, то есть множеств вида $X = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, где через $\langle a, b \rangle$ обозначается один из промежутков вида (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Этот класс обладает свойствами (см. §111):

(П₁) если $X, Y \in \mathfrak{S}$, то $X \cap Y \in \mathfrak{S}$,

(П₂) если $X \subset Y$ ($X, Y \in \mathfrak{S}$), то существует конечное семейство $\{X_i\} \subset \mathfrak{S}$ такое, что $Y = X + \sum_i X_i$.

Эти свойства берутся в качестве системы аксиом абстрактных прямоугольников.

2. Непустое семейство \mathfrak{S} частей множества E называется *полукольцом* в E , если выполняются требования (П₁) и (П₂); полукольцо \mathfrak{S} называется *полукольцом с 1*, если $E \in \mathfrak{S}$.

П р и м е р ы. 3. Система всех промежутков в \mathbb{R} вида $[a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) — полукольцо в \mathbb{R} .

4. Система всех промежутков вида $\langle a, b \rangle$ — полукольцо в \mathbb{R} .

5. Если к системе всех прямоугольников в \mathbb{R}^2 (п. 1) добавить несобственные прямоугольники (типа полуплоскости, квадранта, всей плоскости), получим полукольцо с 1 в \mathbb{R}^2 .

6. Система всех подмножеств множества E — полукольцо с 1 в E .

Перейдем теперь к свойствам полуколец множеств.

7. Пусть $X \in \mathfrak{S}$ и множества $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{S}$ попарно не пересекаются, причём $X_k \subset X$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда существует конечное семейство $\{Y_j\} \subset \mathfrak{S}$ такое, что $X = \sum_{k=1}^n X_k + \sum_j Y_j$.

¶ При $n = 1$ — это свойство (Π_2) . Далее рассуждения дословно совпадают с доказательством по индукции леммы 111.5 (!). □

8. Если $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{S}$, то существует конечное семейство попарно непересекающихся множеств $Y_1, \dots, Y_m \in \mathfrak{S}$ такое, что $X_i = \sum_{j \in \sigma_i} Y_j$ ($i = 1, \dots, n$),

$\sigma_i \subset \{1, \dots, m\}$.

¶ Утверждение очевидно для $n = 1$. Пусть оно верно для всех натуральных чисел $\leq n-1$ и пусть Y_1, \dots, Y_m — семейство из \mathfrak{S} , соответствующее X_1, \dots, X_{n-1} . Положим $Z_q = X_n Y_q$ ($q = 1, \dots, m$). Множества Z_q попарно не пересекаются, $Z_q \in \mathfrak{S}$, $Z_q \subset X_n$. Поэтому согласно п. 7 имеет место представление

$$X_n = \sum_{q=1}^m Z_q + \sum Z'_r, \quad (*)$$

где $\{Z'_r\}$ — некоторое конечное семейство из \mathfrak{S} . В силу (Π_2) для каждого q существует такое конечное семейство $\{Z_i^{(q)}\}$ из \mathfrak{S} , что $Y_q = Z_q + \sum_i Z_i^{(q)}$. Множества

семейства $\{Z_q, Z'_r, Z_i^{(q)}\}$ попарно не пересекаются, и $X_k = \sum_{j \in \sigma_k} Y_j = \sum_{j \in \sigma_k} [Z_j + \sum_i Z_i^{(j)}]$

(!!). Сопоставляя это с (*), видим, что семейство $\{Z_q, Z'_r, Z_i^{(q)}\}$ является искомым для $\{X_1, \dots, X_{n-1}, X_n\}$. □

9. У п р а ж н е н и я. Пусть Ω — множество всех последовательностей $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, где $\omega_i = 0$ или 1. Пусть

$$X_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_s} = \{\omega \in \Omega : \omega_{i_1} = \dots = \omega_{i_k} = 0, \omega_{j_1} = \dots = \omega_{j_s} = 1\}.$$

При $s = k = 0$ считаем, что $X = \Omega$. Покажите, что семейство $\mathfrak{Z} = \{X_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_s}\}$ — полукольцо с 1 в Ω .

10. Покажите, что для топологического пространства (E, \mathcal{T}) семейство $\{U \cap X : U, X^c \in \mathcal{T}\}$ — полукольцо с 1 в E .

§192. Мера на полукольце

1. Пусть \mathfrak{S} — полукольцо в E . Функция $m : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *конечно-аддитивной мерой*, если

$$X = \sum_{k=1}^n X_k \ (X, X_k \in \mathfrak{S}) \Rightarrow mX = \sum_{k=1}^n mX_k.$$

2. Для полукольца прямоугольников в \mathbb{R}^2 площадь, определённая формулой $m(\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle) = (b-a)(d-c)$, является конечно-аддитивной мерой (§112).

Перейдём к изучению свойств конечно-аддитивной меры.

3. Если $X_1, X_2, \dots (X_k \in \mathfrak{S})$ попарно не пересекаются и $X_k \subset X \in \mathfrak{S}$, то $\sum_{k=1}^{\infty} mX_k \leq mX$.

¶ Достаточно убедиться, что требуемому неравенству удовлетворяет любая частная сумма ряда $\sum_k mX_k$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ произвольно. В силу 191.7 $X = \sum_{k=1}^n X_k + \sum_{j=1}^s Y_j$ при

некоторых $Y_j \in \mathfrak{S}$. Следовательно, $\sum_{k=1}^n mX_k \leq \sum_{k=1}^n mX_k + \sum_{j=1}^s mY_j = mX$. □

4. Если $X \subset \bigcup_{k=1}^n X_k$ ($X, X_k \in \mathfrak{S}$), то $mX \leq \sum_{k=1}^n mX_k$.

¶ Пусть $\{Y_j\}$ — конечная система из \mathfrak{S} , удовлетворяющая требованиям 191.8 для семейства X, X_1, \dots, X_n , так что

$$X = \sum_{j \in \sigma_0} Y_j, \quad X_k = \sum_{j \in \sigma_k} Y_j \quad (k = 1, \dots, n).$$

Каждый индекс $j \in \sigma_0$ входит не менее одного раза в двойную сумму $\sum_{k=1}^n \sum_{j \in \sigma_k} mY_j$ ($= \sum_{k=1}^n mX_k$), так что $mX = \sum_{j \in \sigma_0} mY_j \leq \sum_{k=1}^n mX_k$. \square

5. Утверждение п. 4 не обобщается на счётные покрытия множества X . Рассмотрим полукольцо промежутков вида $\langle a, b \rangle$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) в \mathbb{Q} с конечно-аддитивной мерой $m\langle a, b \rangle = b - a$. Семейство $\{[r, r]\}_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ образует счётное покрытие множества \mathbb{Q} . Однако, $m[0, 1] = 1 > 0 = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} m[r, r]$.

Однако для случаев, важных в приложениях, обобщение п. 4 на случай счётных покрытий справедливо (§113 п. 2):

6. Пусть m — площадь на полукольце \mathfrak{S} прямоугольников в \mathbb{R}^2 . Если $X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ ($X, X_k \in \mathfrak{S}$), то $mX \leq \sum_{k=1}^{\infty} mX_k$.

Из пп. 3 и 6 следует, что площадь в \mathbb{R}^2 обладает свойством более сильным, чем конечная аддитивность:

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \quad (X, X_k \in \mathfrak{S}) \Rightarrow mX = \sum_{k=1}^{\infty} mX_k. \quad (*)$$

Это важное свойство называется σ -аддитивностью и оно берётся в качестве определения для абстрактных полуколец:

7. Пусть \mathfrak{S} — полукольцо. Функция $m : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *мерой*, если она обладает свойством (*).

У п р а ж н е н и я. 8. Пусть $p_n \geq 0$, причём $\sum p_n < +\infty$. Функция m , заданная на полукольце всех подмножеств \mathbb{N} равенством $mX = \sum_{n \in X} p_n$ ($X \subset \mathbb{N}$), является мерой.

9. Функция $m : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (191.9), заданная равенствами $m\emptyset = 0$, $m\Omega = 1$, $mX_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_s} = 2^{-(s+k)}$ (если $X_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_s} \neq \emptyset$), является мерой.

§193. Кольца и алгебры множеств

Для числовой плоскости первый шаг в решении задачи продолжения меры состоит в продолжении меры на класс конечных объединений прямоугольников (112.3). Поэтому изучим сначала класс множеств, допускающих представление в виде объединения конечного числа абстрактных прямоугольников.

1. Пусть \mathfrak{S} — полукольцо в E . Класс \mathfrak{E} всех частей E , являющихся объединением конечных семейств попарно непересекающихся множеств из \mathfrak{S} , обладает свойствами (см. п. 9):

$$(K_1) \quad X, Y \in \mathfrak{E} \Rightarrow X \cup Y \in \mathfrak{E};$$

$$(K_2) \quad X, Y \in \mathfrak{E} \Rightarrow X \setminus Y \in \mathfrak{E}.$$

Этот класс также удобно аксиоматизировать:

2. Непустая система \mathfrak{E} частей множества E называется *кольцом множеств* в E , если выполнены свойства (K_1) и (K_2) . В частности, кольцо с 1 в E называется *алгеброй множеств*.

3. В кольце \mathfrak{E} :

$$(i) \quad \emptyset \in \mathfrak{E}, \quad (ii) \quad X, Y \in \mathfrak{E} \Rightarrow X \cap Y \in \mathfrak{E}, \quad X \Delta Y \in \mathfrak{E}.$$

4. Всякое кольцо является полукольцом.

В дальнейшем нам понадобятся кольца с усиленными структурными свойствами:

5. Кольцо (соответственно алгебра) \mathfrak{E} в E называется σ -*кольцом* (соответственно σ -*алгеброй*), если $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathfrak{E}$ для любых $X_n \in \mathfrak{E}$ ($n = 1, 2, \dots$).

6. Семейство \mathfrak{A} частей множества E является *алгеброй* (соответственно σ -*алгеброй*) в E тогда

$$(i) \quad X \in \mathfrak{A} \Rightarrow X^c \in \mathfrak{A},$$

(ii) объединение всякого конечного (соответственно счётного) семейства подмножеств из \mathfrak{A} принадлежит \mathfrak{A} .

7. Пусть $\{\mathfrak{E}_i\}_{i \in I}$ — семейство колец в E . Тогда семейство \mathfrak{E} множеств, принадлежащих всем \mathfrak{E}_i , — также кольцо в E .

¶ Семейство \mathfrak{E} не пусто, так как $\emptyset \in \mathfrak{E}$ (см. п. 3(i)). Если $X, Y \in \mathfrak{E}_i$ при любом $i \in I$, то $X \cup Y, X \setminus Y \in \mathfrak{E}_i$, так как \mathfrak{E}_i — кольца. Поэтому $X \cup Y, X \setminus Y \in \mathfrak{E}$, так что (K_1) и (K_2) выполнены. \square

8. Пусть \mathfrak{J} — непустое семейство частей множества E . Тогда существует кольцо $\mathfrak{E}(\mathfrak{J})$ в E , содержащееся в любом другом кольце, содержащем \mathfrak{J} .

¶ Семейство $\{\mathfrak{E}_i\}_{i \in I}$ всех колец в E , объемлющих \mathfrak{J} , не пусто, так как туда во всяком случае входит кольцо всех подмножеств множества E . Тогда $\mathfrak{E}(\mathfrak{J}) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{E}_i$ — искомое кольцо. \square

Кольцо $\mathfrak{E}(\mathfrak{J})$ — наименьшее кольцо, содержащее \mathfrak{J} , и называется *кольцом, порождённым семейством \mathfrak{J}* . В общем случае структура $\mathfrak{E}(\mathfrak{J})$ сложна. Однако, она обозрима, если \mathfrak{J} — полукольцо:

9. Если \mathfrak{J} — полукольцо, то $\mathfrak{E}(\mathfrak{J})$ состоит из множеств, допускающих представление $X = \sum_{k=1}^n X_k$ ($X_k \in \mathfrak{J}$).

¶ Обозначим через \mathfrak{E}_1 класс всех множеств X , допускающих представление $X = \sum_{k=1}^n X_k$ ($X_k \in \mathfrak{J}$). $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}(\mathfrak{J})$ в силу (K_1) . Чтобы получить обратное включение,

покажем, что \mathfrak{E}_1 является кольцом: если $X = \sum_{k=1}^n X_k$, $Y = \sum_{s=1}^m Y_s$ ($X_k, Y_s \in \mathfrak{I}$), то в силу 191.8 существует семейство $\{Z_t\}_{t=1, \dots, N} \subset \mathfrak{I}$, $Z_t \cap Z_p = \emptyset$ ($t \neq p$), что $X_k = \sum_{t \in \sigma_k} Z_t$ ($k = \overline{1, n}$), $Y_s = \sum_{t \in \sigma'_s} Z_t$ ($s = \overline{1, m}$), где $\sigma_k, \sigma'_s \subset \{1, \dots, N\}$. Поэтому

$$X \cup Y = \sum_{t=1}^n Z_t, \quad X \setminus Y = \sum_{t \in (\bigcup_k \sigma_k) \setminus (\bigcup_s \sigma'_s)} Z_t,$$

откуда $X \cup Y \in \mathfrak{E}_1$, $X \setminus Y \in \mathfrak{E}_1$, так что (K_1) и (K_2) удовлетворяются. Итак, \mathfrak{E}_1 — кольцо, $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{E}_1$. Из п. 8 заключаем, что $\mathfrak{E}(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{E}_1$. \square

10. У п р а ж н е н и е. Сформулировать и доказать утверждения пп. 7–9 для алгебр множеств.

11. Утверждения пп. 7–8 обобщаются на σ -алгебры множеств. В частности, если \mathfrak{I} — непустое семейство частей E , то существует наименьшая σ -алгебра \mathfrak{A} , содержащая \mathfrak{I} ; она называется σ -алгеброй, порождённой \mathfrak{I} . В приложениях важное значение имеют σ -алгебры, порождённые топологиями. Если (E, \mathcal{T}) — топологическое пространство, то σ -алгебра, порождённая семейством \mathcal{T} всех открытых множеств, называется *борелевской алгеброй* в E и обозначается $\mathfrak{B}(E)$. В частности, через $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначаются соответственно борелевские алгебры на числовой прямой и в евклидовом пространстве.

12. У п р а ж н е н и е. Покажите, что σ -алгебра в \mathbb{R} , порождённая семейством всех промежутков вида $[a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$), совпадает с $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (воспользуйтесь 98.7).

§194. Продолжение меры с полукольца на кольцо

1. Пусть \mathfrak{S} и \mathfrak{S}' — полукольца в E . Мера (конечно-аддитивная мера) $m' : \mathfrak{S}' \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется продолжением меры (соответственно конечно-аддитивной меры) $m : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$, если $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}'$ и $mX = m'X$ ($X \in \mathfrak{S}$).

2. Всякая мера (конечно-аддитивная мера) на полукольце \mathfrak{S} допускает единственное продолжение до меры (соответственно конечно-аддитивной меры) на кольцо $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$.

¶ Пусть $m : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — мера (конечно-аддитивная мера). Каждое множество $X \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})$ представимо в виде

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (Y_i \in \mathfrak{S}). \quad (1)$$

Положим $m'X = \sum_{i=1}^n mY_i$. Покажем, что функция m' определена однозначно. Пусть

$X = \sum_{k=1}^s Z_k$ ($Z_k \in \mathfrak{S}$) — ещё одно представление X . В силу (Π_1) $Y_i Z_k \in \mathfrak{S}$, причём $Y_i = \sum_k Y_i Z_k$, $Z_k = \sum_i Y_i Z_k$. Из аддитивности m на \mathfrak{S} имеем:

$$\sum_i mY_i = \sum_i \sum_k mY_i Z_k = \sum_k \sum_i mY_i Z_k = \sum_k mZ_k.$$

Итак, значение m' на множествах кольца $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$ не зависит от способа представления этих множеств элементами полукольца \mathfrak{S} . При этом m' конечно-аддитивна на

$\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$ (!!)). Если далее, $m'' : \mathfrak{E}(\mathfrak{S}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ — ещё одно продолжение меры (соответственно конечно-аддитивной меры) m , то в обозначениях (1) $m''X = \sum_i m''Y_i = \sum_i mY_i = m'X$. Таким образом, m' — единственное продолжение m на $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$. Наконец, осталось проверить, что m' σ -аддитивна, коль скоро σ -аддитивна m . Пусть $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ ($X, X_n \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})$), и

$$X = \sum_{i=1}^s Y_i, \quad X_n = \sum_{j=1}^{s_n} Y_{nj} \quad (n = 1, 2, \dots, Y_i, Y_{nj} \in \mathfrak{S}).$$

Положим $Y_{inj} = Y_i Y_{nj}$; $\{Y_{inj}\}$ — семейство попарно непересекающихся множеств из \mathfrak{S} , причем $Y_i = \sum_{n,j} Y_{inj}$, $Y_{nj} = \sum_i Y_{inj}$. В силу σ -аддитивности меры m : $mY_i = \sum_{n,j} mY_{inj}$, $mY_{nj} = \sum_i mY_{inj}$ и

$$m'X = \sum_i mY_i = \sum_i \sum_{n,j} mY_{inj} = \sum_{n,j} \sum_i mY_{inj} = \sum_{n,j} mY_{nj} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{s_n} mY_{nj} = \sum_{n=1}^{\infty} m'X_n. \quad \square$$

В качестве приложения полученного результата покажем, что возможность распространить свойство 192.4 на последовательности множеств характеризует меры.

3. Конечно-аддитивная мера $m : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ на полукольце \mathfrak{S} является мерой тогда для всякого $X \in \mathfrak{S}$ и любого его счётного покрытия $\{X_n\}$ ($X_n \in \mathfrak{S}$) верно неравенство

$$mX \leq \sum_{n=1}^{\infty} mX_n. \quad (2)$$

¶ Достаточность следует из 192.3. Для доказательства необходимости ограничимся случаем, когда \mathfrak{S} — кольцо. (Действительно, если \mathfrak{S} — полукольцо, то, продолжив меру m до меры m' на $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$, заметим, что неравенство (2) будет справедливо, если справедливо соответствующее неравенство для m' .) Для данной последовательности X_1, X_2, \dots положим $Y_1 = X_1 X$, $Y_2 = (X X_2) \setminus X_1, \dots, Y_n = (X X_n) \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i), \dots$. Тогда $Y_n \in \mathfrak{S}$, $Y_n \subset X_n$, так что $mY_n \leq mX_n$. При этом множества Y_n попарно не пересекаются и $X = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$. Так как m σ -аддитивна, получаем $mX = \sum_{n=1}^{\infty} mY_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} mX_n$. \square

§195. Внешняя мера

1. Пусть \mathfrak{S} — полукольцо с 1 в E и m — мера на \mathfrak{S} . Для всякого $X \subset E$ определим

$$\mu^* X \equiv \inf_{X \subset \bigcup X_n, X_n \in \mathfrak{S}} \sum mX_n$$

(inf берётся по всем конечным или счётным покрытиям X). Таким образом определённая функция μ^* называется *внешней мерой* (по отношению к мере m). Отметим некоторые свойства внешней меры:

2. $\mu^* X + \mu^* X^c \geq mE \quad (X \subset E),$

$$3. \quad \mu^* X = \inf_{X \subset \sum X_n, X_n \in \mathfrak{G}} \sum m X_n \quad (X \subset E),$$

$$4. \quad \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^* X_i.$$

¶ 2. Пусть $\{X_n\}, \{Y_k\}$ — произвольные счётные покрытия соответственно множеств X, X^c элементами полукольца. В силу 194.3 $mE \leq \sum_n m X_n + \sum_k m Y_k$. Беря в этом неравенстве \inf по всем счётным покрытиям $\{X_n\}$ множества X , получим $mE \leq \mu^* X + \sum_k m Y_k$. Снова беря \inf по всем счётным покрытиям $\{Y_k\}$ множества X^c , получаем требуемое.

3. Утверждается, что при вычислении μ^* можно ограничиться взятием \inf по счётным покрытиям попарно непересекающимися множествами полукольца \mathfrak{G} (!!).

4. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно, и для каждого i пусть $\{X_i^n\}_n$ — счётное покрытие X_i элементами полукольца \mathfrak{G} такое, что $\sum_n m X_i^n < \mu^* X_i + \varepsilon 2^{-i}$. Тогда $X \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \subset \bigcup_{i,n} X_i^n$, причём $\sum_{i,n} m X_i^n = \sum_i \sum_n m X_i^n < \sum_i (\mu^* X_i + \varepsilon 2^{-i}) = \varepsilon + \sum_i \mu^* X_i$. Следовательно, $\mu^* X < \varepsilon + \sum_i \mu^* X_i$. Из произвольности ε следует требуемое. \square

5. У п р а ж н е н и е. Если X_1, X_2, \dots — попарно не пересекаются, $X_n \subset X$, $X_n \in \mathfrak{G}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} m X_n \leq \mu^* X$.

§196. Измеримые множества

1. Пусть m — мера на полукольце с 1 \mathfrak{G} в множестве E и μ^* — соответствующая внешняя мера. Множество $X (\subset E)$ называется *измеримым по Лебегу*, если $\mu^* X + \mu^* X^c = mE$. Класс L всех измеримых по Лебегу множеств зависит от полукольца \mathfrak{G} и меры m : $L = L(\mathfrak{G}, m)$. Наша цель — изучение возможности продолжения меры m на класс L .

2. $\mathfrak{E}(\mathfrak{G}) \subset L(\mathfrak{G}, m)$. При этом $m'X = \mu^* X$ ($X \in \mathfrak{E}(\mathfrak{G})$).

¶ Пусть $X \in \mathfrak{E}(\mathfrak{G})$. Тогда $X = \sum X_n$, где $\{X_n\}$ — конечное семейство из \mathfrak{G} . Следовательно, $\mu^* X \leq \sum m X_n = m'X$. Аналогично, $\mu^* X^c \leq m'X^c$. Отсюда

$$mE \leq \mu^* X + \mu^* X^c \leq m'X + m'X^c = mE,$$

так что $X \in L(\mathfrak{G}, m)$ и, в частности, $\mu^* X = m'X$. \square

Сформулируем основной результат этого параграфа.

3. Т е о р е м а. Класс L измеримых по Лебегу множеств является алгеброй, а функция $\mu \equiv \mu^*|L$ (ограничение μ^* на L) — мера.

Докажем предварительно лемму.

4. Пусть $X \in L$ и $X \subset \sum X_i, X^c \subset \sum X'_j$ ($X_i, X'_j \in \mathfrak{G}$), $\varepsilon > 0$, причём $\sum_{i=1}^{\infty} m X_i < \mu^* X + \varepsilon/2, \sum_{j=1}^{\infty} m X'_j < \mu^* X^c + \varepsilon/2$. Тогда $\sum_{i,j} m X_i X'_j \leq \varepsilon$.

¶ Пусть $s, t \in \mathbb{N}$ — произвольны, $\{Z_k\}$ — конечная система попарно непересекающихся множеств такая, что $E \setminus \left(\left(\sum_{i=1}^s X_i \right) \cup \left(\sum_{j=1}^t X'_j \right) \right) = \sum Z_k, Z_k \in \mathfrak{G}$. Тогда

$\{X_{s+1}, X_{s+2}, \dots, X'_{t+1}, X'_{t+2}, \dots\}$ — покрытие множества $\sum Z_k$ и $\sum mZ_k = m'(\sum Z_k)$
 $\leq \sum_{s+1}^{\infty} mX_i + \sum_{t+1}^{\infty} mX'_j$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t mX_i X'_j = \sum_{i=1}^s mX_i + \sum_{j=1}^t mX'_j + \sum_k mZ_k - mE \leq \sum_{i=1}^{\infty} mX_i + \sum_{j=1}^{\infty} mX'_j - mE < \varepsilon. \quad \square$$

Доказательство теоремы 3 проведём по следующему плану:

5. Покажем, что класс L замкнут относительно операции c).

6. Покажем, что $X, Y \in L$ влечёт $X \cup Y \in L$.

7. Установим, что $\mu = \mu^* \mid L$ — конечно-аддитивна.

Из пп. 5,6 тогда следует, что L — алгебра, а из п. 7, 195.4 и 194.3 вытекает, что μ σ -аддитивна на L , и теорема доказана. Итак, осталось установить пп. 5–7.

Доказательство п. 5:

$$X \in L \Rightarrow \mu^* X^c + \mu^* X^{cc} = \mu^* X^c + \mu^* X = mE \Rightarrow X^c \in L.$$

Доказательство п. 6. Пусть $X, Y \in L$ и $\{X_i\}, \{X'_j\}, \{Y_p\}, \{Y'_q\}$ — покрытия соответственно множеств X, X^c, Y, Y^c элементами \mathfrak{S} такие, что внутри каждого семейства множества попарно не пересекаются и

$$\begin{aligned} \sum mX_i &< \mu^* X + \varepsilon/2, & \sum mX'_j &< \mu^* X^c + \varepsilon/2, \\ \sum mY_p &< \mu^* Y + \varepsilon/2, & \sum mY'_q &< \mu^* Y^c + \varepsilon/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда семейства $\{X_i, X'_j Y_p\}, \{X'_j Y'_q\}$ — покрытия $X \cup Y$ и $(X \cup Y)^c$ соответственно. Следовательно,

$$\mu^*(X \cup Y) + \mu^*((X \cup Y)^c) \leq \sum mX_i + \sum_{j,p} mX'_j Y_p + \sum_{j,q} mX'_j Y'_q. \quad (2)$$

Оценим последние два слагаемых в правой части (2). Пусть p_0, q_0 — фиксированные числа. Тогда

$$mX'_j \geq \sum_{p=1}^{p_0} mX'_j Y_p + \sum_{q=1}^{q_0} mX'_j Y'_q - \sum_{\substack{1 \leq p \leq p_0 \\ 1 \leq q \leq q_0}} mX'_j Y_p Y'_q,$$

откуда $\sum_{p=1}^{p_0} mX'_j Y_p + \sum_{q=1}^{q_0} mX'_j Y'_q \leq mX'_j + \sum_{p,q} mX'_j Y_p Y'_q$. Так как $X'_j Y_p Y'_q \subset Y_p Y'_q$ и $X'_j Y_p Y'_q$ попарно не пересекаются по j , имеем $\sum_j mX'_j Y_p Y'_q \leq mY_p Y'_q$. Из п. 4 отсюда

$$\sum_j \sum_{p,q} mX'_j Y_p Y'_q = \sum_{p,q} \sum_j mX'_j Y_p Y'_q \leq \sum_{p,q} mY_p Y'_q \leq \varepsilon.$$

Теперь из произвольности p_0, q_0 получаем $\sum_{j,p} mX'_j Y_p + \sum_{j,q} mX'_j Y'_q \leq \sum_j mX'_j + \varepsilon$. Таким образом, из (2) следует с учётом (1)

$$\mu^*(X \cup Y) + \mu^*((X \cup Y)^c) < \mu^* X + \mu^* X^c + 2\varepsilon = mE + 2\varepsilon,$$

и из произвольности ε : $\mu^*(X \cup Y) + \mu^*((X \cup Y)^c) = mE$, то есть $X \cup Y \in L$.

Доказательство п. 7. Достаточно установить, что $X, Y \in L$, $X \cap Y = \emptyset$ влечёт $\mu(X + Y) = \mu X + \mu Y$. В силу 195.4 нужно лишь показать, что $\mu(X + Y) \geq \mu X + \mu Y$. Снова рассмотрим систему покрытий, определённую в (1). Тогда

$$\sum_{i,p} X_i Y_p \subset \left(\sum_{j,i} X_i X'_j \right) \cup \left(\sum_{q,p} Y_p Y'_q \right).$$

(Действительно, пусть $\omega \in X_i Y_p$ и, например, $\omega \notin X'_j$. Тогда $\omega \notin Y$ (так как $X \cap Y = \emptyset$), а значит, существует q такое, что $\omega \in Y'_q$, то есть $\omega \in Y_p Y'_q$.) В силу п. 4

$$\sum_{p,i} mX_i Y_p \leq \sum_{i,j} mX_i X'_j + \sum_{p,q} mY_p Y'_q \leq 2\varepsilon.$$

Пусть далее i_0, p_0 фиксированы и $\{Z_s\}$ — конечная система попарно непересекающихся множеств из \mathfrak{S} такая, что

$$\sum_s Z_s = \left(\sum_{i=1}^{i_0} X_i \right) \cup \left(\sum_{p=1}^{p_0} Y_p \right).$$

Пусть $\{U_k\}$ — покрытие множества $X + Y$ попарно непересекающимися множествами из \mathfrak{S} такое, что $\sum_k mU_k < \mu(X + Y) + 3\varepsilon$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_0} mU_k X_i + \sum_{p=1}^{p_0} mU_k Y_p = m \left(U_k \left(\sum_s Z_s \right) \right) + \sum_{i,p} mU_k X_i Y_p.$$

Суммируя по k , имеем

$$\sum_k \sum_{i=1}^{i_0} mU_k X_i + \sum_k \sum_{p=1}^{p_0} mU_k Y_p \leq \sum_k mU_k + \sum_{i,p} m \left[\left(\sum_k U_k \right) X_i Y_p \right] \leq \sum_k mU_k + 2\varepsilon.$$

Из произвольности i_0, p_0 , получаем

$$\sum_{i,k} mU_k X_i + \sum_{k,p} mU_k Y_p < \mu(X + Y) + 3\varepsilon.$$

Поскольку $\{U_k X_i\}_{k,i}$, $\{U_k Y_p\}_{k,p}$ — покрытия соответственно X и Y элементами \mathfrak{S} , получаем $\mu(X + Y) = \mu^* X + \mu^* Y \leq \sum_{i,k} mU_k X_i + \sum_{k,p} mU_k Y_p < \mu(X + Y) + 3\varepsilon$. Остаётся учесть произвольность ε .

8. Мера μ , определённая условиями теоремы 3, называется *мерой Лебега*, построенной по мере m на полукольце \mathfrak{S} .

9. Отметим, в частности, если $E = [0, 1]$, \mathfrak{S} — полукольцо промежутков $\langle a, b \rangle \subset [0, 1]$ и $m\langle a, b \rangle = b - a$, то класс $L(\mathfrak{S}, m)$ является алгеброй измеримых по Лебегу множеств на E , а $\mu = \mu^*|L$ называется мерой Лебега на отрезке $[0, 1]$. Аналогично, если \mathfrak{S} — класс прямоугольников в $[0, 1] \times [0, 1]$, а m — площадь, то соответствующая мера называется плоской мерой Лебега на $[0, 1] \times [0, 1]$.

10. П р и м е р [неизмеримого по Лебегу множества]. Пусть μ — линейная мера Лебега на промежутке $[-1, 2)$, и R — отношение эквивалентности на $[0, 1)$: $R(x, y)$, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Тогда $[0, 1)$ разбивается на непересекающиеся смежные классы. Выберем в каждом классе по одной точке и образуем из них множество $X \subset [0, 1)$. Покажем, что X неизмеримо. Пусть, напротив, X измеримо. Тогда $\mu(X + q) = \mu X$ ($q \in \mathbb{Q}$), где $X + q = \{x + q : x \in X\}$. Если q_1, q_2, \dots — последовательность всех рациональных чисел из $[-1, 1)$, то $[0, 1) \subset \sum_{k=1}^{\infty} (X + q_k) \subset [-1, 2)$. Следовательно,

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X + q_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu X \leq 3,$$

что невозможно ($\mu X = 0$ противоречит оценке снизу, а $\mu X > 0$ — оценке сверху).

У п р а ж н е н и я 11. Пусть m — мера на полукольце \mathfrak{S} с 1, а m' — её продолжение на $\mathfrak{E}(\mathfrak{S})$. Покажите, что для $X \subset E$:

(а) $\mu^* X = \inf_{X \subset \cup X_n, X_n \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})} \sum m' X_n,$

(б) если $A \in \mathfrak{E}(\mathfrak{S})$, $X \cap A = \emptyset$, то $\mu^*(X + A) = \mu^* X + m' A$.

12. Пусть μ — мера Лебега на $L(\mathfrak{S}, m)$ а ν — мера, определённая на $L(\mathfrak{S}, m)$ и такая, что $\nu \mid \mathfrak{S} = m$. Убедитесь, что $\nu = \mu$.

13. В обозначениях 192.9: $\mu^* \{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i < \infty \} = 0$.

§197. Случай полукольца без 1

1. Пусть \mathfrak{S} — полукольцо (возможно, без 1) в множестве E и $m : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — мера. Для каждого $A \in \mathfrak{S}$ положим

$$\mathfrak{S}_A \equiv \{BA : B \in \mathfrak{S}\}, \quad m_A X \equiv mX \quad (X \in \mathfrak{S}_A).$$

Класс \mathfrak{S}_A является полукольцом с 1 в множестве A (!), а функция $m_A : \mathfrak{S}_A \rightarrow \mathbb{R}^+$ — мера на \mathfrak{S}_A . Пусть μ_A^* — внешняя мера (по отношению к мере m_A). Следующее утверждение показывает, что семейство $\{\mu_A^*\}_{A \in \mathfrak{S}}$ в естественном смысле является согласованным:

2. Пусть $A, B \in \mathfrak{S}$ и $X \subset AB$. Тогда $\mu_B^* X = \mu_A^* X$.

¶ Случай: $B \subset A$. Очевидно, $\mu_A^* X \leq \mu_B^* X$. Обратно, если $\{X_n\}$ ($\subset \mathfrak{S}_A$) — счётное покрытие X , то семейство $\{X_n B\} \subset \mathfrak{S}_B$ и по-прежнему является покрытием X . Кроме того, $\sum_n m X_n B \leq \sum_n m X_n$. Отсюда $\mu_B^* X \leq \mu_A^* X$.

Общий случай. С учётом включений $AB \subset A$, $AB \subset B$ имеем для $X \subset AB$ в силу 1-го случая: $\mu_A^* X = \mu_{AB}^* X = \mu_B^* X$. □

Для каждого $A \in \mathfrak{S}$ мы можем рассмотреть лебеговское продолжение $\mu_A \equiv \mu_A^* \mid L_A$, где $L_A \equiv L(\mathfrak{S}_A, m_A)$.

3. Множество $X (\subset E)$ называется *измеримым по Лебегу*, если $XA \in L_A$ при любом $A \in \mathfrak{S}$. Обозначим снова через $L = L(\mathfrak{S}, m)$ класс всех измеримых по Лебегу множеств.

4. Класс $L(\mathfrak{S}, m)$ является σ -алгеброй.

¶ 1-й случай: \mathfrak{S} — полукольцо с 1. Достаточно проверить, что для последовательности $X_n \in L$ множество $X = \bigcup_n X_n$ принадлежит L . Положим $Y_1 = X_1$, $Y_n = X_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i \right)$ ($n > 1$). Ясно, что $Y_n \in L$ и $X = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$. Следовательно,

$$\mu^* X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu Y_n. \quad (1)$$

Далее из включения $X^c \subset \left(\sum_{n=1}^N Y_n \right)^c$ следует, что

$$\mu^* X^c \leq mE - \sum_{n=1}^N \mu Y_n. \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), находим $\mu^* X + \mu^* X^c \leq mE + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu Y_n$. Переходя здесь к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем $\mu^* X + \mu^* X^c \leq mE$. С учётом свойства 195.2 отсюда следует, что $X \in L$.

2-й случай: \mathfrak{S} — полукольцо без 1. Пусть $X_n \in L(\mathfrak{S}, m)$ ($n = 1, 2, \dots$) и $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Для любого $A \in \mathfrak{S}$: $AX_n \in L_A$. Поэтому $AX = \bigcup_{n=1}^{\infty} AX_n \in L_A$, так как L_A σ -алгебра. Итак, $X \in L$.

Аналогично можно показать, что класс L замкнут относительно операции теоретико-множественного дополнения. \square

5. $L_A \subset L$ при любом $A \in \mathfrak{S}$.

¶ Пусть $X \in L_A$ и $B \in \mathfrak{S}$ — произвольно. Тогда с учётом п. 2 и свойства 196.11(б) имеем:

$$\begin{aligned} \mu_B^*(XB) + \mu_B^*(B \setminus X) &= \mu_A^*(XB) + \mu_B^*(A \cap (B \setminus X) + B \setminus A) \\ &= \mu_A^*(XB) + \mu_B^*(A(B \setminus X)) + \mu_B(B \setminus A) \\ &= \mu_A(XB) + \mu_A(A(B \setminus X)) + mB - m(AB) = mB. \end{aligned}$$

Итак, $BX \in L_B$ при любом $B \in \mathfrak{S}$, то есть $X \in L$. \square

Распространим теперь меру m с полукольца \mathfrak{S} на класс $L(\mathfrak{S}, m)$. Ограничимся при этом полезным для приложений случаем так называемой σ -конечной меры (в этом случае множество E представляется в виде счётной суммы множеств конечной меры):

6. Мера $m : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ на полукольце \mathfrak{S} в множестве E называется σ -конечной, если существует представление $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \mathfrak{S}$.

7. Пусть $m : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ σ -конечная мера и E_n ($n = 1, 2, \dots$) — множества из п. 6. Функция $\mu : L(\mathfrak{S}, m) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, определённая равенством

$$\mu X \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n}(XE_n) \quad (X \in L(\mathfrak{S}, m)),$$

называется мерой Лебега на классе $L(\mathfrak{S}, m)$. (При этом расходящемуся числовому ряду приписывается значение $+\infty$.)

8. Мера Лебега на классе $L(\mathfrak{S}, m)$ определена корректно и σ -аддитивна (σ -аддитивность, естественно, означает, что

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad (X, X_n \in L(\mathfrak{S}, m)) \Rightarrow \mu X = \sum_{n=1}^{\infty} \mu X_n.$$

¶ Корректность. Пусть наряду с представлением E в п. 6 есть ещё одно представление $E = \sum_{s=1}^{\infty} F_s$ ($F_s \in \mathfrak{S}$). Тогда (см. п. 2)

$$\begin{aligned} \sum_n \mu_{E_n}(X E_n) &= \sum_n \mu_{E_n} \left\{ \sum_s X E_n F_s \right\} = \sum_n \sum_s \mu_{E_n}(X E_n F_s) \\ &= \sum_s \sum_n \mu_{F_s}(X E_n F_s) = \sum_s \mu_{F_s}(X F_s). \end{aligned}$$

Пусть далее $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ ($X, X_k \in L(\mathfrak{S}, m)$). Тогда

$$\mu X = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{E_n} X E_n = \sum_n \sum_k \mu_{E_n}(X_k E_n) = \sum_k \sum_n \mu_{E_n} X_k E_n = \sum_k \mu X_k. \square$$

Отметим особо случай множества лебеговой меры нуль.

9. Множество $X \subset E$ измеримо и имеет лебегову меру нуль тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists X_n \in \mathfrak{S} \ (n \in \mathbb{N}) \ (X \subset \bigcup_n X_n, \sum_n m X_n < \varepsilon). \quad (3)$$

¶ Необходимость очевидна (!!). Докажем достаточность. Пусть условие (3) выполнено. Если $A \in \mathfrak{S}$ произвольно, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists X_n \in \mathfrak{S} \ (n = 1, 2, \dots) \ (X A \subset \bigcup_n X_n A, \sum_n m X_n A < \varepsilon).$$

Отсюда $\mu_A^*(X A) = 0$ и $X A \in L_A$ (см. п. 3). Следовательно, $X \in L(\mathfrak{S}, m)$ и в силу п. 7 $\mu X = 0$. \square

Отметим в качестве следствия свойство, называемое обычно полнотой меры Лебега.

10. Всякое подмножество множества лебеговой меры нуль измеримо (и имеет лебегову меру нуль).

11. П р и м е р. Пусть \mathfrak{S} — полукольцо всех промежутков $\langle a, b \rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}$) в \mathbb{R} , $m \langle a, b \rangle \equiv b - a$. Это σ -конечная мера в \mathbb{R} ; соответствующая мера Лебега на классе $L(\mathfrak{S}, m)$ называется линейной мерой Лебега на числовой прямой \mathbb{R} . Аналогично определяется плоская мера Лебега в \mathbb{R}^2 и “объёмная” мера Лебега в \mathbb{R}^n . Отметим, что борелевские алгебры $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 1$) содержатся в соответствующих алгебрах измеримых по Лебегу множеств.

12. Пусть \mathfrak{A} — σ -алгебра в множестве E . Функция $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ называется σ -конечной мерой, если

(а) существует представление $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \mathfrak{A}$ и $\mu E_n < +\infty$,

(б) $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ ($X \in \mathfrak{A}$) $\Rightarrow \mu X = \sum_{n=1}^{\infty} \mu X_n$ (расходящемуся ряду приписывается значение $+\infty$).

При этом σ -конечная мера μ называется *полной*, если $Y \subset X \in \mathfrak{A}$, $\mu X = 0$ влечёт $Y \in \mathfrak{A}$ (и значит, $\mu Y = 0$).

Отметим ещё полезное свойство непрерывности меры относительно монотонных сходимостей множеств.

13. Пусть μ — σ -конечная мера на σ -алгебре множеств \mathfrak{A} и $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ ($X_n, Y_n \in \mathfrak{A}$). Тогда

(а) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \lim_n \mu X_n$,

(б) если $\mu Y_k < +\infty$ при некотором k , то $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n\right) = \lim_n \mu Y_n$.

¶ Докажем, например, (б). Пусть для определённости $\mu Y_1 < +\infty$. Из равенства $Y_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n + Y_1 \setminus Y_2 + Y_2 \setminus Y_3 + \dots$ с учётом п. 12(б) имеем

$$\begin{aligned} \mu Y_1 &= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Y_k \setminus Y_{k+1}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n\right) + \lim_n \sum_{k=1}^{n-1} \mu(Y_k \setminus Y_{k+1}), \\ \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n\right) &= \mu Y_1 - \lim_n \sum_{k=1}^{n-1} \mu(Y_k \setminus Y_{k+1}) = \lim_n \mu\left[Y_1 \setminus \left(\sum_{k=1}^{n-1} (Y_k \setminus Y_{k+1})\right)\right] = \lim_n \mu Y_n. \quad \square \end{aligned}$$

14. У п р а ж н е н и е. Пусть m — полная конечная мера на σ -алгебре множеств \mathfrak{A} . Покажите, что $L(\mathfrak{A}, m) = \mathfrak{A}$. Обобщите результат на случай σ -конечной меры.

§198. Меры Лебега-Стилтьеса на числовой прямой

Здесь мы обсудим задачу перечисления всех мер на борелевской алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

1. Обозначим через \mathcal{F} класс всех функций $F(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) неубывающих, непрерывных слева и таких, что

$$F(+\infty) - F(-\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) < +\infty.$$

Пусть \mathfrak{S} — полукольцо (с 1) в \mathbb{R} всех промежутков вида $[a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Определим для каждой функции $F \in \mathcal{F}$ меру $m_F : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$m_F[a, b) \equiv F(b) - F(a) \quad (*)$$

(см. ниже упр. 6). Согласно §196 эта мера допускает продолжение до меры Лебега $\mu_F : L_F \rightarrow \mathbb{R}^+$, где $L_F = L(\mathfrak{S}, m_F)$. Назовём μ_F *мерой Лебега-Стилтьеса* на числовой прямой. По построению для каждой $F \in \mathcal{F}$ верно включение $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subset L_F$.

Меры Лебега-Стилтьеса интересны тем, что ими исчерпываются все меры на алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

2. Если $m : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ — мера, то существует и определена однозначно, с точностью до постоянного слагаемого, функция $F \in \mathcal{F}$ такая, что $m = \mu_F \mid \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

¶ Для меры $m : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ определим функцию F равенством $F(t) \equiv m(-\infty, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ясно, что F не убывает, $F(+\infty) - F(-\infty) = m\mathbb{R} < +\infty$. Кроме того, $(-\infty, t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, t - \frac{1}{n})$, и в силу непрерывности m (см. 197.13):

$$F(t) = m(-\infty, t) = \lim_n m(-\infty, t - \frac{1}{n}) = \lim_n F(t - \frac{1}{n}) = F(t-).$$

Итак, $F \in \mathcal{F}$. Пусть теперь $G \in \mathcal{F}$ — ещё одна функция, обладающая свойством $m = \mu_G \mid \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Если допустить, что $G(t) \neq F(t) + \text{const}$, то найдутся $x, y \in \mathbb{R}$ ($x > y$) такие, что $G(x) - G(y) \neq F(x) - F(y)$. Следовательно (см. (*)), $\mu_F[y, x] \neq \mu_G[y, x]$, что противоречит равенству $\mu_F \mid \mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \mu_G \mid \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. \square

3. Аналогично можно определить меры Лебега-Стилтьеса на отрезке $[a, b] (\subset \mathbb{R})$. Эти меры можно перечислить с помощью неубывающих, непрерывных слева функций $\Phi(t)$ ($a \leq t \leq b$). В частности, при $\Phi(t) \equiv t$ ($a \leq t \leq b$) получается линейная мера Лебега на отрезке $[a, b]$.

У п р а ж н е н и я 4. Пусть $F = \chi_{(0, +\infty)}$. Убедитесь, что (а) $\mu_F\{0\} = 1$, (б) L_F совпадает с семейством всех подмножеств множества \mathbb{R} , (в) для $X \subset \mathbb{R}$:

$$\mu_F X = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in X, \\ 0, & \text{если } 0 \notin X. \end{cases}$$

5. Если функция $F \in \mathcal{F}$ принимает не более чем счётное число значений, то L_F совпадает с семейством всех подмножеств множества \mathbb{R} .

6. Покажите, что функция m_F , определённая в п. 1 равенством (*), является σ -аддитивной.

§199. Разложение меры Лебега-Стилтьеса на дискретную и непрерывную компоненты

1. Для функции $F \in \mathcal{F}$ определим новую функцию

$$F_d(t) \equiv \sum_{t_k < t} [F(t_k+) - F(t_k)] \quad (t \in \mathbb{R}),$$

где t_k — точки разрыва функции F (хорошо известно, что их не более чем счётно (см. 48.2)). Назовём эту функцию (она также принадлежит классу \mathcal{F}) *дискретной компонентой* функции F .

2. Функция $F_c \equiv F - F_d$ принадлежит классу \mathcal{F} и непрерывна.

¶ Покажем сначала, что F_c не убывает. Для $t < s$ имеем:

$$F(s) - F(t) \geq \sum_{t \leq t_k < s} [F(t_k+) - F(t_k)] = \sum_{t_k < s} - \sum_{t_k < t} = F_d(s) - F_d(t).$$

Поэтому $F_c(s) = F(s) - F_d(s) \geq F(t) - F_d(t) = F_c(t)$. Непрерывность F_c следует из равенства:

$$F_c(t+) = F(t+) - F_d(t+) = F(t) + F_d(t+) - F_d(t) - F_d(t+) = F_c(t). \quad \square$$

3. Таким образом, всякая функция $F \in \mathcal{F}$ есть сумма своей дискретной и непрерывной компонент: $F = F_d + F_c$. При этом из (*)§198 следует, что

$$m_F = m_d + m_c, \quad (1)$$

где $m_d \equiv m_{F_d}$, $m_c \equiv m_{F_c}$. Подобное равенство справедливо и для лебеговских продолжений указанных мер. Пусть μ_c и μ_d — лебеговские продолжения соответственно мер m_c и m_d .

4. Всякая мера Лебега-Стилтьеса μ_F представима в виде суммы $\mu_c + \mu_d$ в том смысле, что равенство

$$\mu_F X = \mu_d X + \mu_c X \quad (2)$$

справедливо всякий раз, когда определена одна из его частей.

¶ Через \mathfrak{S} обозначим полукольцо, определённое в 198.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $\{X_n\} \subset \mathfrak{S}$ — покрытие X . В силу (1)

$$\sum_n m_F X_n = \sum_n m_c X_n + \sum_n m_d X_n \geq \mu_c^* X + \mu_d X$$

(согласно 198.5 звёздочка у μ_d^* опущена). Из произвольности покрытия $\{X_n\}$ отсюда

$$\mu_F^* X \geq \mu_c^* X + \mu_d X. \quad (3)$$

С другой стороны, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся покрытия $\{Y_n\}, \{Z_k\}$ множества X попарно непересекающимися множествами из \mathfrak{S} такие, что

$$\sum_n m_c Y_n < \mu_c^* X + \varepsilon/2, \quad \sum_k m_d Z_k < \mu_d X + \varepsilon/2.$$

Тогда семейство $\{Y_n Z_k\}_{n,k}$ — снова покрытие X , причём

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_k m_F Y_n Z_k &= \sum_n \sum_k m_c Y_n Z_k + \sum_k \sum_n m_d Y_n Z_k \leq \sum_n m_c Y_n + \sum_k m_d Z_k \\ &< \mu_c^* X + \mu_d X + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mu_F^* X \leq \mu_c^* X + \mu_d X. \quad (4)$$

Из (3) и (4) имеем

$$\mu_F^* X = \mu_c^* X + \mu_d X \quad (X \subset \mathbb{R}). \quad (5)$$

Складывая (5) с таким же равенством для X^c , получаем

$$\mu_F^* X + \mu_F^* X^c = \mu_c^* X + \mu_c^* X^c + \mu_d \mathbb{R} = \mu_c^* X + \mu_c^* X^c + m_F \mathbb{R} - m_c \mathbb{R}. \quad (6)$$

Если определена правая часть (2), то это означает, что $X \in L_{F_c}$, то есть $\mu_c^* X + \mu_c^* X^c = m_c \mathbb{R}$ и потому из (6) следует, что $\mu_F^* X + \mu_F^* X^c = m_F \mathbb{R}$, то есть $X \in L_F$ и справедливо (2). Аналогично рассматривается случай, когда определена левая часть (2). \square

§200. Абсолютно непрерывные меры

Здесь мы коснёмся вопроса сравнения различных мер, заданных на одной σ -алгебре множеств; меры могут быть в определённом смысле “близкими” по своим качественным свойствам, а могут оказаться и “далёкими” друг от друга.

1. Пусть μ и ν — две меры, заданные на σ -алгебре \mathfrak{A} в множестве E . Мера ν называется *абсолютно непрерывной* относительно меры μ (обозначается $\nu \ll \mu$), если $\forall X \in \mathfrak{A} (\mu X = 0 \Rightarrow \nu X = 0)$. Меры μ и ν называются *эквивалентными*, если $\nu \ll \mu$ и $\mu \ll \nu$. Мера ν называется *сингулярной относительно меры μ* , если существует $X \in \mathfrak{A}$ такое, что $\mu X = \nu X^c = 0$.

2. В условиях п. 1 $\nu \ll \mu$ тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall X \in \mathfrak{A} (\mu X < \delta \Rightarrow \nu X < \varepsilon). \quad (*)$$

¶ Достаточность очевидна. Пусть теперь $(*)$ не выполняется, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \forall k \in \mathbb{N} \exists X_k \in \mathfrak{A} (\mu X_k < 2^{-k}, \nu X_k \geq \varepsilon).$$

Для множеств $Y_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} X_k$ ($n = 1, 2, \dots$) имеем

$$\mu Y_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu X_k < \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n}, \quad \nu Y_n \geq \nu X_{n+1} \geq \varepsilon.$$

Тогда для $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$ в силу 197.13 получим (так как $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$): $\mu Y = \lim_n \mu Y_n = 0$, $\nu Y = \lim_n \nu Y_n \geq \varepsilon$, то есть ν не абсолютно непрерывна относительно μ . \square

Рассмотрим понятие абсолютной непрерывности применительно к борелевской алгебре отрезка числовой прямой. Нам понадобится понятие абсолютной непрерывности для вещественных функций.

3. Вещественная функция $f(t)$ ($a \leq t \leq b$) называется *абсолютно непрерывной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что какова бы ни была система попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) суммарной длины меньше δ , справедливо неравенство $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

4. Пусть μ_F — мера на $\mathfrak{B}([a, b])$, порождённая функцией $F \in \mathcal{F}$ (см. 198.3), и μ — линейная мера Лебега; $\mu_F \ll \mu$ тогда функция F абсолютно непрерывна.

¶ Пусть $\mu_F \ll \mu$ и $\delta > 0$ определено по $\varepsilon > 0$ в соответствии с $(*)$. Положив $X = \sum_{k=1}^n [a_k, b_k)$, имеем $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) = \mu X < \delta$ и поэтому

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^n [F(b_k) - F(a_k)] = \mu_F X < \varepsilon.$$

Обратно, пусть F абсолютно непрерывна и $\mu X = 0$. Для $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ из определения абсолютной непрерывности F . Существует покрытие $\{[a_i, b_i)\}_{i=1,2,\dots}$

множества X попарно непересекающимися промежутками такое, что $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta$ (см. 195.3). Отсюда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_F[a_i, b_i] = \lim_n \sum_{i=1}^n [F(b_i) - F(a_i)] \leq \varepsilon,$$

а значит, $\mu_F X = 0$. \square

5. З а м е ч а н и е. Ниже (см. §212) будет получено уточнение утверждения 199.4, а именно, будет установлено, что непрерывная компонента μ_c каждой меры Лебега-Стилтьеса μ_F в свою очередь допускает (однозначное) представление в виде суммы $\mu_a + \mu_s$, где μ_a — абсолютно непрерывна относительно линейной меры Лебега μ на числовой прямой, а μ_s сингулярна относительно μ . Пока же мы приведём пример борелевской меры μ_F сингулярной относительно линейной меры Лебега, для которой F непрерывна.

6. П р и м е р. Разделим отрезок $E = [0, 1]$ на три части $[0, 1/3]$, $(1/3, 2/3)$, $[2/3, 1]$ и обозначим $X_1 = (1/3, 2/3)$. Каждый из отрезков $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ снова разделим подобным образом на три части и обозначим $X_2 = (1/9, 2/9)$, $X_3 = (7/9, 8/9)$. Каждый из оставшихся отрезков $[0, 1/9]$, $[2/9, 3/9]$, $[6/9, 7/9]$, $[8/9, 1]$ снова разделим на три части и т. д. Получаем последовательность X_1, X_2, X_3, \dots попарно непересекающихся открытых интервалов отрезка E . Пусть $Y = \sum_n X_n$. Множество $Y^c = E \setminus Y$ называется *канторовым множеством* (оно построено Г. Кантором — основателем теории множеств). Определим функцию θ на E равенством

$$\theta(x) = \begin{cases} 2^{-1}, & \text{если } x \in X_1, \\ 2^{-2}, & \text{если } x \in X_2, \\ 3 \cdot 2^{-2}, & \text{если } x \in X_3, \\ 2^{-3}, & \text{если } x \in X_4, \\ \dots & \dots \quad \dots \end{cases}$$

Для $x \in Y^c$ положим $\theta(x) = \sup_{y < x, y \in Y} \theta(y)$, $\theta(0) \equiv 0$. Функция θ не убывает на E и непрерывна. В самом деле, если $\theta(x+) - \theta(x-) > 0$ для некоторой точки $x \in E$, то найдётся дробь вида $m \cdot 2^{-n}$ такая, что $\theta(x-) < m \cdot 2^{-n} < \theta(x+)$; по построению существует x_0 такое, что $\theta(x_0) = m \cdot 2^{-n}$, что противоречит монотонности θ .

Рассмотрим теперь меру Лебега-Стилтьеса μ_θ на $[0, 1]$. При этом для $X = Y^c$ имеем (μ — линейная мера Лебега):

$$\mu X = 1 - \mu Y = 1 - \sum_n \mu X_n = 1 - (1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots) = 0,$$

$$\mu_\theta X^c = \mu_\theta Y = \sum_n \mu_\theta X_n = [\theta(2/3) - \theta(1/3)] + [\theta(2/9) - \theta(1/9)] + \dots = 0.$$

З а м е ч а н и я. 7. Всякая абсолютно непрерывная функция равномерно непрерывна. Обратное неверно: рассмотрите функцию θ примера 6 (!!).

8. Если в п. 3 разрешить системе попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k) суммарной длины меньше δ , быть счётной, получится определение, эквивалентное исходному (!!).

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

В классическом анализе оперируют главным образом с непрерывными функциями, определёнными в евклидовых пространствах. Однако, поточечный предел последовательности непрерывных функций уже не будет, вообще говоря, непрерывной функцией. Стремление работать с классом функций, замкнутым относительно операций анализа (арифметические операции, предельный переход), приводит к необходимости изучения функций более общих, нежели непрерывные.

§201. Прообраз кольца относительно отображения

1. Пусть E, F — множества и $f : E \rightarrow F$ — отображение. Для полных прообразов множеств $Y (\subset F)$ относительно отображения f (см. 1.1) справедливы равенства

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} Y_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i), \quad f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(Y)^c. \quad (*)$$

Пусть \mathfrak{E} — семейство подмножеств множества F . Прообразом \mathfrak{E} относительно отображения $f : E \rightarrow F$ назовём семейство $f^{-1}(\mathfrak{E}) \equiv \{f^{-1}(Y) : Y \in \mathfrak{E}\}$. Из равенств (*) следует:

2. **З а м е ч а н и е.** Прообраз кольца относительно произвольного отображения является кольцом.

3. Пусть \mathfrak{E} — семейство подмножеств множества F и $f : E \rightarrow F$. Кольцо в E , порождённое семейством $f^{-1}(\mathfrak{E})$, совпадает с прообразом относительно f кольца, порождённого семейством \mathfrak{E} .

¶ Пусть $\mathfrak{I}(\mathfrak{E})$ — кольцо, порождённое семейством \mathfrak{E} (см. §193). Семейство $f^{-1}(\mathfrak{I}(\mathfrak{E}))$ является кольцом, объемлющим семейство $f^{-1}(\mathfrak{E})$. Пусть \mathfrak{K} — произвольное кольцо, объемлющее $f^{-1}(\mathfrak{E})$. Тогда семейство $\mathfrak{I}_0(\mathfrak{E}) \equiv \{X \in \mathfrak{I}(\mathfrak{E}) : f^{-1}(X) \in \mathfrak{K}\}$ обладает свойствами:

- (а) $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{I}_0(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{E})$ (по построению),
- (б) $\mathfrak{I}_0(\mathfrak{E})$ — кольцо (!!).

Поэтому $\mathfrak{I}_0(\mathfrak{E}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{E})$. Итак, кольцо \mathfrak{K} необходимо объемлет и кольцо $f^{-1}(\mathfrak{I}(\mathfrak{E}))$. Таким образом, $f^{-1}(\mathfrak{I}(\mathfrak{E}))$ — наименьшее кольцо, объемлющее $f^{-1}(\mathfrak{E})$: $f^{-1}(\mathfrak{I}(\mathfrak{E})) = \mathfrak{I}(f^{-1}(\mathfrak{E}))$. □

4. **У п р а ж н е н и е.** Утверждения пп. 2, 3 остаются справедливыми для σ -кольца, алгебры, σ -алгебры.

§202. Определение измеримой функции

Будем предполагать, что E — абстрактное множество с заданной на нём σ -алгеброй \mathfrak{A} .

1. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если $f^{-1}(Y) \in \mathfrak{A}$ для любого борелевского множества $Y (\subset \mathbb{R})$. Другими словами, f измерима, если $f^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$, где \mathfrak{B} — борелевская алгебра в \mathbb{R} .

Обозначим через $M = M(E, \mathfrak{A})$ множество всех измеримых функций $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

2. П р и м е р. Функция вида χ_X ($X \in \mathfrak{A}$) измерима.

3. $f \in M(E, \mathfrak{A})$ тогда $\{x : f(x) < c\} \in \mathfrak{A}$ ($c \in \mathbb{R}$).

¶ Если $f \in M$, то $\{x : f(x) < c\} = f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathfrak{A}$, так как $(-\infty, c) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ($c \in \mathbb{R}$).
Обратно, пусть

$$f^{-1}(\mathfrak{E}) \subset \mathfrak{A}, \text{ где } \mathfrak{E} = \{(-\infty, c)\}_{c \in \mathbb{R}}.$$

Так как $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ -алгебра, порождённая семейством \mathfrak{E} (см. 193.11), то с учётом 201.4 имеем

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = f^{-1}(\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{E})) = \mathfrak{A}_\sigma(f^{-1}(\mathfrak{E})) \subset \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$$

(через $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{E})$ обозначается σ -алгебра, порождённая семейством \mathfrak{E}), то есть $f \in M$. \square

4. Напомним терминологию §138: последовательность функций $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ сходится к $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (обозначение $f_n \rightarrow f$), если $\lim_n f_n(x) = f(x)$ ($x \in E$); f_n равномерно сходится к f ($f_n \Rightarrow f$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

5. Если последовательность f_n измеримых функций сходится к функции f , то f также измерима.

¶ Ясно, что $\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) < c - \frac{1}{k}\}$. Так как $f_n \rightarrow f$, неравенство $f(x) < c - \frac{1}{k}$ при фиксированном $x \in E$ означает, что для достаточно больших n : $f_n(x) < c - \frac{1}{k}$. Следовательно,

$$\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}.$$

Теперь утверждение следует из п. 3. \square

6. Измеримые функции, принимающие не более чем счётное число значений, будем называть *простыми* функциями. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — все (попарно различные) значения, которые принимает простая функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Так как одноточечные множества $\{\lambda_n\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, то множества $X_n \equiv \{x : f(x) = \lambda_n\} = f^{-1}(\{\lambda_n\}) \in \mathfrak{A}$ попарно не пересекаются и образуют разбиение E . Таким образом, всякая простая функция f представима в виде:

$$f = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n}, \quad \sum_n X_n = E, \quad X_n \in \mathfrak{A}.$$

Следующее свойство можно рассматривать как конструктивное определение измеримой функции.

7. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ измерима тогда она является равномерным пределом простых функций.

¶ Достаточность справедлива в силу п. 5. Для проверки необходимости положим

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \text{ если } \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}).$$

Ясно, что f_n — простые функции и $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ ($x \in E$), то есть $f_n \Rightarrow f$. \square

У п р а ж н е н и я . 8. Пусть $f_n \in M(E, \mathfrak{A})$ ($n = 1, 2, \dots$) и $f(x) = \sup_n f_n(x) < +\infty$ ($x \in E$). Тогда $f \in M(E, \mathfrak{A})$.

9. Если $f, g \in M(E, \mathfrak{A})$, то $\{x : f(x) \neq g(x)\} \in \mathfrak{A}$.

10. Пусть $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{Z})$ — σ -алгебра в Ω , порождённая полукольцом \mathfrak{Z} (191.9). Покажите, что функция $f(\omega) = \sum_n \omega_n 2^{-n}$ ($\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$) принадлежит классу $M(\Omega, \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{Z}))$.

§203. Элементарные свойства измеримых функций

1. Пусть $f, g \in M(E, \mathfrak{A})$. Тогда $f \pm g, f \cdot g \in M(E, \mathfrak{A})$. Если, кроме того, f не обращается в нуль, то $1/f \in M(E, \mathfrak{A})$.

¶ Пусть f, g — простые функции:

$$f = \sum_n \lambda'_n \chi_{X_n}, \quad g = \sum_k \lambda''_k \chi_{Y_k} \quad \left(\sum_n X_n = \sum_k Y_k = E \right).$$

Тогда $f + g = \sum_{n,k} (\lambda'_n + \lambda''_k) \chi_{X_n Y_k}$ и, следовательно, $f + g$ — простая функция. (В соответствии с определением простой функции следует рассмотреть последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ попарно различных значений всех сумм вида $\lambda'_n + \lambda''_k$ ($n, k = 1, 2, \dots$), так что

$$f + g = \sum_{\lambda'_n + \lambda''_k = \lambda_s} \lambda_s \chi_{Z_s}, \quad \text{где } Z_s = \sum_{\lambda'_n + \lambda''_k = \lambda_s} X_n Y_k.$$

В дальнейшем будем опускать столь детальные аргументы при арифметических операциях над простыми функциями.) Если f, g — измеримые, но не простые, то измеримость $f + g$ следует из 202.7.

Если $f \in M(E, \mathfrak{A})$, то $f^2 \in M(E, \mathfrak{A})$ в силу равенства

$$\{x : f^2(x) < c\} = \{x : f(x) < \sqrt{c}\} \cap \{x : f(x) > -\sqrt{c}\} \quad (c \geq 0).$$

Из представления $f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ следует измеримость произведения измеримых функций. □

2. Если $f \in M(E, \mathfrak{A})$ и $X \in \mathfrak{A}$, то $f \cdot \chi_X \in M(E, \mathfrak{A})$.

¶ Это непосредственное следствие п. 1. □

3. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *измеримой по Борелю* (или *B-измеримой*), если $f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R})) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

4. Пусть $f \in M(E, \mathfrak{A})$ и φ B-измерима. Тогда суперпозиция $\varphi \circ f \in M(E, \mathfrak{A})$.

¶ Действительно, $\varphi^{-1}(Y) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ для любого $Y \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Следовательно, $(\varphi \circ f)^{-1}(Y) = f^{-1}(\varphi^{-1}(Y)) \in \mathfrak{A}$. □

5. З а м е ч а н и е. Определение п. 3 можно обобщить на случай функций вида $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где $X(\subset \mathbb{R})$ — некоторое борелевское множество. Такая функция называется B-измеримой, если $f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R})) \subset \mathfrak{B}(X)$, где $\mathfrak{B}(X) = \{B \cap X : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$.

У п р а ж н е н и я . 6. Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то она B-измерима.

7. Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечное или счётное число точек разрыва, то она B-измерима.

8. Если $f_n \in M(E, \mathfrak{A})$ — последовательность измеримых функций, то $X = \{x \in E : (f_n(x)) \text{ сходится}\} \in \mathfrak{A}$.

§204. Измеримые функции на пространстве с мерой

1. Рассмотрим тройку (E, \mathfrak{A}, μ) , где E — множество, \mathfrak{A} — σ -алгебра в E , μ — полная σ -конечная мера на \mathfrak{A} (см. 197.12). Функции $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ назовём *эквивалентными* (пишем $f \sim g$), если $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Таким образом, $f \sim g$, если $f(x) = g(x)$ п.в. (в соответствии с терминологией 47.1).

2. Если $g \in M(E, \mathfrak{A})$ и $f \sim g$, то $f \in M(E, \mathfrak{A})$.

¶ Действительно,

$$\begin{aligned} \{x : f(x) < c\} &= \{x : f(x) = g(x), g(x) < c\} + \{x : f(x) \neq g(x), f(x) < c\} \\ &= \{x : g(x) < c\} \cap \{x : f(x) \neq g(x)\}^c + \{x : f(x) \neq g(x), f(x) < c\}. \end{aligned}$$

Из полноты меры $\{x : f(x) \neq g(x), f(x) < c\} \in \mathfrak{A}$, $\{x : f(x) \neq g(x)\}^c \in \mathfrak{A}$. Поэтому $\{x : f(x) < c\} \in \mathfrak{A}$. □

3. Если функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и эквивалентны относительно линейной меры Лебега, то $f = g$.

¶ Пусть, напротив, $f(x_0) \neq g(x_0)$; из непрерывности f и g в точке x_0 следует, что существуют a, b ($a < x_0 < b$) такие, что $(f - g)(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. При этом $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} \geq \mu(a, b) = b - a > 0$, то есть f и g не эквивалентны. □

4. З а м е ч а н и е. В классе $M(E, \mathfrak{A})$ измеримых функций отношение \sim является отношением эквивалентности. Класс $M(E, \mathfrak{A})$ формально не зависит от меры $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. В том случае, когда функции нас интересуют с точностью до их значений на множестве меры нуль, целесообразно факторизовать множество $M(E, \mathfrak{A})$ по отношению эквивалентности \sim (см. прил. I, п. 5). Полученное множество классов попарно эквивалентных измеримых функций обозначим через $M(E, \mathfrak{A}, \mu)$.

§205. Сходимость почти всюду

1. Последовательность $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ на пространстве с σ -конечной мерой (E, \mathfrak{A}, μ) называется сходящейся почти всюду к функции f , если $\lim_n f_n(x) = f(x)$ п.в. (пишем $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$).

2. П р и м е р. Последовательность $f_n(x) = (-1)^n x^n \chi_{[0,1]}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) сходится к 0 п.в. на числовой прямой с линейной мерой Лебега. Однако, относительно меры Лебега-Стилтьеса μ_F , определяемой функцией $F = \chi_{(1,+\infty)}$, та же последовательность функций п.в. расходится.

3. Если последовательность f_n измеримых функций сходится п.в. к функции f , то f также измерима.

¶ Пусть функции заданы на пространстве с мерой (E, \mathfrak{A}, μ) и $X = \{x : \lim_n f_n(x) = f(x)\}$, так что $f_n \chi_X \rightarrow f \chi_X$. По условию $\mu X^c = 0$. Поэтому $X \in \mathfrak{A}$. Согласно 202.5 $f \cdot \chi_X \in M(E, \mathfrak{A})$. Поскольку $\{x \in E : f(x) \neq f(x) \chi_X(x)\} \subset X^c$, имеем $f \sim f \cdot \chi_X$ и остаётся учесть 204.2. □

Следующая теорема устанавливает связь между сходимостью п.в. и равномерной сходимостью: оказывается, что на пространстве с конечной мерой для всякой сходящейся последовательности измеримых функций можно удалить из пространства множество сколь угодно малой меры так, что на оставшемся множестве эта последовательность сходится уже равномерно.

4. Т е о р е м а [Д. Ф. Егоров]. Пусть $\mu E < +\infty$, $f_n \in M(E, \mathfrak{A})$ и $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует $X \in \mathfrak{A}$ такое, что $\mu X < \delta$ и $f_n \cdot \chi_{X^c} \Rightarrow f \cdot \chi_{X^c}$.

¶ Из п. 3 следует, что $f \in M(E, \mathfrak{A})$. Положим

$$X_n^m = \bigcap_{i \geq n} \{x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\}, \quad X^m = \bigcup_n X_n^m.$$

Последовательность X_1^m, X_2^m, \dots монотонно возрастает. Поэтому в силу 197.13 для всякого m найдётся $n_0 = n_0(m)$ такое, что $\mu(X^m \setminus X_{n_0(m)}^m) < \delta 2^{-m}$. Положим $X^c = \bigcap_m X_{n_0(m)}^m$. Тогда $f_n \chi_{X^c} \Rightarrow f \chi_{X^c}$, так как $|f_n(x) \chi_{X^c}(x) - f(x) \chi_{X^c}(x)| < \frac{1}{m}$ ($n \geq n_0$). Заметим далее, что

$$(X^m)^c = \left(\bigcup_n X_n^m \right)^c = \bigcap_n \bigcup_{i \geq n} \{x : |f_i(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\}.$$

Поэтому если $x \in (X^m)^c$, то существуют сколь угодно большие n , при которых $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}$, то есть $x \in (X^m)^c \Rightarrow f_n(x) \not\rightarrow f(x)$. В силу условия теоремы $\mu(X^m)^c = 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \mu X &= \mu \left(\left[\bigcap_m X_{n_0(m)}^m \right]^c \right) = \mu \left(\bigcup_m (X_{n_0(m)}^m)^c \right) \leq \sum_m \mu (X_{n_0(m)}^m)^c = \sum_m \mu (X^m \setminus X_{n_0(m)}^m) \\ &< \sum_m \delta 2^{-m} = \delta. \quad \square \end{aligned}$$

5. У п р а ж н е н и е. Если $f_n \in M(E, \mathfrak{A})$ и $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, то $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} g$ тогда $g \sim f$.

§206. Сходимость по мере

1. Последовательность f_n измеримых функций (на пространстве с σ -конечной мерой) называется *сходящейся по мере* к измеримой функции f (обозначение: $f_n \xrightarrow{\mu} f$), если для всякого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_n \mu \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

2. Пусть f_n — последовательность измеримых функций на пространстве E с конечной мерой μ , причём $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. Тогда $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

¶ В силу 205.3 f измерима. Проверим, что $\mu X_n(\varepsilon) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), где

$$X_n(\varepsilon) \equiv \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}. \quad (*)$$

Пусть $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} X_k(\varepsilon)$. Если $x \in X$, то x принадлежит бесконечно многим $X_n(\varepsilon)$ и, следовательно, $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$. Поэтому

$$X \subset \{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}, \quad \mu \{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\} = 0.$$

Отсюда $\mu X = 0$. Полагая $Y_n = \bigcup_{k \geq n} X_k(\varepsilon)$ ($n \in \mathbb{N}$), имеем $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$, $\bigcap_n Y_n = X$ и $\mu Y_n \rightarrow 0$ (см. 197.13). Очевидно, $X_n(\varepsilon) \subset Y_n$, откуда $\mu X_n(\varepsilon) \rightarrow 0$. \square

3. П р и м е р: сходимость по мере, вообще говоря, не влечёт сходимости п.в. Пусть $E = [0, 1)$, μ — линейная мера Лебега, $f_i^k = \chi_{[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})}$, $1 \leq i \leq k$ ($k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{array}{ccccccc} f_1^1, & & & & & & \\ f_1^2, & f_2^2, & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ f_1^n, & f_2^n, & \dots & \dots & f_n^n, & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \end{array}$$

Занумеруем эту последовательность подряд: $f_1 = f_1^1, f_2 = f_1^2, f_3 = f_2^2, \dots$. Общий член последовательности $f_n = f_{i(n)}^{k(n)} : k(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и для $0 < \varepsilon < 1$:

$$\mu\{x : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{k(n)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Таким образом, $f_n \xrightarrow{\mu} 0$. В то же время для любого фиксированного $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ есть последовательность из нулей и единиц, причём как тех, так и других в этой последовательности бесконечное число. Итак, f_n не сходится ни в одной точке $x \in E$.

4. Если последовательность f_n сходится по мере к f , то существует подпоследовательность (f_{n_k}) этой последовательности, которая сходится к f п.в.

¶ Пусть ε_n, η_n — последовательности положительных чисел такие, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\sum_n \eta_n < +\infty$. Искомую подпоследовательность индексов строим индуктивно: n_1 определим из условия: $\mu X_{n_1}(\varepsilon_1) < \eta_1$, где $X_n(\varepsilon)$ определены равенством (*); такое n_1 существует, так как $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Если n_{k-1} уже определено, то n_k определим из условий: $\mu X_{n_k}(\varepsilon_k) < \eta_k$, $n_k > n_{k-1}$. Положим $X = \bigcap_i \bigcup_{k \geq i} X_{n_k}(\varepsilon_k)$. Тогда $\mu X \leq \sum_{k \geq i} \mu X_{n_k}(\varepsilon_k) < \sum_{k \geq i} \eta_k$. Из произвольности i и сходимости ряда $\sum_n \eta_n$ отсюда следует, что $\mu X = 0$. Если $f_{n_k}(x) \not\rightarrow f(x)$, то это означает, что x принадлежит бесконечно многим членам последовательности $X_{n_k}(\varepsilon_k)$, то есть $x \in X$. Поэтому $\mu\{x : f_{n_k}(x) \not\rightarrow f(x)\} = 0$. \square

5. Приведём схему взаимосвязей между различными типами сходимости ($\mu E < +\infty$):

$$\{f_n \Rightarrow f\} \Rightarrow \{f_n \rightarrow f\} \Rightarrow \{f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f\} \Rightarrow \{f_n \xrightarrow{\mu} f\}.$$

В определённом контексте импликации могут быть обращены (см. п. 4 и 205.4).

У п р а ж н е н и я. 6. Если $f_n \in M(E, \mathfrak{A})$ и $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то $f_n \xrightarrow{\mu} g$ тогда $g \sim f$.

7. Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$, то $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

8. Последовательность f_n сходится по мере тогда для всякого $\varepsilon > 0$:
 $\lim_{n,m} \mu\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} = 0$.

9. Из последовательности f_n , построенной в п. 3, выделите подпоследовательность, сходящуюся п.в.

10. Если $\mu E < +\infty$, то $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ тогда $\sup_{m \geq n} |f_m - f| \xrightarrow{\mu} 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Для измеримых функций действительного переменного определение интеграла Римана оказывается не очень удачным. Например, известная функция Дирихле $\chi \equiv \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ измерима, ограничена, но не интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$ (см. 48.4). Нетрудно установить причину этого: при составлении римановой суммы для функции f область интегрирования разбивается на мелкие отрезки Δ_k , и значение $f(x)$ в каждой точке отрезка Δ_k заменяется её значением в некоторой точке $\xi_k \in \Delta_k$. Эта процедура естественна, лишь если значения $f(x)$ в близких точках близки между собой, то есть когда f непрерывна или у неё имеется не слишком много точек разрыва. Основная идея интеграла Лебега заключается в том, что при составлении интегральной суммы точки из области интегрирования группируются не по правилу близости их между собой, а по признаку близости значений функции в этих точках. Преимущество такого подхода заключается ещё и в том, что оказывается возможным определить универсальным образом понятие интеграла для функций, заданных на произвольных множествах, где определена некоторая мера. Это важно во многих задачах математической физики, где необходимо уметь интегрировать по бесконечномерным многообразиям.

В этой главе (если не оговорено специально) μ — полная конечная мера на некоторой σ -алгебре \mathfrak{A} в E ; все рассматриваемые подмножества E считаются принадлежащими \mathfrak{A} , а все рассматриваемые функции считаются измеримыми.

§207. Определение интеграла Лебега

1. Пусть (E, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой. Простая функция $f = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n}$ ($\sum_n X_n = E$) называется интегрируемой (по Лебегу), если $\sum_n |\lambda_n| \mu X_n < +\infty$; сумма ряда $\sum_n \lambda_n \mu X_n$ называется интегралом Лебега от функции f и обозначается $\int f d\mu$:

$$\int \left(\sum_n \lambda_n \chi_{X_n} \right) d\mu \equiv \sum_n \lambda_n \mu X_n.$$

Из абсолютной сходимости ряда в правой части интеграл определён однозначно.

Отметим свойства простых интегрируемых функций.

2. Если f, g — простые интегрируемые функции, то интегрируемы $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), и $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$, $\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu$.

¶ Пусть $f = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n}$, $g = \sum_k \xi_k \chi_{Y_k}$ ($\sum X_n = \sum Y_k = E$). Тогда $f + g = \sum_{n,k} (\lambda_n + \xi_k) \chi_{X_n Y_k}$, причём

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} |\lambda_n + \xi_k| \mu X_n Y_k &\leq \sum_n \sum_k |\lambda_n| \mu X_n Y_k + \sum_k \sum_n |\xi_k| \mu X_n Y_k \\ &= \sum_n |\lambda_n| \sum_k \mu X_n Y_k + \sum_k |\xi_k| \sum_n \mu X_n Y_k = \sum_n |\lambda_n| \mu X_n + \sum_k |\xi_k| \mu Y_k < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $f + g$ интегрируема. При этом

$$\begin{aligned}\int f d\mu + \int g d\mu &= \sum_n \lambda_n \mu X_n + \sum_k \xi_k \mu Y_k = \sum_n \lambda_n \sum_k \mu X_n Y_k + \sum_k \xi_k \sum_n \mu X_n Y_k \\ &= \sum_{n,k} (\lambda_n + \xi_k) \mu X_n Y_k = \int (f + g) d\mu. \quad \square\end{aligned}$$

3. Если f — простая ограниченная функция, то f интегрируема и $|\int f d\mu| \leq \|f\|_E \mu E$, где $\|f\|_E = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

¶ Интегрируемость $f = \sum_n \lambda_n \chi_{X_n}$ ($\sum_n X_n = E$) следует из оценки $\sum_n |\lambda_n| \mu X_n \leq \|f\|_E \cdot \sum_n \mu X_n = \|f\|_E \mu E$. Поэтому $|\int f d\mu| = |\sum_n \lambda_n \mu X_n| \leq \sum_n |\lambda_n| \mu X_n \leq \|f\|_E \mu E$. \square

4. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегрируемой*, если существует последовательность простых интегрируемых функций f_n , сходящаяся к f равномерно. В этом случае величина $\lim_n \int f_n d\mu$ называется *интегралом Лебега* функции f и обозначается символом $\int f d\mu$ (или $\int_E f d\mu$, $\int_E f(x) \mu(dx)$).

Убедимся в корректности данного определения:

- (а) $\lim_n \int f_n d\mu$ существует;
- (б) предел не зависит от выбора последовательности f_n ;
- (в) для простых функций это определение согласуется с определением п. 1.

¶ Пусть f_n — простые интегрируемые функции и $f_n \Rightarrow f$. В силу пп. 2 и 3 имеем оценку

$$|\int f_n d\mu - \int f_m d\mu| = |\int (f_n - f_m) d\mu| \leq \|f_n - f_m\|_E \mu E,$$

из которой следует сходимость последовательности интегралов $\int f_n d\mu$, и (а) установлено.

Пусть g_n — ещё одна последовательность простых интегрируемых функций такая, что $g_n \Rightarrow f$. Тогда

$$|\int f_n d\mu - \int g_n d\mu| \leq \|f_n - g_n\|_E \mu E \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Поэтому $\lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu$ и (б) установлено. Утверждение (в) следует из (а) и (б), если положить $f_n = f$ ($n \in \mathbb{N}$). \square

Свойства пп. 2 и 3, установленные выше для простых функций, остаются справедливыми в общем случае (проверка этого, осуществляется с помощью предельного перехода (!)):

5. Если функции f, g интегрируемы, то интегрируемы также $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), причём $\int (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$. Всякая ограниченная измеримая функция f интегрируема, причём $|\int f d\mu| \leq \|f\|_E \mu E$.

6. Если f, g интегрируемы и $f \geq g$, то $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

¶ Утверждение достаточно доказать для $g(x) \equiv 0$. Это так, если $f \geq 0$ — простая (!!). В общем случае положим

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \chi_{A_k}, \text{ где } A_k = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{n}$. Отсюда $f_n \Rightarrow f$, $f - f_n$ — ограничены и согласно п. 5 интегрируемы. Так как f интегрируема, из равенства $f_n = (f_n - f) + f$ следует интегрируемость f_n . По построению f_n простые и $f_n \geq 0$. Следовательно, $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu \geq 0$. □

7. Функция f называется *интегрируемой по множеству* $A \in \mathfrak{A}$, если интегрируема функция $f \cdot \chi_A$; интегралом функции f по множеству A называется число $\int_A f d\mu \equiv \int f \chi_A d\mu$.

8. Если f интегрируема, то она интегрируема по каждому множеству $A \in \mathfrak{A}$.

¶ Если $f = \sum_n \lambda_n \chi_{B_n}$ — простая интегрируемая функция, то $f \chi_A = \sum_n \lambda_n \chi_{B_n A}$ и $\sum_n |\lambda_n| \mu B_n A \leq \sum_n |\lambda_n| \mu B_n < +\infty$, то есть $f \chi_A$ — также простая интегрируемая функция и

$$\int_A \left(\sum_n \lambda_n \chi_{B_n} \right) d\mu = \sum_n \lambda_n \mu A B_n. \quad (1)$$

В общем случае, если f интегрируема и f_n — последовательность простых интегрируемых функций, $f_n \Rightarrow f$, то $f_n \chi_A \Rightarrow f \chi_A$. Поэтому $f \chi_A$ интегрируема. □

Следующее утверждение называется свойством *абсолютной непрерывности интеграла Лебега*.

9. Если $\mu A = 0$ и f интегрируема, то $\int_A f d\mu = 0$.

¶ Утверждение следует из (1) для простой f . Общий случай получается стандартным предельным переходом (!!). □

10. Пусть f интегрируема и $E = \sum_k A_k$. Тогда

$$\int f d\mu = \sum_k \int_{A_k} f d\mu, \quad (2)$$

причём ряд в правой части сходится абсолютно.

¶ Для простой интегрируемой функции $f = \sum_n \lambda_n \chi_{B_n}$:

$$\begin{aligned} \sum_k \left| \int_{A_k} f d\mu \right| &= \sum_k \left| \sum_n \lambda_n \mu B_n A_k \right| \leq \sum_{k,n} |\lambda_n| \mu B_n A_k \leq \sum_n |\lambda_n| \sum_k \mu B_n A_k \\ &= \sum_n |\lambda_n| \mu B_n < +\infty. \end{aligned}$$

Это означает абсолютную сходимость ряда в правой части (2), а также ряда $\sum_{k,n} |\lambda_n| \mu B_n A_k$. Теперь

$$\int f d\mu = \sum_n \lambda_n \mu B_n = \sum_n \sum_k \lambda_n \mu B_n A_k = \sum_k \sum_n \lambda_n \mu B_n A_k = \sum_k \int_{A_k} f d\mu.$$

Если f — интегрируемая функция, то, по определению 4, для всякого $\varepsilon > 0$ существует простая интегрируемая функция g такая, что $\|f - g\|_E < \varepsilon$. По доказанному $\int g d\mu = \sum_k \int_{A_k} g d\mu$, причём ряд $\sum_k \int_{A_k} g d\mu$ сходится абсолютно. Из оценки

$$\sum_k \left| \int_{A_k} f d\mu \right| \leq \sum_k \left| \int_{A_k} (f - g) d\mu \right| + \sum_k \left| \int_{A_k} g d\mu \right| \leq \varepsilon \mu E + \sum_k \left| \int_{A_k} g d\mu \right|$$

следует, что ряд в правой части (2) сходится абсолютно. Итак,

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \sum_k \int_{A_k} f d\mu \right| &= \left| \int (f - g) d\mu + \sum_k \int_{A_k} g d\mu - \sum_k \int_{A_k} f d\mu \right| \\ &= \left| \int (f - g) d\mu + \sum_k \int_{A_k} (g - f) d\mu \right| \leq 2\|f - g\|_E \mu E < 2\varepsilon \mu E. \end{aligned}$$

Из произвольности ε получаем (2). \square

11. Если $|f| \leq \varphi$ и φ интегрируема, то f интегрируема.

¶ Если f и φ простые, то существует не более чем счётное разбиение $\{A_n\}$ множества E , что $f = \sum_n \lambda_n \chi_{A_n}$, $\varphi = \sum_n \xi_n \chi_{A_n}$, причём $|\lambda_n| \leq \xi_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда $\sum_n |\lambda_n| \mu A_n \leq \sum_n \xi_n \mu A_n < +\infty$, то есть f интегрируема. Читатель уже овладел стандартными приёмами, чтобы доказать утверждение в общем случае. \square

12. Следствие. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема $|f|$.

¶ Достаточность следует из п. 11. Необходимость в случае простой функции f следует непосредственно из определения 1. Общий случай получается предельным переходом. \square

13. З а м е ч а н и е. Утверждение п. 12 в части достаточности не верно для функций, интегрируемых по Риману: функция $\varphi = \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} - \chi_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ измерима, но, подобно функции Дирихле, не интегрируема по Риману. Между тем её модуль $|\varphi|$ ($\equiv 1$) интегрируем по Риману.

14. Если $\int |f| d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ н.в.

¶ Пусть $A_n = \{x \in E : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. Из неравенства $\mu A_n = \int_{A_n} 1 d\mu \leq n \int |f| d\mu = 0$ следует, что $\mu A_n = 0$. Отсюда $\mu\{x \in E : f(x) \neq 0\} = \mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu A_n = 0$. □

У п р а ж н е н и я. 15. Проинтегрируйте функцию $f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n 2^{-n}$ в условиях 202.10.

16. Докажите свойства пп. 5,6,10,11 для интегралов по множеству $A(\subset E)$.

17. Если f измерима и $\mu A = 0$, то f интегрируема по множеству A и $\int_A f d\mu = 0$.

18. Если f_1, \dots, f_n интегрируемы, то интегрируема $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$.

19. Какую структуру будет иметь интеграл Лебега по мере m в условиях 192.8? Опишите класс интегрируемых функций.

20. Если f интегрируема, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathfrak{A} (\mu A < \delta \Rightarrow |\int_A f d\mu| < \varepsilon)$.

§208. Предельный переход под знаком интеграла

Задача о предельном переходе под знаком интеграла эквивалентна задаче о почленном интегрировании сходящегося функционального ряда. В приложениях теории интеграла подобные задачи играют первостепенную роль.

1. Т е о р е м а [А. Лебег]. Пусть $f_n \rightarrow f$, $|f_n| \leq \varphi$, φ интегрируема. Тогда f интегрируема и $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

¶ Ясно, что $|f| \leq \varphi$ и, согласно 207.11, f интегрируема. Положим $A_k = \varphi^{-1}([k, +\infty))$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $E = A_0 \supset A_1 \supset \dots$, $\bigcap_k A_k = \emptyset$, так что $\mu A_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow +\infty$) (см.

197.13). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу 207.20 найдётся $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\int_{A_m} \varphi d\mu <$

ε . По теореме Егорова существует представление $A_m^c = Y + Z$, где $\mu Z < \frac{\varepsilon}{m}$, $f_n \Rightarrow f$ на множестве Y . В частности, найдётся n_0 такое, что $\|f - f_n\|_Y < \frac{\varepsilon}{\mu Y}$ ($n \geq n_0$).

Наконец, при $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| &= \left| \int_{A_m} f_n d\mu - \int_{A_m} f d\mu + \int_Z f_n d\mu - \int_Z f d\mu + \int_Y (f_n - f) d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_{A_m} f_n d\mu \right| + \left| \int_{A_m} f d\mu \right| + \left| \int_Z f_n d\mu \right| + \left| \int_Z f d\mu \right| + \left| \int_Y (f_n - f) d\mu \right| \\ &\leq 2 \int_{A_m} \varphi d\mu + 2 \int_Z \varphi d\mu + \varepsilon < 5\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε утверждение доказано. □

2. З а м е ч а н и е. Теорема п. 1 остаётся справедливой, если вместо поточечной сходимости предположить, что $f_n \xrightarrow{\text{П.В.}} f$. Действительно, в силу 207.17 значения, принимаемые функцией на множестве меры нуль, не влияют на величину интеграла.

3. С л е д с т в и е. Если $|f_n| \leq C$ ($n = 1, 2, \dots$) и $f_n \xrightarrow{\text{П.В.}} f$, то f интегрируема и $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

4. Т е о р е м а [Б. Леви]. Пусть $f_1 \leq f_2 \leq \dots$, f_n интегрируемы и $\int f_n d\mu \leq K$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда

(1) существует f такая, что $f_n \xrightarrow{\text{П.В.}} f$,

(2) f интегрируема и $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

¶ Можно считать, что $f_1 \geq 0$ (иначе рассмотрим $g_n = f_n - f_1$ ($n = 1, 2, \dots$)). Пусть $A_{nr} = \{x : f_n(x) > r\}$. Тогда $A = \{x \in E : f_n(x) \rightarrow +\infty\} = \bigcap_{r \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} A_{nr}$.

Имеем $\mu A_{nr} = \int_{A_{nr}} d\mu \leq \int_{A_{nr}} \frac{f_n}{r} d\mu \leq \frac{1}{r} \int f_n d\mu \leq \frac{K}{r}$. Так как $A_{1r} \subset A_{2r} \subset \dots$,

$A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_{nr}$, то $\mu A \leq \mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_{nr} \right) = \lim_n \mu(A_{nr}) \leq \frac{K}{r}$. Из произвольности r отсюда

$\mu A = 0$. Поэтому функция $f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x), & \text{если } x \in A^c, \\ 0, & \text{если } x \in A, \end{cases}$ отвечает требованию

(1). Определим теперь функцию $\varphi = \sum_{r=1}^{\infty} r \chi_{f^{-1}((r-1, r])}$. Ясно, что $f < \varphi \leq f + 1$.

Поэтому для проверки интегрируемости f достаточно показать интегрируемость φ , то есть сходимость ряда $\sum_r r \mu B_r$, где $B_r = \{x \in E : \varphi(x) = r\}$. Последнее следует из ограниченности частных сумм этого ряда (в силу ограниченности функции f на множестве $\sum_{r=1}^n B_r$ применима теорема п. 1):

$$\sum_{r=1}^N r \mu B_r = \int_{\sum_{r=1}^N B_r} \varphi d\mu \leq \int_{\sum_{r=1}^N B_r} f d\mu + \mu E = \lim_n \int_{\sum_{r=1}^N B_r} f_n d\mu + \mu E \leq K + \mu E.$$

Теперь утверждение (2) следует из теоремы п. 1. □

5. С л е д с т в и е. Пусть $\psi_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \int \psi_n d\mu < +\infty$. Тогда ряд $\sum_n \psi_n$ сходится п.в. и его можно интегрировать почленно: $\int (\sum_n \psi_n) d\mu = \sum_n \int \psi_n d\mu$.

¶ Это переформулировка п. 4 в терминах ряда: достаточно положить $f_n = \sum_{k=1}^n \psi_k$. □

6. Т е о р е м а [П. Фату]. Пусть $f_n \geq 0$, $f_n \xrightarrow{\text{П.В.}} f$, причём $\int f_n d\mu \leq K$. Тогда f интегрируема и $\int f d\mu \leq K$.

¶ Положим $\varphi_n(x) \equiv \inf_{k \geq n} f_k(x)$; φ_n измеримы, поскольку $\{x : \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geq n} \{x : f_k(x) < c\}$, $c \in \mathbb{R}$, и интегрируемы, поскольку $0 \leq \varphi_n \leq f_n$. При этом $\int \varphi_n d\mu \leq \int f_n d\mu \leq K$, $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$ и $\varphi_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. Требуемое следует теперь из п. 4, применённого к (φ_n) . \square

7. Пусть $E = \sum_n A_n$ и $\sum_n \int_{A_n} |f| d\mu < +\infty$. Тогда f интегрируема и

$$\int f d\mu = \sum_n \int_{A_n} f d\mu.$$

¶ Положим $\psi_n = |f| \chi_{A_n}$. Мы находимся в условиях п. 5 и, следовательно, функция $|f| = \sum_n \psi_n$ интегрируема. Из 207.12 следует интегрируемость f , а искомое равенство вытекает из 207.10. \square

Сопоставляя доказанное утверждение с 207.10, получаем:

8. Пусть $E = \sum_n A_n$. Функция f интегрируема тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_n \int_{A_n} |f| d\mu$.

У п р а ж н е н и я. 9. Построить последовательность функций $f_n \geq 0$ со свойствами: $\int f_n d\mu \rightarrow 0$, $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, f_n не сходится к 0 п.в.

10. Покажите, что $\int \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} d\mu \rightarrow 0$ тогда $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

§209. Замена переменной в интеграле Лебега

1. Будем говорить, что отображение $\varphi : E \rightarrow E$ измеримо, если $\varphi^{-1}(X) \in \mathfrak{A}$ всякий раз, когда $X \in \mathfrak{A}$. Если μ — мера на σ -алгебре \mathfrak{A} , то со всяким отображением φ множества E в себя можно связать естественным образом новую меру μ_φ , определённую на \mathfrak{A} равенством $\mu_\varphi(X) \equiv \mu(\varphi^{-1}(X))$ ($X \in \mathfrak{A}$).

¶ σ -аддитивность μ_φ следует из равенства (если заметить, что $\varphi^{-1}(X) \cap \varphi^{-1}(Y) = \varphi^{-1}(X \cap Y)$ всякий раз, когда $X \cap Y = \emptyset$):

$$\mu_\varphi\left(\sum_n X_n\right) = \mu\left(\varphi^{-1}\left(\sum_n X_n\right)\right) = \mu\left(\sum_n \varphi^{-1}(X_n)\right) = \sum_n \mu(\varphi^{-1}(X_n)) = \sum_n \mu_\varphi(X_n). \quad \square$$

2. Пусть отображение $\varphi : E \rightarrow E$ измеримо и $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая функция. Тогда справедливо равенство

$$\int f \circ \varphi d\mu = \int f d\mu_\varphi. \quad (1)$$

в том смысле, что если определена одна из его частей, то определена и другая (и они равны).

¶ Пусть сначала $f = \sum_n \lambda_n \chi_{A_n}$ — простая функция. Тогда $f \circ \varphi = \sum_n \lambda_n \chi_{\varphi^{-1}(A_n)}$, и если левая часть (1) определена, то $\int f \circ \varphi d\mu = \sum_n \lambda_n \mu(\varphi^{-1}(A_n)) = \sum_n \lambda_n \mu_\varphi(A_n) =$

$\int f d\mu_\varphi$ (при этом $\sum_n |\lambda_n| \mu_\varphi(A_n) = \sum_n |\lambda_n| \mu \varphi^{-1}(A_n) < +\infty$). Из (2) следует также, что если определена его правая часть, то определена и левая (и они равны).

Переходим к общему случаю. Пусть $f \circ \varphi$ интегрируема. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{m-1}{n}, & \text{если } \frac{m-1}{n} \leq f(x) < \frac{m}{n} \text{ и } f(x) \geq 0, \\ -\frac{m}{n}, & \text{если } \frac{m-1}{n} \leq f(x) < \frac{m}{n} \text{ и } f(x) < 0. \end{cases}$$

По построению $|f_n| \leq |f|$, так что $|(f_n \circ \varphi)(x)| \leq |(f \circ \varphi)(x)|$ ($x \in E$). Кроме того, $f_n \Rightarrow f$, а значит, $f_n \circ \varphi \Rightarrow f \circ \varphi$. Из 207.4 и равенства (1) для простых функций находим $\int f \circ \varphi d\mu = \lim_n \int f_n \circ \varphi d\mu = \lim_n \int f_n d\mu_\varphi = \int f d\mu_\varphi$. Отсюда же следует, что если f интегрируема по мере μ_φ , то $f \circ \varphi$ интегрируема по μ (и интегралы равны). \square

§210. Сравнение интегралов Римана и Лебега

1. Ограничимся случаем отрезка $E = [0, 1]$. Пусть f интегрируема по Риману. Тогда соответствующий интеграл можно представить как предел нижней или верхней суммы Дарбу:

$$(R) \int_0^1 f(x) dx = \lim_n \bar{S}_n = \lim_n \underline{S}_n, \text{ где } \bar{S}_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \Phi^{(nk)}, \quad \underline{S}_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \Phi_{(nk)},$$

$$\Phi^{(nk)} = \sup_{x \in \Delta_{nk}} f(x), \quad \Phi_{(nk)} = \inf_{x \in \Delta_{nk}} f(x),$$

$$\Delta_{nk} = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}], \quad k = 1, \dots, 2^n - 1, \quad \Delta_{n2^n} = [1 - 2^{-n}, 1].$$

Определим две последовательности простых функций

$$\bar{f}_n = \sum_{k=1}^{2^n} \Phi^{(nk)} \chi_{\Delta_{nk}}, \quad \underline{f}_n = \sum_{k=1}^{2^n} \Phi_{(nk)} \chi_{\Delta_{nk}};$$

при этом $\bar{f}_1 \geq \bar{f}_2 \geq \dots$, $\underline{f}_1 \leq \underline{f}_2 \leq \dots$. Если учесть, что f ограничена (будучи интегрируемой по Риману), то отсюда следует, что существуют функции \bar{f} и \underline{f} такие, что $\bar{f}_n \rightarrow \bar{f} \geq f$, $\underline{f}_n \Rightarrow \underline{f} \leq f$. Из определения 207.1 $\int \bar{f}_n d\mu = \bar{S}_n$, $\int \underline{f}_n d\mu = \underline{S}_n$ (здесь μ — линейная мера Лебега). В силу 208.4

$$\int \bar{f} d\mu = \lim_n \int \bar{f}_n d\mu = \lim_n \bar{S}_n = (R) \int_0^1 f(x) dx = \lim_n \underline{S}_n = \lim_n \int \underline{f}_n d\mu = \int \underline{f} d\mu.$$

Отсюда $\int |\bar{f} - \underline{f}| d\mu = \int (\bar{f} - \underline{f}) d\mu = 0$, то есть (см. 207.14) $\bar{f} = \underline{f} = f$ п.в. на $[0, 1]$. Таким образом, $\int f d\mu = \int \bar{f} d\mu = (R) \int_0^1 f(x) dx$. Сформулируем полученный результат.

2. Если f интегрируема на отрезке по Риману, то она интегрируема по Лебегу и соответствующие интегралы совпадают.

З а м е ч а н и я. 3. Неограниченные функции вообще не интегрируемы по Риману, но некоторые из них интегрируемы по Лебегу. Например,

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

не интегрируема по Риману. Однако, f интегрируема по Лебегу. Действительно, положим $f_n(x) = x^{-1/2} \chi_{[1/n^2, 1]}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$). Ясно, что $f_n \rightarrow f$ и по п. 2

$$\int f_n d\mu = (R) \int_0^1 f_n(x) dx = 2 - \frac{2}{n} \leq 2.$$

Остаётся воспользоваться теоремой Фату.

4. Если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (R) \int_{\varepsilon}^1 |f(x)| dx < +\infty$, то f интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$, причём $\int f d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (R) \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ (!!).

5. Если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (R) \int_{\varepsilon}^1 |f(x)| dx = +\infty$, то f не интегрируема по Лебегу, даже если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (R) \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ существует. (Положим $f_n = f \cdot \chi_{(1/n, 1]}$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда $|f_n| \leq |f|$, $|f_n| \xrightarrow{\text{п.в.}} |f|$. Если допустить, что f интегрируема по Лебегу, то в силу 207.12 $\int |f| d\mu < +\infty$; в частности, $(R) \int_{1/n}^1 |f(x)| dx = \int |f_n| d\mu \leq \int |f| d\mu$; однако, $(R) \int_{\varepsilon}^1 |f(x)| dx \rightarrow +\infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$).)

§211. Заряды

1. До сих пор при изучении интеграла основным объектом нашего внимания были интегрируемые функции. Область интегрирования фиксировалась (это было либо множество E , либо некоторое его измеримое подмножество X). Если, напротив, зафиксировать некоторую интегрируемую функцию f , то функция

$$\nu X \equiv \int_X f d\mu \quad (X \in \mathfrak{A}) \quad (1)$$

определена на \mathfrak{A} и согласно 207.10 σ -аддитивна: $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ влечёт $\nu X = \sum_{n=1}^{\infty} \nu X_n$. Отличие этой функции множества от меры состоит в том, что она не обязательно положительна.

2. Комплексная σ -аддитивная функция, определённая на σ -алгебре множеств, называется *зарядом*. Заряд, принимающий вещественные значения, называется *вещественным*. Заряд, определённый равенством (1), называется *неопределённым интегралом Лебега* функции f .

Для заряда $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$, где \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств множества E , введём вспомогательную функцию

$$\|\nu\|(A) \equiv \sup\{|\nu X| : X \subset A, X \in \mathfrak{A}\}.$$

Эта функция не может принимать несобственное значение $+\infty$:

3. Каждый заряд $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ограничен: $\|\nu\|(E) < +\infty$.

¶ Пусть, напротив, на некотором пространстве (E, \mathfrak{A}) существует неограниченный заряд $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$, то есть $\|\nu\|(E) = +\infty$. Построим тогда последовательность X_n попарно непересекающихся множеств из \mathfrak{A} таких, что $|\nu X_n| > 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Это немедленно приводит к противоречию, ибо для $X = \sum_n X_n$ следует, что $\nu X = \sum_n \nu X_n$; однако, ряд в правой части заведомо расходится (так как $|\nu X_n| > 1$). Начнём с того, что выберем $Y \in \mathfrak{A}$ так, чтобы $|\nu Y| > |\nu E| + 1$ (это возможно, так как $\|\nu\|(E) = +\infty$), и положим

$$X_1 = \begin{cases} Y^c, & \text{если } \|\nu\|(Y) = +\infty, \\ Y, & \text{если } \|\nu\|(Y) < +\infty. \end{cases}$$

(Отметим, что $\|\nu\|(Y) < +\infty \Rightarrow \|\nu\|(Y^c) = +\infty$.) Нетрудно видеть, что $|\nu X_1| > 1$, причём $\|\nu\|(X_1^c) = +\infty$. Пусть уже построены попарно непересекающиеся множества X_1, \dots, X_n такие, что $|\nu X_k| > 1$ ($k \in \mathbb{N}$) и $\|\nu\|((\sum_{k=1}^n X_k)^c) = +\infty$. Тогда существует $Y \subset (\sum_{k=1}^n X_k)^c$ такое, что $|\nu Y| > |\nu((\sum_{k=1}^n X_k)^c)| + 1$. Поэтому

$$|\nu((\sum_{k=1}^n X_k)^c \setminus Y)| = |\nu(\sum_{k=1}^n X_k)^c - \nu Y| \geq |\nu Y| - |\nu((\sum_{k=1}^n X_k)^c)| > 1,$$

и в качестве X_{n+1} можно взять множество

$$X_{n+1} = \begin{cases} (\sum_{k=1}^n X_k)^c \setminus Y, & \text{если } \|\nu\|(Y) = +\infty, \\ Y, & \text{если } \|\nu\|(Y) < +\infty. \end{cases}$$

Действительно, по построению X_1, \dots, X_{n+1} попарно не пересекаются, $|\nu X_{n+1}| > 1$ и $\|\nu\|((\sum_{k=1}^n X_k)^c) = +\infty$. \square

4. З а м е ч а н и е. Если $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ — заряд, то он однозначно представим в виде $\nu = \nu_1 + i\nu_2$, где ν_k ($k = 1, 2$) — вещественные заряды: $\nu_1 X \equiv \operatorname{Re} \nu X$, $\nu_2 X \equiv \operatorname{Im} \nu X$ ($X \in \mathfrak{A}$); функции ν_k ($k = 1, 2$) σ -аддитивны (!!). Таким образом, изучение комплексных зарядов сводится к изучению вещественных зарядов, и мы ограничимся изучением последних.

Следующее утверждение гласит, что каждый вещественный заряд “поляризуется” (это, кстати, оправдывает термин “заряд”). Чтобы его сформулировать, введём два класса множеств, связанных с зарядом ν :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_\nu^+ &\equiv \{X \in \mathfrak{A} : Z \subset X \Rightarrow \nu Z \geq 0\}, \\ \mathfrak{A}_\nu^- &\equiv \{X \in \mathfrak{A} : Z \subset X \Rightarrow \nu Z \leq 0\}. \end{aligned}$$

5. Т е о р е м а [Г. Хан]. Для каждого вещественного заряда ν найдётся множество $A \in \mathfrak{A}_\nu^-$ такое, что $A^c \in \mathfrak{A}_\nu^+$.

¶ Пусть $\alpha = \inf_{X \in \mathfrak{A}_\nu^-} \nu X$. В силу п. 3 $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $X_n \in \mathfrak{A}_\nu^-$ ($n \in \mathbb{N}$) таковы, что $\lim_n \nu X_n = \alpha$. Будем считать что $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ (иначе можно перейти к последовательности $\widetilde{X}_n = \bigcup_{k=1}^n X_k$ ($n \in \mathbb{N}$), которая этим свойством обладает: $\widetilde{X}_k \in \mathfrak{A}_\nu^-$, $\lim_n \nu \widetilde{X}_n = \alpha$, так как $\alpha \leq \nu \widetilde{X}_n \leq \nu X_n$, $\nu X_n \rightarrow \alpha$). Покажем, что $A = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ — искомое множество.

$$1) A \in \mathfrak{A}_\nu^- : X \subset A \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^\infty X X_n,$$

$$X X_1 \subset X X_2 \subset \dots, X X_n \subset X_n \in \mathfrak{A}_\nu^- \Rightarrow \nu X = \lim_n \nu X X_n \leq 0.$$

2) Покажем, что $A^c \in \mathfrak{A}_\nu^+$. Заметим сначала, что $\nu A = \alpha$ (ибо $\nu A = \lim_n \nu X_n = \alpha$). Если $A^c \notin \mathfrak{A}_\nu^+$, то $\exists Z_0 \subset A^c$ ($\nu Z_0 < 0$). Кроме того, $Z_0 \notin \mathfrak{A}_\nu^-$ (иначе $A + Z_0 \in \mathfrak{A}_\nu^-$ и $\nu(A + Z_0) < \alpha$, что противоречит определению α): поэтому $\exists Z \subset Z_0$ ($\nu Z < 0$). Пусть

$$k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : \exists Z_1 \subset Z_0 \ (\nu Z_1 \geq \frac{1}{k})\}.$$

Так как $\nu(Z_0 \setminus Z_1) = \nu Z_0 - \nu Z_1 \leq \nu Z_0 - \frac{1}{k_1} < 0$, то это же рассуждение применимо к $Z_0 \setminus Z_1$: существует $k_2 = \min\{k \in \mathbb{N} : \exists Z_2 \subset Z_0 \setminus Z_1 \ (\nu Z_2 \geq \frac{1}{k})\}$. Продолжая процесс, получим последовательность $Z_n \in \mathfrak{A}$ и

$$Z_0 = (Z_0 \setminus \sum_n Z_n) + Z_1 + Z_2 + \dots,$$

$$\nu Z_0 = \nu(Z_0 \setminus \sum_n Z_n) + \sum_n \nu Z_n \geq \sum_n \frac{1}{k_n} + K,$$

где $K = \nu(Z_0 \setminus \sum_n Z_n)$. Отсюда ряд $\sum_n \frac{1}{k_n}$ сходится и поэтому

$$\frac{1}{k_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что $Z^* \equiv (Z_0 \setminus \sum_n Z_n) \in \mathfrak{A}_\nu^-$ (действительно, иначе $\exists Z \subset Z^*$ ($\nu Z > 0$), и в силу (2) $\exists n \in \mathbb{N}$ ($\nu Z > \frac{1}{k_n - 1}$); с другой стороны, $Z \subset Z_0 \setminus \sum_{k=1}^{n-1} Z_k$, и по определению последовательности Z_n должно быть $\nu Z < \frac{1}{k_n - 1}$). При этом $\nu Z^* = \nu Z_0 - \sum_{n=1}^\infty \nu Z_n \leq \nu Z_0 < 0$; $Z^* \cap A = \emptyset$ и поэтому $Z^* + A \in \mathfrak{A}_\nu^-$, то есть $\nu(Z^* + A) = \nu Z^* + \alpha < \alpha$, что противоречит определению α . Итак, $A^c \in \mathfrak{A}_\nu^+$. \square

6. С л е д с т в и е. *Каждый вещественный заряд представим в виде разности двух мер.*

¶ Пусть $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ — заряд и $A \in \mathfrak{A}_\nu^-$ — множество в теореме Хана. Определим отображения $\mu^\pm : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ равенствами:

$$\mu^+ X \equiv \nu(X A^c), \quad \mu^- X \equiv -\nu(X A) \quad (X \in \mathfrak{A});$$

μ^\pm являются, очевидно, мерами. При этом $\nu X = \nu(XA^c) + \nu(XA) = \mu^+X - \mu^-X$ ($X \in \mathfrak{A}$), то есть $\nu = \mu^+ - \mu^-$. \square

7. У п р а ж н е н и е. Найдите множество A , отвечающее требованиям теоремы Хана для неопределённого интеграла Лебега (1).

8. Убедитесь, что для каждого заряда $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ корректно определена его *вариация*:

$$\|\nu\|_v \equiv \sup \sum_{i=1}^n |\nu(X_i)|, \quad \sum_{i=1}^n X_i = E, \quad X_i \in \mathfrak{A}$$

(верхняя грань берётся по всевозможным конечным разбиениям множества E). Покажите, что для вещественного заряда ν : $\|\nu\|_v = \mu^+(E) + \mu^-(E)$, где $\nu = \mu^+ - \mu^-$.

9. Покажите, что для неопределённого интеграла (1) с комплексной интегрируемой функцией f : $\|\nu\|_v = \int |f| d\mu$.

§212. Абсолютно непрерывные функции множества

1. По аналогии с 200.1 заряд $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *абсолютно непрерывным* относительно меры μ , заданной на той же σ -алгебре (обозначение $\nu \ll \mu$), если $\mu X = 0 \Rightarrow \nu X = 0$.

Свойство 207.9 означает, что неопределённый интеграл Лебега абсолютно непрерывен относительно соответствующей меры. Возникает вопрос, характеризует ли это свойство неопределённый интеграл? Положительный ответ даёт теорема Радона-Никодима (п. 3).

2. Л е м м а. Если μ и ν — меры, $0 \not\equiv \nu \ll \mu$, то существуют $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathfrak{A}_{\nu-\varepsilon\mu}^+$ такие, что $\mu A > 0$.

¶ Пусть $A_n \in \mathfrak{A}_{\nu-\frac{1}{n}\mu}^-$ — множества, удовлетворяющие условиям теоремы Хана для зарядов $\nu - \frac{1}{n}\mu$. Положим

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c. \quad (1)$$

$A_0^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow A_0^c \in \mathfrak{A}_{\nu-\frac{1}{n}\mu}^-$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 0 \leq \nu A_0^c \leq \frac{1}{n} \mu A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \nu A_0^c = 0 \Rightarrow \nu A_0 > 0$ (т. к. $\nu \not\equiv 0$) $\Rightarrow \mu A_0 > 0$ (т. к. $\nu \ll \mu$). Из (1) следует, что $\exists n$ ($\mu A_n^c > 0$), и осталось положить $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $A = A_n^c$. \square

3. Т е о р е м а [И. Радон, О. Никодим]. Пусть μ — мера на некоторой σ -алгебре \mathfrak{A} и вещественный заряд $\nu \ll \mu$. Тогда существует и определена однозначно (с точностью до эквивалентности) измеримая функция f такая, что

$$\nu X = \int_X f d\mu \quad (X \in \mathfrak{A}).$$

¶ Так как каждый вещественный заряд представим в виде разности мер (см. 211.6), можно считать, что ν — мера. Пусть

$$K = \{f \in M(E, \mathfrak{A}) : f \geq 0, \int_X f d\mu \leq \nu X \quad (X \in \mathfrak{A})\}.$$

Класс K не пуст (!!). Положим

$$\alpha = \sup_{f \in K} \int f d\mu, \quad (2)$$

и пусть последовательность $f_n \in K$ такова, что $\lim_n \int f_n d\mu = \alpha$. Положим $g_n(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ ($x \in E$), и пусть

$$X_1 = \{x \in X : g_n(x) = f_1(x)\}, \dots, X_n = \{x \in X : g_n(x) = f_n(x)\} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i\right).$$

Тогда $X = \sum_{k=1}^n X_k$ и, следовательно (см. 207.10),

$$\int_X g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{X_k} f_k d\mu \leq \sum_{k=1}^n \nu X_k = \nu X \quad (X \in \mathfrak{A}).$$

При этом $g_1 \leq g_2 \leq \dots$; положим $f_0(x) = \lim_n g_n(x) = \sup_n f_n(x)$. В силу 208.4 f_0 интегрируема и, следовательно, принадлежит K , причём $\alpha = \lim \int f_n d\mu = \int f_0 d\mu$. Покажем, что f_0 — искомая функция. Для этого достаточно установить, что

$$\nu_0 X \equiv \nu X - \int_X f_0 d\mu \equiv 0 \quad (X \in \mathfrak{A}).$$

По построению ν_0 — мера. Если, напротив, $\nu_0 \not\equiv 0$, то в силу п. 2 существуют $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathfrak{A}_{\nu_0 - \varepsilon \mu}^+$ такие, что $\mu A > 0$. В частности,

$$\varepsilon \mu(A X) \leq \nu_0(A X) = \nu(A X) - \int_{A X} f_0 d\mu \quad (X \in \mathfrak{A}). \quad (3)$$

Рассмотрим функцию $g = f_0 + \varepsilon \chi_A$; $g \in K$, так как из (3)

$$\int_X g d\mu = \int_X f_0 d\mu + \varepsilon \mu X A \leq \int_{X \setminus A} f_0 d\mu + \nu(A X) \leq \nu(X \setminus A) + \nu(A X) = \nu X \quad (X \in \mathfrak{A}).$$

С другой стороны, $\int g d\mu = \int f_0 d\mu + \varepsilon \mu A > \alpha$, что противоречит (2). Осталось проверить, что f_0 определена однозначно (с точностью до значений на множестве меры 0). В самом деле, пусть $\nu X = \int_X f_0 d\mu = \int_X f^* d\mu$ ($X \in \mathfrak{A}$). Тогда для функции

$$h = f_0 - f^* \text{ имеем: } \int_X h d\mu = 0 \quad (X \in \mathfrak{A}). \text{ Следовательно, } \int |h| d\mu = \int_{\{h \geq 0\}} h d\mu -$$

$$\int_{\{h < 0\}} h d\mu = 0 \text{ (здесь, например, } \{h \geq 0\} = \{x \in E : h(x) \geq 0\}). \text{ В силу 207.14 } h = 0$$

п.в., то есть $f_0 \sim f^*$. \square

Рассмотрим одно полезное приложение.

4. Пусть $\mu, \nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — меры. Тогда существует и определено однозначно представление $\nu = \nu_a + \nu_s$, где ν_a, ν_s — меры, причём $\nu_a \ll \mu$, а ν_s сингулярна относительно μ .

¶ Заметим, что $\nu \ll \mu + \nu$, и по теореме Радона-Никодима существует функция f такая, что

$$\nu X = \int_X f d\mu + \int_X f d\nu \quad (X \in \mathfrak{A}). \quad (4)$$

В силу упр. 8 (см. ниже) $0 \leq f \leq 1$ п. в. относительно $\nu + \mu$, а также относительно ν . Полагая $A = \{x : f(x) = 1\}$, получим из (4) $\nu A = \int_A d\mu + \int_A d\nu = \mu A + \nu A$, откуда $\mu A = 0$. Положим $\nu_s X \equiv \nu(XA)$, $\nu_a X \equiv \nu(XA^c)$ ($X \in \mathfrak{A}$). Тогда $\nu = \nu_a + \nu_s$, ν_s сингулярна относительно μ (ибо $\mu A = \nu_s A^c = 0$) и $\nu_a \ll \mu$:

$$\mu X = 0 \Rightarrow \nu(XA^c) = \int_{XA^c} f d\mu + \int_{XA^c} f d\nu = \int_{XA^c} f d\nu = \int_{\{0 \leq f < 1\}} f d\nu.$$

Если допустить, что $\nu(XA^c) > 0$, то найдётся n такое, что $\nu\{0 \leq f \leq 1 - \frac{1}{n}\} > 0$ и

$$\begin{aligned} \nu(XA^c) &= \int_{XA^c} f d\nu = \int_{X \cap \{0 \leq f \leq 1 - \frac{1}{n}\}} f d\nu + \int_{X \cap \{1 - \frac{1}{n} < f < 1\}} f d\nu \\ &\leq (1 - \frac{1}{n})\nu(\{0 \leq f \leq 1 - \frac{1}{n}\} \cap X) + \nu(\{1 - \frac{1}{n} < f < 1\} \cap X) \\ &< \nu(\{0 \leq f < 1\} \cap X) = \nu(XA^c) \end{aligned}$$

— противоречие. Итак, $\mu X = 0 \Rightarrow \nu_a X = \nu XA^c = 0$.

Проверим единственность полученного представления. Пусть имеются два разложения $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu'_a + \nu'_s$, $\nu_a \ll \mu$, $\nu'_a \ll \mu$, причём меры ν_s и ν'_s сингулярны относительно μ . По теореме Радона-Никодима существуют функции f_1 и f_2 такие, что $\nu_a X = \int_X f_1 d\mu$, $\nu'_a X = \int_X f_2 d\mu$ ($X \in \mathfrak{A}$). Положим $h(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$

($x \in E$). Тогда неопределённый интеграл $\nu'' X = \int_X h d\mu$ ($x \in \mathfrak{A}$) обладает свойствами:

ми: $\nu_a \leq \nu'' \leq \nu$. Левое неравенство очевидно, а правое следует из выкладки

$$\begin{aligned} \nu'' X &= \int_X h d\mu = \int_{X \cap \{h=f_1\}} f_1 d\mu + \int_{X \cap \{h=f_2 \neq f_1\}} f_2 d\mu \\ &= \nu_a(X \cap \{h=f_1\}) + \nu'_a(X \cap \{h=f_2 \neq f_1\}) \\ &\leq \nu(X \cap \{h=f_1\}) + \nu(X \cap \{h=f_2 \neq f_1\}) = \nu X. \end{aligned}$$

Обозначая через λ меру $\nu'' - \nu_a$ ($\lambda \ll \mu$), имеем представления $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu_a + \lambda + (\nu - \nu'')$. Отсюда $\nu_s = \lambda + (\nu - \nu'')$. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $\mu A = \nu_s A^c = 0$.

Тогда $\lambda \ll \mu \Rightarrow \lambda A = 0$, $\lambda A^c \leq \nu_s A^c \Rightarrow \lambda A^c = 0$, то есть $\lambda \equiv 0$; поэтому равенство $\lambda X = \int_X h d\mu - \int_X f_1 d\mu \equiv 0$ ($X \in \mathfrak{A}$) означает, что $h = \max\{f_1, f_2\} - f_1 = 0$ п.в., то есть $f_2 \leq f_1$ п.в. Аналогичные рассуждения приводят к неравенству $f_1 \leq f_2$ п.в., и значит, $\nu_a = \nu'_a$, а отсюда $\nu_s = \nu'_s$. \square

Полученный факт позволяет уточнить утверждение 199.4.

5. Пусть μ_F — мера на $\mathfrak{B}([0, 1])$, порождённая функцией F (см. 198.3), μ — линейная мера Лебега. Тогда существует и определено однозначно представление: $\mu_F = \mu_d + \mu_a + \mu_s$, где μ_d — дискретная компонента (199.3), $\mu_a \ll \mu$, а μ_s сингулярна относительно μ .

¶ Положим в п. 4 $\nu = \mu_c$, где μ_c — непрерывная компонента μ_F (см. 199.3), и возьмём в качестве μ линейную меру Лебега на $[0, 1]$. \square

6. З а м е ч а н и е. Согласно 200.3 существует абсолютно непрерывная неубывающая функция $\Phi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) такая, что $\mu_a = \mu_\Phi$. При этом по теореме Радона-Никодима существует интегрируемая функция $f(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) такая, что $\Phi(t) = \int_{[0, t]} f d\mu$ ($0 \leq t \leq 1$).

У п р а ж н е н и я. **7.** Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $a, b \in \mathbb{R}$, μ — мера на \mathfrak{A} . Определим заряд $\nu X = a\mu(AX) + b\mu(A^c X)$ ($X \in \mathfrak{A}$). Покажите, что $\nu \ll \mu$ и найдите функцию f , отвечающую требованиям теоремы Радона-Никодима.

8. Если $\mu, \nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — меры и $\nu \leq \mu$ (то есть $\nu X \leq \mu X$ ($x \in \mathfrak{A}$)), то ν — неопределённый интеграл Лебега некоторой функции f , причём $0 \leq f \leq 1$ п.в. относительно μ (и относительно ν).

§213. Произведение мер

1. Пусть $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_n$ — семейства подмножеств соответственно множеств E_1, \dots, E_n . Произведением этих семейств $\prod_{k=1}^n \mathfrak{C}_k = \mathfrak{C}_1 \times \dots \times \mathfrak{C}_n$ назовём семейство подмножеств множества $\prod_{k=1}^n E_k$, представимых в виде $Y_1 \times \dots \times Y_n$ ($Y_k \in \mathfrak{C}_k$).

2. Если $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ — полукольца в E_1, \dots, E_n соответственно, то $\prod_{k=1}^n \mathfrak{S}_k$ — полукольцо в $\prod_{k=1}^n E_k$.

¶ Приведём доказательство для $n = 2$. Пусть $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ и $X, Y \in \mathfrak{S}$, то есть

$$X = X_1 \times X_2, \quad Y = Y_1 \times Y_2 \quad (X_k, Y_k \in \mathfrak{S}_k, \quad k = 1, 2). \quad (1)$$

Тогда $XY = X_1 Y_1 \times X_2 Y_2$, причём в силу (П₁) (см. 191.1) $X_k Y_k \in \mathfrak{S}_k$ ($k = 1, 2$), то есть (П₁) выполнено для \mathfrak{S} . Пусть в обозначениях (1) $X \subset Y$. Это означает, в частности, что $X_1 \subset Y_1, X_2 \subset Y_2$ и так как \mathfrak{S}_k — полукольца, имеем

$$Y_1 = X_1 + \sum_{j=1}^s X_{1j}, \quad Y_2 = X_2 + \sum_{i=1}^t X_{2i}, \quad X_{km} \in \mathfrak{S}_k \quad (k = 1, 2).$$

Поэтому, $Y = (X_1 + \sum_j X_{1j}) \times (X_2 + \sum_i X_{2i}) = X + \sum_j Z_j + \sum_i Z'_j + \sum_{i,j} Z_{ji}$, где $Z_j = X_{1j} \times X_2$ ($j = 1, \dots, s$), $Z'_j = X_1 \times X_{2i}$ ($i = 1, \dots, t$), $Z_{ji} = X_{1j} \times X_{2i}$, что означает справедливость (Π_2) для \mathfrak{S} . \square

3. З а м е ч а н и е. Если \mathfrak{S}_1 и \mathfrak{S}_2 — кольца множеств, то $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ не является, вообще говоря, кольцом (см. ниже упр. 6).

4. Пусть m_k — меры (конечно-аддитивные меры) на полукольцах \mathfrak{S}_k ($k = 1, \dots, n$). Тогда равенство

$$m(X_1 \times \dots \times X_n) \equiv m_1 X_1 \cdot m_2 X_2 \cdot \dots \cdot m_n X_n \quad (X_k \in \mathfrak{S}_k) \quad (2)$$

определяет меру (соответственно конечно-аддитивную меру) m на $\prod_{k=1}^n \mathfrak{S}_k$.

¶ Приведём доказательство для случая $n = 2$. Пусть

$$X = X_1 \times X_2 = \sum_i X^{(i)}, \quad X^{(i)} = X_1^{(i)} \times X_2^{(i)} \quad (i = 1, \dots, N), \quad X_k^{(i)} \in \mathfrak{S}_k \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

В силу 191.8 существуют конечные разбиения $\{Y_1^{(j)}\}$, $\{Y_2^{(k)}\}$ соответственно множеств X_1 и X_2 такие, что $X_1^{(i)}$ являются объединением некоторых $Y_1^{(j)}$, а $X_2^{(i)}$ — объединением некоторых $Y_2^{(k)}$. Аддитивность m следует из равенств

$$mX = m_1 X_1 \cdot m_2 X_2 = \sum_{j,k} m_1 Y_1^{(j)} m_2 Y_2^{(k)} = \sum_i m_1 X_1^{(i)} m_2 X_2^{(i)} = \sum_i mX^{(i)}.$$

Пусть m_1, m_2 σ -аддитивны и μ_1 — лебеговское продолжение m_1 , а индекс i в (3) пробегает счётное множество. Определим $f_i : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами $f_i = m_2 X_2^{(i)} \chi_{X_1^{(i)}}$ ($i \in \mathbb{N}$). Тогда $\sum_i f_i(x) = \sum_i m_2 X_2^{(i)} \cdot \chi_{X_1^{(i)}}(x) = \sum_{\{i: x \in X_1^{(i)}\}} m_2 X_2^{(i)} = m_2 X_2 \chi_{X_1}(x) \quad (x \in E_1)$.

Из оценки

$$\sum_i \int_{X_1} f_i d\mu_1 = \sum_i m_2 X_2^{(i)} m_1 X_1^{(i)} = \sum_i mX^{(i)} \leq mX < +\infty$$

и 208.5 имеем, наконец,

$$\sum_i mX^{(i)} = \sum_i \int_{X_1} f_i d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\sum_i f_i \right) d\mu_1 = m_2 X_2 \cdot \int_{X_1} d\mu_1 = m_2 X_2 \cdot m_1 X_1 = mX. \quad \square$$

5. Лебеговское продолжение μ меры m , определённой равенством (2), называется *произведением мер* m_1, \dots, m_n и обозначается $m_1 \times \dots \times m_n$.

Это определение корректно в силу п. 4. В частности, если μ — линейная мера Лебега, то плоская мера Лебега совпадает с произведением $\mu \times \mu$.

У п р а ж н е н и я. 6. Пусть \mathfrak{S} — алгебра конечных объединений промежутков вида $[a, b)$ ($0 \leq a < b \leq 1$) в множестве $E = [0, 1)$. Покажите, что $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ не является алгеброй в $E \times E$.

7. Пусть \mathfrak{S}_n — полукольца с 1 в множествах E_n ($n \in \mathbb{N}$). Тогда семейство \mathfrak{S} частей X множества $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$, представимых в виде $X = Y_1 \times Y_2 \times \dots$ ($Y_n \in \mathfrak{S}_n$ и $Y_n \neq E_n$ лишь для конечного множества индексов n) — полукольцо в $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ (оно обозначается $\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n$). Если m_n — меры на \mathfrak{S}_n , причём $m_n E_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), то равенство

$$mX = m_1 Y_1 \cdot m_2 Y_2 \cdot \dots \quad (X = Y_1 \times Y_2 \times \dots) \quad (4)$$

определяет меру на \mathfrak{S} .

8. Пусть $2 = \{0, 1\}$ (см. 101.11). Тогда множество Ω в упр. 191.9 представимо в виде $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ ($\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = 2$), а полукольцо \mathfrak{Z} в Ω представимо в виде $\mathfrak{Z} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}(2)$. При этом мера m (см. 192.9) определяется формулой (4), в которой $m_1 = m_2 = \dots = m_0$, а m_0 — мера на $\mathfrak{P}(2)$, заданная равенствами $m_0 \emptyset = 0$, $m_0 \{0\} = m_0 \{1\} = \frac{1}{2}$.

§214. Теорема Фубини

Естественно выяснить, не упрощаются ли задачи мероопределения и интегрирования в случае, когда исходная мера является произведением нескольких других мер, операции с которыми более просты? Как известно, в силу связи кратного интеграла Римана с повторным задача нахождения площади *плоской* фигуры сводится к задаче интегрирования некоторой функции по *линейной* мере (см. §123). Мы получим лебеговский аналог указанного результата.

1. Будем предполагать, что меры ν, λ определены на некоторых σ -алгебрах $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ в множествах E_1 и E_2 соответственно; пусть далее $\mu = \nu \times \lambda$. В дальнейшем $L = L(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2, \mu)$ — класс измеримых по Лебегу относительно меры μ множеств из $E = E_1 \times E_2$. Введём также обозначения для сечений множеств из E ; для $A \subset E$:

$$A_{(x)} = \{y \in E_2 : (x, y) \in A\}, \quad A^{(y)} = \{x \in E_1 : (x, y) \in A\}.$$

Нашей целью является доказательство теоремы, связывающей интегрирование по произведению мер с повторным интегрированием по мерам-сомножителям.

2. Т е о р е м а [Г. Фубини]. Пусть в обозначениях п. 1 функция $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема относительно $\nu \times \lambda$. Тогда

$$\int f d(\nu \times \lambda) = \int \left(\int f d\lambda \right) d\nu = \int \left(\int f d\nu \right) d\lambda.$$

В частности, теорема утверждает, что интегралы $\int f d\lambda$ и $\int f d\nu$ определены как интегрируемые функции на множествах E_1 и E_2 соответственно.

3. Л е м м а. Пусть $A \in L$. Тогда существует множество B , представимое в виде $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ — последовательность множеств, каждое

из которых в свою очередь представимо в виде $B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$, где $B_{n1} \subset B_{n2} \subset \dots$, $B_{nk} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)$ (в соответствии с принятыми обозначениями $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)$ — алгебра множеств, порождённая полукольцом $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$). При этом

$$B \supset A, \quad \mu A = \mu B. \quad (1)$$

¶ По определению класса L для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует покрытие $\{X_{nr}\}_r \subset \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ множества A такое, что

$$\mu\left(\bigcup_r X_{nr}\right) < \mu A + \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Положим $B_n = \bigcap_{k=1}^n \left(\bigcup_r X_{kr}\right) = \bigcup_{r_1, \dots, r_n} (X_{1r_1} \cap \dots \cap X_{nr_n}) = \bigcup_s Y_{sn}$, где $Y_{sn} = X_{1r_1} \cap \dots \cap X_{nr_n} \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, а индексом s перенумерованы наборы (r_1, \dots, r_n) . Осталось положить $B_{nk} = \bigcup_{s=1}^k Y_{sn}$. Действительно, по построению $B \supset A$, а значит, $\mu B \geq \mu A$. Обратно, в силу (2) $\mu B \leq \mu\left(\bigcup_r X_{nr}\right) < \mu A + \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \mu B = \mu A$. \square

4. Доказательство теоремы Фубини проведём в два этапа: сначала (п. 5) установим её справедливость для характеристических функций $f = \chi_A$ ($A \in L$). В соответствии с п. 1 рассмотрим две функции $\lambda A_{(\cdot)} : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu A^{(\cdot)} : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ (например, $\lambda A_{(x)}$ — λ -мера сечения $A_{(x)}$ ($x \in E_1$) множества A); эти функции корректно определены, разумеется, лишь если $A_{(x)} \in \mathfrak{A}_2$, $A^{(y)} \in \mathfrak{A}_1$.

5. Для всякого $A \in L$ функции $\lambda A_{(\cdot)}$, $\nu A^{(\cdot)}$ корректно определены, причём $\mu A = \int \lambda A_{(\cdot)} d\nu = \int \nu A^{(\cdot)} d\lambda$.

¶ 1-й случай: $A = X \times Y$, $X \in \mathfrak{A}_1$, $Y \in \mathfrak{A}_2$. В этом случае $\lambda A_{(\cdot)} = \lambda Y \cdot \chi_X$ (и, в частности, корректно определена); согласно (2) §213

$$\mu A = \nu X \cdot \lambda Y = \int_X \lambda Y d\nu = \int \lambda A_{(\cdot)} d\nu.$$

2-й случай: $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)$, то есть $A = \sum_{i=1}^n A_i$, $A_i \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. В этом случае $A_{(\cdot)} = \sum_i A_{i(\cdot)}$ и, следовательно,

$$\mu A = \sum_i \mu A_i = \sum_i \int \lambda A_{i(\cdot)} d\nu = \int \left(\sum_i \lambda A_{i(\cdot)}\right) d\nu = \int \lambda A_{(\cdot)} d\nu.$$

3-й случай (общий): $A \in L$. Пусть семейства $(B_{nk})_{n,k}$ и (B_n) удовлетворяют условиям п. 3. Поскольку $B_{n1} \subset B_{n2} \subset \dots$,

$$\lambda B_{n1(\cdot)} \leq \lambda B_{n2(\cdot)} \leq \dots, \quad \lambda B_{nk(\cdot)} \rightarrow \lambda B_{n(\cdot)} \quad (k \rightarrow \infty),$$

где $B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, то есть $\lambda B_{1(\cdot)} \geq \lambda B_{2(\cdot)} \geq \dots$, $\lambda B_{n(\cdot)} \rightarrow \lambda B_{(\cdot)}$. В силу 197.13 и теоремы Леви получаем

$$\mu B = \lim_n \lim_k \mu B_{nk} = \lim_n \lim_k \int \lambda B_{nk(\cdot)} d\nu = \lim_n \int \lambda B_{n(\cdot)} d\nu = \int \lambda B_{(\cdot)} d\nu.$$

Пусть теперь $\mu A = 0$. Тогда $\mu B = 0$ и согласно 207.14 $\lambda B_{(\cdot)} = 0$ п. в. (относительно ν). С другой стороны, $A_{(x)} \subset B_{(x)}$ ($x \in E_1$) и в силу полноты меры $\lambda : A_{(\cdot)} \in \mathfrak{A}_2$ и $\lambda A_{(\cdot)} = 0$ п. в. (относительно ν). Поэтому $\mu A = 0 = \int \lambda A_{(\cdot)} d\nu$. Итак, разобран случай $\mu A = 0$. Если $\mu A \neq 0$, представим A в виде $A = B \setminus C$, где B определено выше, а $\mu C = 0$ (согласно (1)). Доказательство завершает выкладка:

$$\begin{aligned} \mu A &= \mu B - \mu C = \int \lambda B_{(\cdot)} d\nu - \int \lambda C_{(\cdot)} d\nu = \int \lambda (B_{(\cdot)} \setminus C_{(\cdot)}) d\nu \\ &= \int \lambda ((B \setminus C)_{(\cdot)}) d\nu = \int \lambda A_{(\cdot)} d\nu. \quad \square \end{aligned}$$

6. [Доказательство теоремы Фубини]. Из представления $f = f^+ - f^-$, где $f^\pm = \frac{|f| \pm f}{2}$, можно считать, что $f \geq 0$. Кроме того, достаточно доказать 1-ое равенство в п. 2. Если $f = \chi_A$ ($A \in L$), то утверждение доказано в п. 5:

$$\int \chi_A d(\nu \times \lambda) = \mu A = \int \lambda A_{(\cdot)} d\nu = \int \left(\int \chi_A d\lambda \right) d\nu.$$

Пусть $f = \sum_j \xi_j \chi_{A_j}$ ($\xi_j \geq 0$) — простая интегрируемая (по мере μ) функция (то есть $\sum_j \xi_j \mu A_j < +\infty$). Тогда

$$\int f d(\nu \times \lambda) = \sum_j \xi_j \mu A_j = \sum_j \int \left[\int \xi_j \chi_{A_j} d\lambda \right] d\nu = \sum_j \int \psi_j d\nu, \quad (3)$$

где $\psi_j \equiv \int \xi_j \chi_{A_j} d\lambda$ (≥ 0) интегрируемы по мере ν , и ряд $\sum \int \psi_j d\nu$ сходится. В силу 208.5

$$\sum_j \int \psi_j d\nu = \int \left[\sum_j \int \xi_j \chi_{A_j} d\lambda \right] d\nu. \quad (4)$$

Функции $\xi_j \chi_{A_j}(x, \cdot) : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($x \in E_1$) интегрируемы по мере λ , и ряд из интегралов сходится. Снова в силу 208.5

$$\int \left(\sum_j \int \xi_j \chi_{A_j} d\lambda \right) d\nu = \int \left(\int \left(\sum_j \xi_j \chi_{A_j} \right) d\lambda \right) d\nu = \int \left(\int f d\lambda \right) d\nu. \quad (5)$$

Сопоставляя (3) – (5), заключаем, что теорема Фубини справедлива для простых интегрируемых функций.

Пусть, наконец, $f \geq 0$ — произвольная интегрируемая (по мере $\nu \times \lambda$) функция и последовательность f_n интегрируемых простых функций такая, что $f_n \Rightarrow f$, $f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Тогда

$$\int f d(\nu \times \lambda) = \lim_n \int f_n d(\nu \times \lambda) = \lim_n \int \left(\int f_n d\lambda \right) d\nu.$$

Функции $\varphi_n \equiv \int f_n d\lambda$ ($n \in \mathbb{N}$) удовлетворяют условиям теоремы Леви (см. 208.4).

Следовательно, $\lim_n \int \left(\int f_n d\lambda \right) d\nu = \int \left(\lim_n \int f_n d\lambda \right) d\nu = \int \left(\int f d\lambda \right) d\nu$.

§215. Интеграл по σ -конечной мере

1. Пусть $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ — полная σ -конечная мера на σ -алгебре \mathfrak{A} в множестве E . Класс $\mathfrak{R} \equiv \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) < +\infty\}$ является тогда σ -кольцом в E (см. 193.5). Введём вещественное векторное пространство K конечно-значных простых функций, то есть функций вида

$$f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{A_j} \quad (A_j \in \mathfrak{R}, A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)). \quad (1)$$

2. Интегралом функции $f \in K$ вида (1) по мере μ называется величина $\int f d\mu \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu A_j$. Интеграл от функции $f \in K$ по множеству $X \in \mathfrak{A}$ определяется равенством $\int_X f d\mu \equiv \int f \cdot \chi_X d\mu$ (этот последний интеграл корректно определён (!!)).

На классе K справедливы следующие свойства (!!):

$$3. \int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

$$4. f \leq g \text{ п. в.} \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu,$$

$$5. \int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu,$$

$$6. \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

7. Введём норму на векторном пространстве $K : \|f\|_1 \equiv \int |f| d\mu$ (эквивалентные функции отождествляются).

Чтобы определить интеграл на классе измеримых функций, нам понадобится следующая лемма:

8. Пусть последовательность $f_n \in K$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|_1$. Тогда

$$(a) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall X \in \mathfrak{R} \left(\mu X < \delta \Rightarrow \left| \int_X f_n d\mu \right| < \varepsilon \ (n \in \mathbb{N}) \right),$$

$$(6) \quad \nu X \equiv \lim_n \int_X f_n d\mu \ (X \in \mathfrak{A}) \text{ — заряд на } \sigma\text{-алгебре } \mathfrak{A}.$$

¶ Для произвольного $\varepsilon > 0 : \exists N \forall n, m \geq N (\|f_n - f_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2})$. Далее,

$$\exists \delta > 0 \ (\mu X < \delta \Rightarrow \left| \int_X f_n d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2} \ (n = 1, \dots, N)) (!!).$$

Так что (a) выполняется для $n \leq N$. Если $n > N$, то

$$\left| \int_X f_n d\mu \right| \leq \left| \int_X (f_n - f_N) d\mu \right| + \left| \int_X f_N d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f_N| d\mu + \left| \int_X f_N d\mu \right| < \varepsilon.$$

(б). Во-первых, νX определено для любого $X \in \mathfrak{A}$:

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f_m d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f_m| d\mu \leq \int_X |f_n - f_m| d\mu = \|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Далее, если $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ ($X, X_k \in \mathfrak{A}$), то

$$|\nu X - \sum_{k=1}^N \nu X_k| \leq |\nu X - \int_X f_n d\mu| + \left| \int_X f_n d\mu - \sum_{k=1}^N \int_{X_k} f_n d\mu \right| + \left| \int_{\sum_{k=1}^N X_k} f_n d\mu - \nu \left(\sum_{k=1}^N X_k \right) \right|.$$

1-е и 3-е слагаемые в правой части можно сделать сколь угодно малыми при больших n . Теперь, для большого, но фиксированного n , можно выбрать N столь большим, что 2-е слагаемое также будет сколь угодно малым. Итак, $\nu X = \sum_{k=1}^{\infty} \nu X_k$. \square

9. Измеримую функцию f назовем *интегрируемой относительно σ -конечной меры μ* , если существует последовательность $f_n \in K$, фундаментальная по норме $\|\cdot\|_1$, такая, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$. При этом $\int f d\mu \equiv \lim_n \int f_n d\mu$.

10. В условиях п. 9 интеграл корректно определён, то есть

- 1) $\lim_n \int f_n d\mu$ существует и не зависит от выбора последовательности f_n ,
- 2) для конечной меры данное определение согласуется с определением 207.4.

¶ Предел $\lim_n \int f_n d\mu$ существует в силу п. 8(б). Пусть $g_n \in K$ — ещё одна $\|\cdot\|_1$ -фундаментальная последовательность, $g_n \xrightarrow{\mu} f$. Тогда $h_n \equiv f_n - g_n \xrightarrow{\mu} 0$ и h_n $\|\cdot\|_1$ -фундаментальна. Нужно лишь установить, что $\int h_n d\mu \rightarrow 0$. Определим заряд ζ равенством

$$\zeta X \equiv \lim_n \int_X h_n d\mu \quad (X \in \mathfrak{A}).$$

Зафиксируем $X \in \mathfrak{R}$; для $\varepsilon > 0$ пусть $\delta > 0$ таково, что $\mu Y < \delta \Rightarrow \left| \int_Y h_n d\mu \right| < \varepsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) (см. п. 8(а)). Выберем N столь большим, что при $n \geq N$ $\mu\{x : |h_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{\mu X}\} < \delta$. Тогда

$$\left| \int_X h_n d\mu \right| \leq \left| \int_{XZ} h_n d\mu \right| + \int_{X \setminus Z} |h_n| d\mu,$$

где $Z = \{x : |h_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{\mu X}\}$. Отсюда $\left| \int_X h_n d\mu \right| \leq \varepsilon + \int_{X \setminus Z} \frac{\varepsilon}{\mu X} d\mu \leq 2\varepsilon$. Таким

образом, $\zeta X = 0$ для любого $X \in \mathfrak{R}$. Если взять представление $E = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ ($X_n \in \mathfrak{R}$), получим $\lim_n \int h_n d\mu = \zeta E = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta X_n = 0$.

2). Пусть μ конечна и f интегрируема в смысле 207.4. Положим

$$f_n = \sum_{m=-n^2}^{n^2} \frac{m}{n} \cdot \chi_{f^{-1}((\frac{m-1}{n}, \frac{m+1}{n}))} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Тогда $f_n \in K$, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \| \cdot \|_1$ -фундаментальна, то есть f интегрируема в смысле п. 9.

Обратно, пусть f интегрируема в смысле п. 9 и $f_n - \| \cdot \|_1$ -фундаментальна в K и такая, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\eta_k > 0$ таковы, что $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \varepsilon$. В силу 206.4 и 205.4 найдётся подпоследовательность (f_{n_k}) и последовательность попарно непересекающихся множеств $X_k \subset E$ таких, что

$$|(f_{n_k} - f)\chi_{X_k}| < \eta_k, \quad \mu((\sum_{j=1}^k X_j)^c) < \eta_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Тогда $A \equiv (\sum_{j=1}^{\infty} X_j)^c$ — множество меры 0 и, заменяя f на эквивалентную функцию $f \cdot \chi_{A^c}$, можно считать, что $f\chi_A = 0$. Полагая $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k} \chi_{X_k}$, получаем, что g — простая функция,

$$\sup_{x \in E} |f(x) - g(x)| = \sup_k \sup_{x \in X_k} |f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \sup_k \eta_k < \varepsilon.$$

В силу 208.7 интегрируемость g следует из оценки

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} |g| d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} |f_{n_k}| d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} |f_{n_k} - f_n| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} |f| d\mu \\ &\leq \mu E \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k + \int |f| d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

11. П р и м е р. Рассмотрим на σ -алгебре $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ всех подмножеств \mathbb{N} “считывающую” меру: $\mu X = \text{Card } X$ (число элементов множества X). Тогда μ — σ -конечная мера, а всякая функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима. Покажите, что $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится абсолютно. При этом $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

12. У п р а ж н е н и е. Восполните пробел в доказательстве п. 10: докажите, что для конечной меры μ совпадают величины интегралов в смысле определений п. 9 и 207.4.

ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§216. Пополнение метрического пространства

1. Метрические пространства (M, d) и (M', d') (см. 92.1) называются *изометрически изоморфными*, если существует биекция $j : M \rightarrow M'$ такая, что $d'(j(x), j(y)) = d(x, y)$ ($x, y \in M$). Указанная биекция j называется *изометрией* пространства M на пространство M' .

2. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Полное метрическое пространство (\mathfrak{M}, δ) (см. 92.10) называется *пополнением* (M, d) , если M изометрически изоморфно плотной части пространства \mathfrak{M} .

3. Т е о р е м а. Каждое метрическое пространство обладает пополнением, которое единственно с точностью до изометрии.

¶ Единственность. Пусть (\mathfrak{M}, δ) , (\mathfrak{N}, Δ) — два пополнения метрического пространства (M, d) , $j : M \rightarrow \mathfrak{M}$, $J : M \rightarrow \mathfrak{N}$ — изометрии M на плотные части пространств \mathfrak{M} и \mathfrak{N} . Определим отображение $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ следующим образом: для каждой точки $\xi \in \mathfrak{M}$ возьмём какую-нибудь последовательность $j(x_n)$, сходящуюся к ξ , и положим

$$f(\xi) \equiv \lim_n J(x_n). \quad (1)$$

Отображение f корректно задано: во-первых, предел в правой части (1) существует, так как $J(x_n)$ фундаментальна (действительно, $\Delta(J(x_n), J(x_m)) = d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$)), во-вторых, этот предел не зависит от выбора (x_n) : если (x'_n) — ещё одна последовательность такая, что $j(x'_n) \rightarrow \xi$, то $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ и поэтому $\Delta(J(x_n), J(x'_n)) = d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$. Покажем, что f — изометрия. Пусть $j(x_n) \rightarrow \xi$, $j(y_n) \rightarrow \eta$ ($\xi, \eta \in \mathfrak{M}$ — произвольны). Тогда

$$\Delta(f(\xi), f(\eta)) = \lim_n \Delta(J(x_n), J(y_n)) = \lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n \delta(j(x_n), j(y_n)) = \delta(\xi, \eta),$$

то есть f сохраняет расстояние. Отсюда следует, что f — инъекция. Покажем, наконец, что f — сюръекция. Пусть $\Xi \in \mathfrak{N}$ — произволен и $J(x_n) \rightarrow \Xi$ ($x_n \in M$). Тогда $j(x_n)$ — фундаментальна и, следовательно, существует $\xi \in \mathfrak{M}$ такое, что $j(x_n) \rightarrow \xi$. В силу (1) отсюда следует, что $f(\xi) = \Xi$.

СУЩЕСТВОВАНИЕ. Пусть Φ — множество всех фундаментальных последовательностей (x_n) в пространстве M . Введём в Φ отношение эквивалентности $\rho : \rho((x_n), (y_n))$, если $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Возьмём в качестве \mathfrak{M} множество смежных классов (фактор-множество) Φ/ρ . Для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{M}$ положим

$$\delta(\xi, \eta) \equiv \lim_n d(x_n, y_n), \text{ где } (x_n) \in \xi, (y_n) \in \eta. \quad (2)$$

Определение δ корректно: во-первых, предел в (2) существует, так как последовательность $(d(x_n, y_n))$ фундаментальна:

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty);$$

(мы использовали неравенство: $|d(a, b) - d(c, e)| \leq d(a, c) + d(b, e)$). Во-вторых, этот предел не зависит от выбора последовательностей (x_n) , (y_n) : если $(x'_n) \in \xi$, $(y'_n) \in \eta$

— другие фундаментальные последовательности, то

$$|d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0,$$

из чего и следует требуемое.

Осталось проверить, что (i) δ — метрика в \mathfrak{M} , (ii) существует изометрия j пространства M на плотную часть \mathfrak{M} , (iii) \mathfrak{M} — полное метрическое пространство.

Проверка (i) тривиальна (!!). Чтобы проверить (ii), положим $j(x) \equiv \xi$, где $\xi \in \mathfrak{M}$ такое, что $\{x, x, \dots\} \in \xi$. Тогда

$$\delta(j(x), j(y)) = d(x, y) \quad (x, y \in M),$$

причём $j(M)$ плотно в \mathfrak{M} (для $\xi \in \mathfrak{M}$ выберем $(x_n) \in \xi$ и заметим, что $j(x_n) \rightarrow \xi$ по метрике δ).

Проверим, наконец, полноту \mathfrak{M} . Пусть $(\xi^{(n)})$ — фундаментальная последовательность в \mathfrak{M} и пусть $x_n \in M$ такие, что $\delta(\xi^{(n)}, j(x_n)) < 1/n$. Тогда (x_n) — фундаментальна в M (это следует из оценки:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \delta(j(x_n), j(x_m)) \leq \delta(j(x_n), \xi^{(n)}) + \delta(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}) + \delta(\xi^{(m)}, j(x_m)) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \delta(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Поэтому существует $\xi \in \mathfrak{M}$ такое, что $(x_n) \in \xi$. При этом $\xi^{(n)} \rightarrow \xi$ по метрике δ :

$$\delta(\xi, \xi^{(n)}) \leq \delta(\xi, j(x_n)) + \delta(j(x_n), \xi^{(n)}) < \lim_k d(x_k, x_n) + \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad \square$$

4. П р и м е р. Пополнение интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ можно отождествить с отрезком $[a, b]$.

§217. Свойства полных метрических пространств

1. Т е о р е м а [о вложенных шарах]. В полном метрическом пространстве всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, обладает общей точкой.

¶ Дано (см. 92.2): $B_{r_1}[x_1] \supset B_{r_2}[x_2] \supset \dots; r_n \rightarrow 0$. Требуется доказать, что $\exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{r_k}[x_k]$.

Последовательность (x_n) — фундаментальна (так как $x_{n+p} \in B_{r_n}[x_n], d(x_n, x_{n+p}) \leq r_n \rightarrow 0$). Пусть $x = \lim x_n$; x — искомая точка: действительно,

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n+p}) + d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x, x_{n+p}) + r_n;$$

переходя к пределу по p , получим $d(x, x_n) \leq r_n$, откуда $x \in B_{r_n}[x_n]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. \square

2. Множество S в метрическом пространстве называется *нигде не плотным* (ср. 95.5), если $S^{-\circ} = \emptyset$ (то есть S^- не имеет внутренних точек).

3. П р и м е р ы: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ нигде не плотно в \mathbb{R} ; \mathbb{Q} нигде не плотно в \mathbb{R} (оно плотно в \mathbb{R}).

4. Т е о р е м а [Р. Бэр]. *Полное метрическое пространство не является объединением счётного числа нигде не плотных множеств.*

¶ Пусть, напротив, полное метрическое пространство $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n^{-\circ} = \emptyset$ ($n \in \mathbb{N}$). Построим последовательность шаров $B_{r_1}[x_1] \supset B_{r_2}[x_2] \supset \dots$ со свойствами: $r_n \rightarrow 0$, $B_{r_n}[x_n] \cap A_n = \emptyset$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда точка x , принадлежащая всем этим шарам (существующая по теореме о вложенных шарах), не принадлежит $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, что противоречит предположению.

Построение проведём по индукции. Так как $A_1^{-\circ} = \emptyset$, существует $x_1 \in A_1^{-c}$ (иначе $A_1^{-\circ} = M$ и $A_1^{-\circ} = M \neq \emptyset$). Так как A_1^{-c} открыто и метрическое пространство регулярно (см. 104.3), найдётся r_1 ($0 < r_1 < 1$) такое, что $B_{r_1}[x_1] \subset A_1^{-c}$. При этом $B_{r_1}[x_1] \cap A_1 = \emptyset$. Пусть уже построены шары

$$B_{r_1}[x_1] \supset \dots \supset B_{r_k}[x_k], \quad 0 < r_n < \frac{1}{n}, \quad B_{r_n}[x_n] \cap A_n = \emptyset \quad (1 \leq n \leq k).$$

Для построения $(k+1)$ -го шара заметим, что $B_{r_k}(x_k) \not\subset A_{k+1}^{-}$ (иначе $\emptyset \neq B_{r_k}(x_k) \subset A_{k+1}^{-\circ} = \emptyset$). Поэтому найдётся $x_{k+1} \in B_{r_k}(x_k) \cap A_{k+1}^{-c}$; при этом множество в правой части открыто. В силу регулярности метрического пространства найдётся r_{k+1} ($0 < r_{k+1} < \frac{1}{k+1}$) такое, что $B_{r_{k+1}}[x_{k+1}] \subset B_{r_k}(x_k) \cap A_{k+1}^{-c}$. При этом $B_{r_{k+1}}[x_{k+1}] \cap A_{k+1} = \emptyset$. Построение завершено. \square

5. У п р а ж н е н и е. В множестве \mathbb{N} натуральных чисел положим

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1 + (x + y)^{-1}, & \text{если } x \neq y \end{cases}$$

а) Доказать, что d — метрика;

б) (\mathbb{N}, d) — полное метрическое пространство.

в) построить в \mathbb{N} последовательность непустых замкнутых вложенных шаров, радиусы которых не стремятся к нулю, и не существует точки, принадлежащей всем шарам одновременно (ср. с формулировкой теоремы о вложенных шарах).

§218. Принцип сжимающих отображений

1. Отображение $f : M \rightarrow M$ метрического пространства M в себя называется *сжимающим* (или *сжатием*), если

$$\exists \alpha < 1 \quad \forall x, y \in M \quad (d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)).$$

Очевидно, сжимающее отображение непрерывно:

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow d(f(x_n), f(x)) \leq \alpha d(x_n, x) \rightarrow 0.$$

2. Если M — полное метрическое пространство и $f : M \rightarrow M$ — сжимающее отображение, то уравнение

$$f(x) = x \tag{1}$$

имеет единственное решение.

¶ СУЩЕСТВОВАНИЕ. Для произвольного $x_0 \in M$ положим $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \dots$. Тогда последовательность (x_n) фундаментальна:

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \alpha d(x_{n+p-1}, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_p, x_0) \\ &\leq \alpha^n [d(x_0, x_1) + \alpha d(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{p-1} d(x_0, x_1)] \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Положим $x = \lim_n x_n$. Из непрерывности f имеем: $f(x) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x$.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ. Пусть y — ещё один элемент такой, что $f(y) = y$. Тогда

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y. \quad \square$$

3. З а м е ч а н и е. Часто бывает необходимо оценить погрешность, с которой аппроксимирующая решение последовательность приближается к решению x уравнения (1). Для этого можно, например, перейти к пределу по p в оценке (2). Имеем тогда $d(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$.

4. [Обобщённый принцип]. Пусть $f : M \rightarrow M$ — отображение полного метрического пространства M в себя, причём $g = f^{[n]} \equiv f \circ \dots \circ f$ (n -ая суперпозиция) — сжатие. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение.

¶ Пусть x — (необходимо единственное) решение уравнения $g(x) = x$. Тогда $f(x)$ — также решение этого уравнения. Следовательно, $f(x) = x$. Это решение единственно:

$$y = f(y) \Rightarrow y = f^{[2]}(y) \Rightarrow \dots \Rightarrow y = f^{[n]}(y) = g(y) \Rightarrow y = x. \quad \square$$

Принцип сжимающих отображений имеет многочисленные применения в различных задачах анализа, дифференциальных и интегральных уравнений. Приведём две иллюстрации.

5. [Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода]. Рассмотрим интегральное уравнение в пространстве $C[a, b]$ с метрикой, определяемой нормой: $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$:

$$f(t) = \int_a^b K(t, s) f(s) ds + \varphi(t), \quad (3)$$

где функции $\varphi(t)$, $K(t, s)$ непрерывны (в частности, K ограничена: $|K(t, s)| \leq M$, $(t, s \in [a, b])$). Рассмотрим отображение

$$(Af)(t) \equiv \int_a^b K(t, s) f(s) ds + \varphi(t).$$

Тогда $d(Af, Ag) = \max_{t \in [a, b]} |(Af)(t) - (Ag)(t)| \leq M(b - a)d(f, g)$. Следовательно, при $M(b - a) < 1$ уравнение (3) имеет единственное решение. Отметим, что соответствующая последовательность приближений имеет вид (при $f_0 = 0$):

$$\begin{aligned} f_1(t) &\equiv (Af_0)(t) = \varphi(t); \\ f_2(t) &\equiv (Af_1)(t) = \int_a^b K(t, s) \varphi(s) ds + \varphi(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ f_n(t) & \equiv (Af_{n-1})(t) = \int_a^b K(t, s)f_{n-1}(s)ds + \varphi(t); \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

6. [Интегральное уравнение Вольтерра]. Снова в $C[a, b]$ рассмотрим уравнение (в прежних предположениях)

$$f(t) = \int_a^t K(t, s)f(s)ds + \varphi(t) \quad (\equiv (Af)(t)). \quad (4)$$

Последовательно имеем оценки:

$$\begin{aligned} |(Af)(t) - (Ag)(t)| & \leq M(t-a)\|f-g\|, \\ |(A^{[2]}f)(t) - (A^{[2]}g)(t)| & \leq \frac{1}{2}M^2(t-a)^2\|f-g\|, \dots, \\ |(A^{[n]}f)(t) - (A^{[n]}g)(t)| & \leq \frac{1}{n!}M^n(t-a)^n\|f-g\| \leq \frac{1}{n!}M^n(b-a)^n\|f-g\|. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{n!}M^n(b-a)^n < 1$ для достаточно больших n , $A^{[n]}$ — сжатие, и в силу п. 4 уравнение (4) имеет единственное решение.

§219. Компактные множества в метрическом пространстве

1. Пусть M — метрическое пространство; множество $X \subset M$ называется *предкомпактным*, если X^- компактно. В метрическом пространстве с понятием компактности тесно связано понятие полной ограниченности.

2. Пусть M — метрическое пространство и $X \subset M$; множество $A \subset M$ называется ε -сетью для X ($\varepsilon > 0$), если $\forall x \in X \exists a \in A \ (d(a, x) \leq \varepsilon)$. Отметим, что если A — ε -сеть для X , то $X \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon[a]$.

3. Множество в метрическом пространстве называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре; множество называется *вполне ограниченным*, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть.

4. *Вполне ограниченное множество ограничено.*

5. *Если множество вполне ограничено, то вполне ограничено его замыкание.*

6. *Если метрическое пространство вполне ограничено, то оно сепарабельно.*

¶ Докажем, например, п. 4. Пусть $X \subset M$ вполне ограничено и x_1, \dots, x_n — некоторая 1-сеть для X , $a \in M$ — произвольно и $C = \max_{1 \leq k \leq n} d(x_k, a)$. Тогда $X \subset B_{1+C}[a]$:

$$x \in X \Rightarrow \exists k \ (d(x, x_k) \leq 1) \Rightarrow d(x, a) \leq d(x, x_k) + d(x_k, a) \leq 1 + C. \quad \square$$

7. *Метрическое пространство M компактно тогда оно полно и вполне ограничено.*

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно; $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in M}$ — открытое покрытие M . Следовательно, оно обладает конечным покрытием $\{B_\varepsilon(x_1), \dots, B_\varepsilon(x_k)\}$. Тогда

$A = \{x_1, \dots, x_k\}$ — искомая ε -сеть (!!). Пусть, напротив, M не полно. Тогда существует фундаментальная последовательность $(x_n) \subset M$, которая не сходится, то есть $\forall a \in M \exists \varepsilon_a > 0 \exists n_1 < n_2 < \dots \forall k (d(a, x_{n_k}) \geq 2\varepsilon_a)$. Отсюда

$$\forall a \in M \exists \varepsilon_a > 0 \exists \mathcal{N}_a \forall n > \mathcal{N}_a (d(a, x_n) \geq \varepsilon_a). \quad (*)$$

(Если, напротив, $\forall \mathcal{N}_a \exists n > \mathcal{N}_a (d(a, x_n) < \varepsilon_a)$, то

$$2\varepsilon_a \leq d(a, x_{n_k}) \leq d(a, x_n) + d(x_n, x_{n_k}) \Rightarrow \varepsilon_a < d(x_n, x_{n_k})$$

в противоречие с фундаментальностью (x_n) .) Из открытого покрытия $\{B_{\varepsilon_a}(a)\}_{a \in M}$ пространства M выделим конечное покрытие $\{B_{\varepsilon_1}(a_1), \dots, B_{\varepsilon_k}(a_k)\}$. Из (*) при $\mathcal{N} > \max_s \mathcal{N}_{a_s}$ следует, что последовательность $(x_n)_{n \geq \mathcal{N}}$ лежит вне $\bigcup_{s=1}^k B_{\varepsilon_s}(a_s)$, — противоречие.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть M полно, вполне ограничено, но не компактно. Пусть (U_α) — открытое покрытие M , не содержащее конечного покрытия. Рассмотрим 1-сеть $\{x_1^1, \dots, x_{n_1}^1\} \subset M$. Хотя бы один шар $B_1[x_j^1]$ (например, $B_1[x_1^1]$) не покрывается конечным числом элементов покрытия U_α . Шар $B_1[x_1^1]$ — также вполне ограниченное метрическое пространство. Рассмотрим $\frac{1}{2}$ -сеть $\{x_1^2, \dots, x_{n_2}^2\} \subset B_1[x_1^1]$. Тогда хотя бы один шар $B_{\frac{1}{2}}[x_j^2]$ (например, $B_{\frac{1}{2}}[x_1^2]$) не покрывается конечным числом U_α . Аналогично для любого $k \in \mathbb{N}$ существует 2^{-k+1} -сеть $\{x_1^k, \dots, x_{n_k}^k\} \subset B_{2^{-k+2}}[x_1^{k-1}]$ такая, что $B_{2^{-k+1}}[x_1^k]$ не покрывается конечным числом U_α . Последовательность (x_1^k) фундаментальна (!!) и, следовательно, существует $x_0 = \lim_k x_1^k$. Пусть α_0 таково, что $x_0 \in U_{\alpha_0}$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon[x_0] \subset U_{\alpha_0})$. Но $B_{2^{-k+1}}[x_1^k] \subset B_\varepsilon[x_0]$ при достаточно больших k , что противоречит конструкции (x_1^k) . \square

8. Пусть M — полное метрическое пространство; $X(\subset M)$ предкомпактно тогда X вполне ограничено.

¶ Пусть X предкомпактно. Тогда X^- компактно, и в силу п. 7 X вполне ограничено. Обратно, если X вполне ограничено, то X^- вполне ограничено и полно (будучи замкнутым) \Rightarrow (п. 7) X^- компактно. \square

Рассмотрим важный пример: пространство $C[a, b]$.

9. Семейство $\Phi (\subset C[a, b])$ называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \varphi \in \Phi \forall x, y \in [a, b] (|x - y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon).$$

10. [Критерий компактности в пространстве $C[a, b]$]. Множество $\Phi(\subset C[a, b])$ предкомпактно тогда Φ ограничено и равностепенно непрерывно.

¶ НЕОБХОДИМОСТЬ. В силу п. 8 Φ вполне ограничено, а значит, ограничено. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\frac{\varepsilon}{3}$ -сеть $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ для Φ . Каждая функция φ_j равномерно непрерывна, то есть

$$\forall j \exists \delta_j > 0 \forall x, y \in [a, b] (|x - y| < \delta_j \Rightarrow |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}).$$

Положим $\delta = \min \delta_j (> 0)$. Тогда

$$\forall \varphi \in \Phi \exists \varphi_j (\|\varphi - \varphi_j\| \leq \frac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |\varphi(x) - \varphi_j(x)| + |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| + |\varphi_j(y) - \varphi(y)| \\ &\leq \|\varphi - \varphi_j\| + |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| + \|\varphi - \varphi_j\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Необходимость установлена (см. подчеркнутый текст).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть Φ ограничено и равномерно непрерывно. Требуется доказать (см. п. 8), что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть. Пусть $\Delta(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ — разложение отрезка $[a, b]$, $d(\Delta) < \delta$. В обозначениях п. 9 (с заменой ε на $\frac{\varepsilon}{5}$) тогда $|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{5}$ ($\varphi \in \Phi$, $1 \leq j \leq n$). Пусть $K > 0$ таково, что $\|\varphi\| \leq K$ ($\varphi \in \Phi$). Рассмотрим разложение $\Delta(-K = y_0 < y_1 < \dots < y_m = K)$ отрезка $[-K, K]$ диаметра $< \frac{\varepsilon}{5}$. Каждой $\varphi \in \Phi$ сопоставим полигон ψ с узлами в (x_k, y_j) , где для данного k номер j определяется, например, условием $y_j \leq \varphi(x_k) < y_{j+1}$. Тогда

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5} \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < |\psi(x_k) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| + |\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Для произвольного $x \in [a, b]$ (x_k — ближайший узел к x слева):

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{5} + |\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Наконец, число полигонов описанного вида, очевидно, конечно. \square

11. У п р а ж н е н и е. Показать, что множество

$$\Phi = \{\varphi \in C[0, 1] : 0 \leq \varphi(x) \leq 1 \ (0 \leq x \leq 1)\}$$

не равномерно непрерывно в $C[0, 1]$.

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

Мы переходим к систематическому изучению непрерывных линейных отображений в нормированных пространствах. В основе этой теории лежат три фундаментальных результата, постоянно используемые в линейном функциональном анализе и его приложениях: теорема Хана-Банаха (принцип продолжения линейных функционалов), теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и теорема Банаха (принцип открытости отображения).

§220. Конечномерные нормированные пространства

1. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы в конечномерном векторном пространстве E . Тогда существуют константы $m, M > 0$ такие, что

$$m\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq M\|f\|_1 \quad (f \in E). \quad (*)$$

¶ Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в векторном пространстве E , $\|\cdot\|_e$ — евклидова норма, а $\|\cdot\|$ — произвольная норма в E . Покажем, что существуют константы $d, D > 0$ такие, что

$$d\|\cdot\|_e \leq \|\cdot\| \leq D\|\cdot\|_e$$

(отсюда, очевидно, следует (*)). Для произвольного вектора $f = f^1 e_1 + \dots + f^n e_n$ имеем

$$\|f\| \leq \sum_i |f^i| \|e_i\| \leq \left[\sum_i \|e_i\|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_i |f^i|^2 \right]^{1/2} = D \|f\|_e,$$

где $D = \left[\sum_i \|e_i\|^2 \right]^{1/2}$.

Пусть $S (\subset E)$ — единичная сфера в евклидовой норме, то есть $S = \{f \in E : \|f\|_e = 1\}$ и $\varphi(f) \equiv \|f\|$ ($f \in S$). Функция $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, заданная на компактном множестве в евклидовом пространстве $(E, \|\cdot\|_e)$ (непрерывность её следует из оценки:

$$|\varphi(f) - \varphi(g)| = |\|f\| - \|g\|| \leq \|f - g\| \leq D\|f - g\|_e).$$

Следовательно, существует $f_0 \in S$, что $\varphi(f_0) = \min_{f \in S} \varphi(f) (> 0)$. Положим $d = \varphi(f_0)$.

Тогда $f \neq \theta$ влечёт $d\|f\|_e = \varphi(f_0)\|f\|_e \leq \varphi\left(\frac{f}{\|f\|_e}\right)\|f\|_e = \|f\|$. □

2. С л е д с т в и е. Всякое конечномерное нормированное пространство полно.

3. С л е д с т в и е. Все нормы в конечномерном пространстве определяют одну и ту же топологию.

4. З а м е ч а н и е. В бесконечномерных пространствах это уже не так (см., например, 149.6).

5. Пусть E — нормированное пространство, X — его замкнутое подпространство, $f \in E \setminus X$; элемент $f_0 \in X$ называется *элементом наилучшего приближения к f* (относительно X), если

$$\|f - f_0\| = \inf_{g \in X} \|f - g\| \quad (= \inf_{g \in X} \|f + g\|).$$

6. Если X — конечномерное подпространство E , то элемент наилучшего приближения относительно X всегда существует.

¶ Пусть $\dim X = n$ и $\alpha = \inf_{g \in X} \|f - g\|$. Пусть последовательность $(g_k) \subset X$ такова, что $\|f - g_k\| \rightarrow \alpha$ ($k \rightarrow +\infty$); (g_k) ограничена по норме $\|\cdot\|$, так как $\|g_k\| \leq \|g_k - f\| + \|f\|$ ($k = 1, 2, \dots$). В силу 65.4 и п. 3 (g_k) обладает сходящейся подпоследовательностью: $g_{n_k} \rightarrow f_0$. Элемент $f_0 \in X$. При этом $\|f - f_0\| = \lim_k \|f - g_{n_k}\| = \alpha$. \square

У п р а ж н е н и я. 7. Введём в \mathbb{C}^n семейство норм

$$\|f\|_p \equiv \left[\sum_{k=1}^n |f^k|^p \right]^{1/p} \quad (1 \leq p < +\infty),$$

$$\|f\|_\infty \equiv \max_{1 \leq k \leq n} |f^k| \quad (f = (f^1, \dots, f^n) \in \mathbb{C}^n).$$

Найдите константы m_p, M_p ($1 \leq p \leq \infty$), удовлетворяющие неравенствам $m_p \|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_\infty \leq M_p \|\cdot\|_p$.

8. В пространстве $(\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$ (упр. 7) найдите все элементы наилучшего приближения к вектору $f = (1, 0)$ относительно подпространства $X = \{(u, v) : u = v\}$.

§221. Шкала пространств $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$)

Пусть (E, \mathfrak{A}, μ) — пространство с полной σ -конечной мерой, $M = M(E, \mathfrak{A}, \mu)$ — векторное пространство всех измеримых функций $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ (или \mathbb{R}), факторизованное по отношению эквивалентности \sim ($f \sim g$, если $f(x) = g(x)$ п. в.). Допуская вольность, элементы пространства M мы называем функциями.

1. Введём следующие классы функций и числовые функции на этих классах:

$$L^p(\mu) \equiv \{f \in M : \int |f|^p d\mu < +\infty\},$$

$$\|f\|_p \equiv \left[\int |f|^p d\mu \right]^{1/p} \quad (f \in L^p(\mu)), \quad 1 \leq p < +\infty;$$

$$L^\infty(\mu) \equiv \{f \in M : \exists k > 0 \ (|f(x)| \leq k \text{ п. в.})\},$$

$$\|f\|_\infty \equiv \inf\{k : |f(x)| \leq k \text{ п. в.}\} \quad (f \in L^\infty(\mu)).$$

Начнём анализ с класса $L^\infty(\mu)$. Прежде всего, $L^\infty(\mu)$ — векторное пространство над полем \mathbb{C} (!!). Далее,

2. $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ п. в. на E .

3. Функция $\|f\|_\infty$ — норма на $L^\infty(\mu)$.

¶ Из п. 2 следует немедленно, что $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ п. в., а значит, $f = \theta$. Снова с учётом п. 2 имеем для $f, g \in L^\infty(\mu)$:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ п. в.,}$$

откуда $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. \square

4. Пространство $L^\infty(\mu)$ с нормой $\|f\|_\infty$ является банаховым пространством.

¶ Пусть (f_n) фундаментальна в $L^\infty(\mu)$. Тогда из оценки (см. п. 2)

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \text{ п. в.}$$

следует, что п. в. существует $f(x) \equiv \lim_n f_n(x)$. Из фундаментальности (f_n) следует, что для некоторого $C > 0$ справедлива оценка $\|f_n\|_\infty \leq C$ ($n \in \mathbb{N}$). Поэтому $|f_n(x)| \leq C$ п. в. и, следовательно, $|f(x)| \leq C$ п. в., откуда $f \in L^\infty(\mu)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и N таково, что $n > N \Rightarrow \|f_{n+p} - f_n\|_\infty < \varepsilon$ ($p \in \mathbb{N}$). Тогда $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ п. в. ($n \geq N$), а значит, (переходя к пределу по p) $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ п. в. ($n \geq N$). Поэтому $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ ($n > N$). Итак, $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). \square

Рассмотрим класс $L^1(\mu)$, находящийся на противоположном конце шкалы. Из свойств интеграла Лебега следует, что $L^1(\mu)$ — векторное пространство и $\|f\|_1 \equiv \int |f| d\mu$ — норма на $L^1(\mu)$. При доказательстве следующих ниже утверждений предполагаем (ради технической простоты), что μ — конечная мера.

5. $L^1(\mu)$ — банахово пространство.

¶ Воспользуемся 148.4. Пусть ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n$ сходится абсолютно в $L^1(\mu)$, т. е. $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| d\mu < +\infty$. По следствию к теореме Леви 208.5 ряд $\sum_{n=1}^\infty |f_n|$ сходится п. в. к некоторой интегрируемой функции $\varphi (\geq 0)$. Отсюда п. в. сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n$. Пусть f — его сумма. Поскольку $|\sum_{n=1}^k f_n| \leq \varphi$ п. в. ($k \in \mathbb{N}$), получаем, что $|f| \leq \varphi$ п. в. и поэтому $f \in L^1(\mu)$. Наконец, ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n$ сходится в $L^1(\mu)$ (к f):

$$\int |f - \sum_{n=1}^k f_n| d\mu = \int |\sum_{n=k+1}^\infty f_n| d\mu \leq \sum_{n=k+1}^\infty \int |f_n| d\mu \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty). \quad \square$$

6. З а м е ч а н и е. Если последовательность (f_n) сходится к f по норме пространства $L^1(\mu)$, то существует подпоследовательность (f_{n_k}) , сходящаяся к f п. в.

¶ Пусть $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), $\varepsilon > 0$ и $X_n(\varepsilon) \equiv \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Тогда из оценки $\mu X_n(\varepsilon) = \int_{X_n(\varepsilon)} d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n(\varepsilon)} |f_n - f| d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f_n - f\|_1$ следует, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Из 206.4 теперь следует требуемое. \square

7. [Интегральные неравенства Гёльдера и Минковского].

(а) Пусть $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, причём $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $fg \in L^1(\mu)$ и $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

(б) Пусть $f, g \in L^p(\mu)$. Тогда $f + g \in L^p(\mu)$, причём $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

¶ (а). Пусть $f = \sum \xi_i \chi_{X_i} \in L^p(\mu)$, $g = \sum \eta_i \chi_{X_i} \in L^q(\mu)$ — простые функции, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (измеримое разложение $E = \sum X_i$ можно считать, очевидно, общим для обеих функций). Тогда $fg = \sum \xi_i \eta_i \chi_{X_i}$ и, используя неравенство Гёльдера для рядов (см. 41.3), имеем

$$\sum |\xi_i \eta_i| \mu X_i = \sum [|\xi_i| \mu X_i^{1/p} \cdot |\eta_i| \mu X_i^{1/q}] \leq [\sum |\xi_i|^p \mu X_i]^{1/p} \cdot [\sum |\eta_i|^q \mu X_i]^{1/q} < +\infty.$$

Таким образом, $fg \in L^1(\mu)$ и (а) справедливо. В общем случае рассмотрим последовательности простых функций $f_n \rightarrow f \in L^p(\mu)$, $g_n \rightarrow g \in L^q(\mu)$ п. в., $|f_n| \leq |f|$, $|g_n| \leq |g|$. Тогда $f_n g_n \rightarrow fg$ п. в. и из оценки

$$\begin{aligned} \int |f_n g_n| d\mu &\leq \left[\int |f_n|^p d\mu \right]^{1/p} \cdot \left[\int |g_n|^q d\mu \right]^{1/q} \leq \left[\int |f|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int |g|^q d\mu \right]^{1/q} \\ &= \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

следует, что $f_n g_n \in L^1(\mu)$. В силу теоремы Фату 208.6 $|fg| \in L^1(\mu)$ и справедливо неравенство (а).

(б). Для фиксированного $x \in E$ справедливы неравенства

$$|f(x) + g(x)|^p \leq [2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}]^p \leq 2^p \{|f(x)|^p + |g(x)|^p\},$$

из которых следует, что $f + g \in L^p(\mu)$ для $f, g \in L^p(\mu)$. Поскольку $(p-1)q = p$ для q такого, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, функция $|f + g|^{p-1}$ принадлежит классу $L^q(\mu)$. Используя (а), имеем

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p d\mu = \int |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left[\int |f|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right]^{1/q} + \left[\int |g|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right]^{1/q} \\ &= \|f\|_p \|f + g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Деля обе части полученного неравенства на $\|f + g\|_p^{p/q}$, получаем искомое неравенство: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. \square

8. Нормированное пространство $L^p(\mu)$ полно.

¶ Пусть (f_n) — фундаментальная последовательность в $L^p(\mu)$. Из неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_1 &= \int |f_n - f_m| d\mu \leq \left[\int |f_n - f_m|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int 1 d\mu \right]^{1/q} \\ &= \|f_n - f_m\|_p (\mu E)^{1/q} \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Таким образом, (f_n) фундаментальна в $L^1(\mu)$ и, следовательно, обладает пределом f в $L^1(\mu)$. В соответствии с замечанием 6 существует подпоследовательность (f_{n_k}) такая, что $f_{n_k} \rightarrow f$ п. в. Покажем, что $f_n \rightarrow f$ по норме $L^p(\mu)$. Для $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $n, n_k > N \Rightarrow \int |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon$. Переходя здесь к пределу по k и применяя теорему Фату 208.6, получаем $|f_n - f|^p \in L^1(\mu)$, откуда $|f_n - f| \in L^p(\mu)$, и значит, $f \in L^p(\mu)$, $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). \square

9. З а м е ч а н и е. Для конечной меры μ справедливо включение $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ при $1 \leq q < p \leq \infty$.

У п р а ж н е н и я. 10. Введём классы скалярных последовательностей $f \equiv (f^n)$ и числовых функций на них:

$$\begin{aligned} \ell^p &\equiv \{f = (f^n) : \sum_{n=1}^{\infty} |f^n|^p < +\infty\}, \quad \|f\|_p \equiv \left[\sum_{n=1}^{\infty} |f^n|^p \right]^{1/p} \quad (f \in \ell^p), \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \ell^\infty &\equiv \{f = (f^n) : \sup_n |f^n| < +\infty\}, \quad \|f\|_\infty \equiv \sup_n |f^n| \quad (f \in \ell^\infty). \end{aligned}$$

Покажите, что эти классы являются векторными пространствами, а указанные функции — нормами. Докажите полноту пространств ℓ^p ($1 \leq p \leq +\infty$) а) не ссылаясь на результаты пп. 4 и 8, б) опираясь на результаты пп. 4 и 8.

11. Покажите, что пространство $C_{00}(\mathbb{R})$ непрерывных функций с компактными носителями плотно в пространстве $L^1(\mathbb{R})$ функций, интегрируемых по линейной мере Лебега. {Указания. Заметить, что $C_{00}(\mathbb{R})$ плотно (по норме $\|\cdot\|_1$) в множестве характеристических функций множеств в \mathbb{R} , представимых в виде конечных объединений попарно непересекающихся собственных промежутков $\langle a_i, b_i \rangle$, и отсюда — в множестве характеристических функций ограниченных измеримых по Лебегу множеств в \mathbb{R} . Затем вывести, что $C_{00}(\mathbb{R})$ плотно в множестве характеристических функций измеримых по Лебегу множеств конечной меры и, следовательно, в множестве конечно-значных простых функций в \mathbb{R} . Остаётся воспользоваться 215.9.}

12. Покажите, что $C_{00}(\mathbb{R})$ плотно в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

13. Докажите полноту $L^2(\mu)$ для σ -конечной меры μ .

§222. Операции над банаховыми пространствами

1. [Прямая сумма банаховых пространств]. Пусть $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ — банаховы пространства. Через $\{f, g\}$ ($f \in E_1$, $g \in E_2$) обозначим элементы декартова произведения $E_1 \times E_2$. Определим в $E_1 \times E_2$ векторные операции равенствами:

$$\{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} \equiv \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\},$$

$$\lambda\{f, g\} \equiv \{\lambda f, \lambda g\} \quad (\{f, g\} \in E_1 \times E_2).$$

Определим далее на векторном пространстве $E_1 \times E_2$ норму

$$\|\{f, g\}\| \equiv \|f\|_1 + \|g\|_2 \quad (\{f, g\} \in E_1 \times E_2). \quad (*)$$

2. Пространство $E_1 \times E_2$ является полным относительно нормы (*).

¶ Пусть $(\{f_n, g_n\})$ — фундаментальная последовательность в $E_1 \times E_2$. Из равенств

$$\begin{aligned} \|\{f_m, g_m\} - \{f_n, g_n\}\| &= \|\{f_m - f_n, g_m - g_n\}\| \\ &= \|f_m - f_n\|_1 + \|g_m - g_n\|_2 \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

следует, что последовательности (f_n) , (g_n) являются фундаментальными в E_1 и E_2 соответственно, а значит, они сходятся: $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$. Но тогда $\{f_n, g_n\} \rightarrow \{f, g\}$ в $E_1 \times E_2$. □

3. [Фактор-пространство]. Пусть L — замкнутый идеал в банаховом пространстве E (L — банахово пространство в индуцированной топологии). Введём в E отношение эквивалентности: $f \sim g$, если $f - g \in L$. Элементы фактор-множества E/L — смежные классы; если $f \in E$, то смежный класс, куда входит f , обозначим через $[f]$. Очевидно, $[f] = \{f + g : g \in L\} \equiv f + L$. E/L — векторное пространство относительно векторных операций

$$[f] + [g] \equiv [f + g], \quad \lambda[f] \equiv [\lambda f] \quad (f \in E, \lambda \in \Lambda).$$

Нулевой элемент — это $[\theta] = L$. Функция

$$\|[f]\|_{\sim} \equiv \inf_{g \in L} \|f + g\|$$

— норма на векторном пространстве E/L (!!).

4. $(E/L, \|\cdot\|_\sim)$ — банахово пространство.

¶ Нужно лишь установить полноту E/L . Воспользуемся критерием 148.4. Пусть $\sum \| [f_n] \|_\sim < +\infty$ и $g_n \in L$ таковы, что $\|f_n + g_n\| \leq 2\| [f_n] \|_\sim$. Тогда ряд $\sum (f_n + g_n)$ сходится абсолютно в E и, так как E — банахово пространство, этот ряд сходится. Пусть $g = \sum (f_n + g_n)$. Покажем, что $[g] = \sum [f_n]$. Действительно,

$$\| [g] - \sum_{n=1}^k [f_n] \|_\sim \leq \| g - \sum_{n=1}^k (f_n + g_n) \| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad \square$$

§223. Линейные операторы в нормированном пространстве

1. Пусть E, F — нормированные пространства над полем Λ ($= \mathbb{C}$ или \mathbb{R}); линейный оператор $A : E \rightarrow F$ (см. 71.1) называется *ограниченным*, если $\exists C > 0 \forall f \in E$ ($\|Af\| \leq C\|f\|$). Через $L(E, F)$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов из нормированного пространства E в нормированное пространство F . Величина

$$\|A\| \equiv \inf \{ C > 0 : \|Af\| \leq C\|f\| \quad (f \in E) \} \quad (*)$$

называется нормой ограниченного линейного оператора A .

2. З а м е ч а н и е. Если $A \in L(E, F)$, то $\|Af\| \leq \|A\| \|f\|$ ($f \in E$).

3. Пусть $A : E \rightarrow F$ — линейный оператор. Следующие условия эквивалентны:

- (i) A ограничен,
- (ii) A непрерывен,
- (iii) A непрерывен в точке θ .

¶ (i) \Rightarrow (ii). $f_n \rightarrow f$ ($f_n, f \in E$) $\Rightarrow \|Af_n - Af\| = \|A(f_n - f)\| \leq \|A\| \|f_n - f\| \rightarrow 0 \Rightarrow Af_n \rightarrow Af$.

(ii) \Rightarrow (iii) с очевидностью.

(iii) \Rightarrow (i). Из условия (iii) следует, что существует $\delta > 0$ такое, что $\|f\| < \delta \Rightarrow \|Af\| < 1$. Полагая $C = 2/\delta$, имеем (при $f \neq \theta$):

$$\|Af\| = \frac{2}{\delta} \|f\| \cdot \|A(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{f}{\|f\|})\| < C\|f\|. \quad \square$$

4. Для $A \in L(E, F)$: $\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Af\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\|$.

¶ Обозначим $M = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Af\|$; имеем: $\|Af\| \leq C\|f\|$ ($f \in E$) $\Rightarrow \|Af\| \leq C$ ($\|f\| \leq 1$)

1) $\Rightarrow M \leq \|A\|$; $\|Af\| = \|A(f/\|f\|)\| \|f\| \leq M\|f\| \Rightarrow \|A\| \leq M. \quad \square$

5. Пусть E, F, G — нормированные пространства и $A \in L(E, F)$, $B \in L(F, G)$. Тогда $B \circ A \in L(E, G)$. При этом $\|B \circ A\| \leq \|B\| \|A\|$.

¶ $\|B \circ A\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|B(Af)\| \leq \|B\| \cdot \sup_{\|f\| \leq 1} \|Af\| = \|B\| \|A\|. \quad \square$

6. Класс $L(E, F)$ всех ограниченных линейных отображений из нормированного пространства E в нормированное пространство F с естественными векторными операциями и нормой $(*)$ — нормированное пространство. Более того, если F — полное пространство, то $L(E, F)$ — также полно.

¶ Функция $(*)$ на самом деле является нормой:

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} \|(A + B)f\| \leq \sup_{\|f\| \leq 1} [\|Af\| + \|Bf\|] \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|Af\| + \sup_{\|f\| \leq 1} \|Bf\| \\ &= \|A\| + \|B\|.\end{aligned}$$

Пусть $\|A_n - A_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$). Тогда для любого $f \in E$ последовательность $(A_n f)$ фундаментальна в F :

$$\|A_n f - A_m f\| = \|(A_n - A_m)f\| \leq \|A_n - A_m\| \|f\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Если F — полно, то существует предел $Af \equiv \lim A_n f$ ($f \in E$). Таким образом определённое отображение A , очевидно, является линейным отображением из E в F . Кроме того, A ограничено. Действительно, пусть $C > 0$ таково, что $\|A_n\| \leq C$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\|Af\| = \lim_n \|A_n f\| \leq \sup_n \|A_n f\| \leq \sup_n \|A_n\| \|f\| \leq C \|f\|.$$

Итак, $A \in L(E, F)$. Наконец, $A_n \rightarrow A$ по норме: пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и N таково, что $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$ ($n, m > N$). Тогда

$$\|A_n f - Af\| = \lim_m \|A_n f - A_m f\| \leq \varepsilon \|f\| \quad (n > N),$$

то есть $\forall n > N$ ($\|A_n - A\| < \varepsilon$) $\Rightarrow \|A_n - A\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). \square

Рассмотрим некоторые специальные виды линейных отображений, с которыми нам придётся иметь дело.

7. Пусть E, F — нормированные пространства и $A : E \rightarrow F$ — линейный оператор. Он называется *изометрией*, если $\|Af\| = \|f\|$ ($f \in E$). Очевидно, $A \in L(E, F)$ и $\|A\| = 1$. Изометрия, являющаяся сюръекцией (на F), называется *изометрическим изоморфизмом*. Если существует изометрический изоморфизм $A : E \rightarrow F$, нормированные пространства E и F называются *изометрически изоморфными* (обозначается: $E \simeq F$). Два изометрически изоморфные нормированные пространства это (с точки зрения алгебраической и метрической структур) по существу одно и то же пространство.

8. Оператор $A \in L(E, F)$ называется *обратимым*, если A — сюръекция и существует обратный оператор $A^{-1} \in L(F, E)$.

9. Пусть E, F — нормированные пространства. Линейная ограниченная инъекция $j : E \rightarrow F$ называется *вложением* пространства E в пространство F .

У п р а ж н е н и я. 10. Пусть E, F — нормированные пространства и E — конечномерно. Тогда любое линейное отображение $A : E \rightarrow F$ непрерывно.

11. Пусть E — нормированное пространство $C[0, 1]$, с нормой $\|f\|_1 \equiv \int_0^1 |f(t)| dt$, а $F = C[0, 1]$ с нормой $\|f\| \equiv \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$. Тогда отображение $j : F \rightarrow E$, заданное

равенством $j(f) \equiv f$ ($f \in F$), — вложение, а отображение $i : E \rightarrow F$, заданное равенством $i(f) \equiv f$ ($f \in E$), не является вложением.

12. Сюръекция $A \in L(E, F)$ обратима тогда $\exists C > 0 \forall f \in E$ ($\|Af\| \geq C\|f\|$).

13. Пусть E, F — нормированные пространства, а $E \times E$ снабжено нормой $\|\{u, v\}\| \equiv \max\{\|u\|, \|v\|\}$. Покажите, что соответствие $A \rightarrow A^\#$, где $A^\#\{u, v\} \equiv (Au)v$ ($u, v \in E$), определяет изометрический изоморфизм между пространствами $L(E, L(E, F))$ и $L(E \times E, F)$.

14. Пусть (E, \mathfrak{A}, μ) — пространство с полной конечной мерой, \mathfrak{N}_μ — множество всех зарядов $\nu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ абсолютно непрерывных относительно μ . Естественные векторные операции и норма $\|\cdot\|_\nu$ (см. 211.8) определяют в \mathfrak{N}_μ структуру нормированного пространства. Покажите, что \mathfrak{N}_μ изометрически изоморфно банахову пространству $L^1(\mu)$. (Указание: воспользуйтесь теоремой Радона-Никодима.)

§224. Пополнение нормированного пространства. Простейшая теорема вложения

1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Нормированное пространство $(\tilde{E}, \|\cdot\|^\sim)$ называется *пополнением* $(E, \|\cdot\|)$, если 1) $(\tilde{E}, \|\cdot\|^\sim)$ — полное нормированное пространство, 2) существует изометрический изоморфизм $j : E \rightarrow \tilde{E}$, причём $j(E)$ плотно в \tilde{E} .

2. Каждое нормированное пространство обладает пополнением, которое единственно с точностью до изометрического изоморфизма.

¶ В силу 216.3 существует полное метрическое пространство (\tilde{E}, δ) — пополнение пространства (E, d) , где d определена равенством $d(f, g) \equiv \|f - g\|$ ($f, g \in E$). Пусть $j : E \rightarrow \tilde{E}$ — соответствующая изометрия. Определим векторные операции в \tilde{E} . Пусть $\xi, \eta \in \tilde{E}$ и $(f_n), (g_n)$ последовательности в E такие, что $j(f_n) \rightarrow \xi, j(g_n) \rightarrow \eta$ по метрике δ . Положим

$$\xi + \eta \equiv \lim j(f_n + g_n), \quad \lambda\xi \equiv \lim j(\lambda f_n) \quad (\lambda \in \Lambda).$$

Введённые операции определяют в \tilde{E} структуру векторного пространства (!). Определим норму $\|\cdot\|^\sim$ на \tilde{E} равенством: $\|\xi\|^\sim \equiv \delta(\xi, \theta)$ ($\xi \in \tilde{E}$). {Пусть $j(f_n) \rightarrow \xi$ ($f_n \in E$). Тогда

$$\begin{aligned} \|\lambda\xi\|^\sim &= \delta(\lambda\xi, \theta) = \lim_n \delta(j(\lambda f_n), \theta) = \lim_n d(\lambda f_n, \theta) = \lim_n \|\lambda f_n\| \\ &= |\lambda| \lim_n \|f_n\| = |\lambda| \lim_n \delta(j(f_n), \theta) = |\lambda| \|\xi\|^\sim. \end{aligned}$$

Остальные аксиомы нормы следуют из соответствующих аксиом метрики.} Таким образом, $(\tilde{E}, \|\cdot\|^\sim)$ — искомое пополнение нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$. □

Рассмотрим приложение процедуры пополнения нормированного пространства к простейшей теореме вложения.

3. Пусть $C^1[a, b]$ — нормированное пространство гладких функций на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$\|u\| \equiv \left[\int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b |u'(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Это не полное пространство. Его пополнение обозначается символом $H^1[a, b]$ (или $W_2^1[a, b]$).

4. Пусть $(u_n) \subset C^1[a, b]$ — фундаментальная по норме H^1 последовательность. Тогда (u_n) фундаментальна в пространстве $L^2[a, b]$ (т.к. $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|$) и, следовательно, u_n сходится в $L^2[a, b]$ к некоторой функции u . Аналогично u'_n сходится по норме $\|\cdot\|_2$ к некоторой функции $w \in L^2[a, b]$; функция w называется *производной Соболева* функции u .

5. З а м е ч а н и е. Производная Соболева определяется глобально — сразу на всём отрезке (в отличие от локального определения обычной производной).

6. Существует вложение пространства $H^1[a, b]$ в банахово пространство $C[a, b]$ (с *суп-нормой*).

¶ Для заданной функции $u \in C^1[a, b]$ по теореме о среднем 50.4 существует $c \in [a, b]$ такое, что $\int_a^b u(s) ds = (b-a)u(c)$. Тогда

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_c^x u'(s) ds + u(c) = \int_c^x u'(s) ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds \Rightarrow \\ |u(x)| &\leq \left| \int_c^x u'(s) ds \right| + \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b u(s) ds \right| \\ &\leq \sqrt{b-a} \cdot \left[\left| \int_c^x |u'(s)|^2 ds \right| \right]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left[\int_a^b |u(s)|^2 ds \right]^{1/2} \\ &\leq K \|u\|, \text{ где } K = \sqrt{2} \max\{(b-a)^{1/2}, (b-a)^{-1/2}\} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\|u\|_{[a,b]} \equiv \max_{x \in [a,b]} |u(x)| \leq K \|u\|. \quad (*)$$

Напомним, что каждый элемент $\xi \in H^1[a, b]$ — это класс эквивалентных $\|\cdot\|$ -фундаментальных последовательностей. Пусть $(u_n) \in \xi$ $\|\cdot\|$ -фундаментальна в $C^1[a, b]$. Положим

$$(j(\xi))(x) \equiv \lim_n u_n(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Из оценки (*) следует, что $(u_n) - \|\cdot\|_{[a,b]}$ -фундаментальна. Поэтому $j(\xi) \in C[a, b]$. Таким образом определённое отображение $j : H^1 \rightarrow C[a, b]$, очевидно, линейно, причём $\|j(\xi)\|_{[a,b]} \leq K \|\xi\|$, т. е. $j \in L(H^1, C[a, b])$.

Убедимся, что j — инъекция. Достаточно показать, что $j(\xi) = \theta \Rightarrow \xi = \theta$. Пусть $j(\xi) = \theta$ и $(u_n) \in \xi$ $\|\cdot\|$ -фундаментальна в $C^1[a, b]$. Из (*) следует, что $u_n \Rightarrow 0$ (а значит, $\|u_n\|_2 \rightarrow 0$); кроме того, u'_n $\|\cdot\|_2$ -фундаментальна и, следовательно, существует функция $w \in L^2[a, b]$ такая, что $u'_n \rightarrow w$ по норме $\|\cdot\|_2$. Мы установим, что $\xi = \theta$, если покажем, что $w = 0$ п. в. Действительно,

$$\begin{aligned} \|u'_n - w\|_2 \rightarrow 0 &\Rightarrow \|u'_n - w\|_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b] \left(\int_a^x u'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x w(t) dt \right) \\ &\Rightarrow \int_a^x w(t) dt = \lim_n \int_a^x u'_n(t) dt = \lim_n [u_n(x) - u_n(a)] = 0. \end{aligned}$$

Функция $\nu[a, x] \equiv \int_a^x w(t) dt$ порождает σ -аддитивный заряд, абсолютно непрерывный относительно меры Лебега. По теореме Радона-Никодима $w = 0$ п. в. \square

§225. Сопряжённое пространство

1. Пусть E — нормированное пространство над полем $\Lambda (= \mathbb{C}$ или $\mathbb{R})$. пространство $L(E, \Lambda)$ (см. 223.1) называется *сопряжённым* к пространству E и обозначается E^* . Элементами E^* являются линейные ограниченные отображения $\varphi : E \rightarrow \Lambda$, называемые *линейными ограниченными функционалами*. В соответствии с 223.4 норма функционала $\varphi \in E^*$ вычисляется по формулам:

$$\|\varphi\| \equiv \inf\{C > 0 : |\varphi(f)| \leq C\|f\| \ (f \in E)\} = \sup_{\|f\| \leq 1} |\varphi(f)| = \sup_{\|f\|=1} |\varphi(f)|.$$

В силу 223.6 E^* является банаховым пространством.

Примеры. 2. В пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$ с \sup -нормой отображение $\varphi(f) = f(0)$ ($f \in C[0, 1]$) является ограниченным линейным функционалом, причём $\|\varphi\| = 1$. Этот линейный функционал, однако, не является ограниченным, если $C[0, 1]$ снабжено нормой $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

3. Пусть E — конечномерное нормированное пространство, $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в E , то есть каждый вектор $f \in E$ однозначно представим в виде $f = \sum_{k=1}^n f^k e_k$ ($f^k \in \Lambda$). Пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ — фиксированный набор скаляров, так что $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Lambda^n$. Тогда формула

$$\varphi_\xi(f) = \sum_{k=1}^n f^k \xi_k \quad (f = (f^1, \dots, f^n) \in E)$$

определяет $\varphi_\xi \in E^*$. Обратно, если $\varphi \in E^*$, то, полагая $\xi_k = \varphi(e_k)$ ($1 \leq k \leq n$), получим $\varphi(f) = \varphi(\sum_{k=1}^n f^k e_k) = \sum_{k=1}^n f^k \varphi(e_k) = \varphi_\xi(f)$ ($f \in E$). Итак, мы получили соответствие (очевидно, биективное) $\xi \rightarrow \varphi_\xi$ между пространствами Λ^n и E^* . Это соответствие линейно, так что E^* алгебраически изоморфно векторному пространству Λ^n . Если в Λ^n ввести норму $\|\xi\| \equiv \|\varphi_\xi\|$ ($\xi \in \Lambda^n$), то $E^* \simeq \Lambda^n$.

В примере 3 мы разобрали частный случай классической задачи нахождения сопряжённого пространства к данному нормированному пространству E . Эта задача известна как задача нахождения общего вида линейного функционала; она состоит в отыскании конкретного банахова пространства изометрически изоморфного пространству E^* . Ниже мы проиллюстрируем решение этой задачи для пространств $L^p(\mu)$.

Упражнение 4. Для конечномерного пространства \mathbb{C}^n , снабжённого нормой $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) (см. 220.7), вычислите норму в пространстве $(\mathbb{C}^n)^*$.

§226. $L^p(\mu)^*$ ($1 \leq p < \infty$)

Рассмотрим пространство (E, \mathfrak{A}, μ) с полной конечной мерой μ . Пусть $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) — шкала банаховых пространств над полем \mathbb{C} в условиях и обозначениях 221.1.

1. Пусть $g \in L^\infty(\mu)$ и отображение $\varphi_g : L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ задано формулой

$$\varphi_g(f) \equiv \int f g d\mu \quad (f \in L^1(\mu)).$$

Тогда $\varphi_g \in L^1(\mu)^*$, причём $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

¶ Отображение φ_g корректно задано, линейно и ограничено:

$$|\varphi_g(f)| = \left| \int f g d\mu \right| \leq \|g\|_\infty \cdot \int |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1 \quad (f \in L^1(\mu)).$$

Из полученного неравенства следует также, что $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_\infty$; для доказательства обратного неравенства достаточно считать, что $g \neq \theta$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, $0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$. Обозначим $X_\varepsilon = \{x \in E : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Из определения нормы $\|\cdot\|_\infty$ (см. 221.1) следует, что $\mu X_\varepsilon > 0$. Положим $f_\varepsilon = \frac{\bar{g}}{|g|\mu X_\varepsilon} \chi_{X_\varepsilon}$ (отметим, что $\|f_\varepsilon\|_1 = \int |f_\varepsilon| d\mu = 1$). Тогда

$$\|\varphi_g\| = \sup_{\|f\|_1 \leq 1} |\varphi(f)| \geq |\varphi_g(f_\varepsilon)| = \left| \int f_\varepsilon g d\mu \right| = \frac{1}{\mu X_\varepsilon} \cdot \int_{X_\varepsilon} |g| d\mu \geq \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Из произвольности ε : $\|\varphi_g\| \geq \|g\|_\infty$. \square

2. $L^1(\mu)^* \simeq L^\infty(\mu)$.

¶ В силу п. 1 определено изометрическое отображение $g \rightarrow \varphi_g$ пространства $L^\infty(\mu)$ в $L^1(\mu)^*$. Покажем, что это отображение сюръективно. Пусть $\varphi \in L^1(\mu)^*$. Положим

$$\mu_\varphi(X) \equiv \varphi(\chi_X) \quad (X \in \mathfrak{A}). \quad (1)$$

Убедимся, что μ_φ — заряд. Пусть $X = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$ ($X, X_j \in \mathfrak{A}$). Тогда последовательность $\sum_{j=1}^n \chi_{X_j}$ сходится по норме $\|\cdot\|_1$ к χ_X , так как

$$\int \left| \chi_X - \sum_{j=1}^n \chi_{X_j} \right| d\mu = \int_{\sum_{j=n+1}^{\infty} X_j} d\mu = \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu X_j \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Поскольку $\varphi \in L^1(\mu)^*$, имеем

$$\mu_\varphi(X) = \varphi(\chi_X) = \lim_n \varphi\left(\chi_{\sum_{j=1}^n X_j}\right) = \lim_n \varphi\left(\sum_{j=1}^n \chi_{X_j}\right) = \lim_n \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{X_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\varphi(X_j).$$

Заметим, что заряд μ_φ абсолютно непрерывен относительно μ . (Действительно, $\mu Y = 0 \Rightarrow \chi_Y = 0$ п. в. $\Rightarrow \mu_\varphi(Y) = \varphi(\chi_Y) = \varphi(\theta) = 0$.) По теореме Радона-Никодима существует (и определена однозначно) функция $g \in L^1(\mu)$ такая, что

$$\mu_\varphi(X) = \int_X g d\mu \quad (X \in \mathfrak{A}) \quad (2)$$

(отметим, что здесь не вызывает затруднений случай комплексных функций). Будем считать, что $g \geq 0$ (иначе заряд μ_φ представим в виде $\mu_\varphi = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$, и можно рассмотреть меры μ_k^\pm по отдельности). Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно установить:

$$(a) \quad g \in L^\infty(\mu),$$

$$(б) \quad \varphi(f) = \int fg \, d\mu \quad (f \in L^1(\mu)).$$

Если (а) не верно, то последовательность множеств $X_n = \{x \in E : g(x) > n\}$ такова, что $\mu X_n > 0$, $\mu X_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) (!!). Положим $h_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu X_n} \cdot \chi_{X_n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда $\|h_n\|_1 = \int |h_n| \, d\mu = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), но

$$\varphi(h_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu X_n} \varphi(\chi_{X_n}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mu X_n} \int_{X_n} g \, d\mu \geq 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

что противоречит непрерывности φ . Итак, $g \in L^\infty(\mu)$.

Для проверки (б) заметим сначала, что равенство $\psi(f) \equiv \int fg \, d\mu$ ($f \in L^1(\mu)$) в силу п. 1 корректно определяет функционал $\psi \in L^1(\mu)^*$, и нужно лишь установить, что $\psi = \varphi$. Отметим, что $\psi = \varphi$ на классе \mathcal{K} конечно-значных простых функций:

$$\begin{aligned} \psi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{X_j}\right) &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \psi(\chi_{X_j}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \int \chi_{X_j} g \, d\mu = \sum_{j=1}^n \lambda_j \int_{X_j} g \, d\mu \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_\varphi(X_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(\chi_{X_j}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{X_j}\right). \end{aligned}$$

Если теперь $f \in L^1(\mu)$ произвольна, то существует последовательность $f_n \in \mathcal{K}$ такая, что $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ (см. 215.9). Следовательно, $\varphi(f) = \lim_n \varphi(f_n) = \lim_n \psi(f_n) = \psi(f)$. \square

3. $L^p(\mu)^* \simeq L^q(\mu)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < +\infty$). В частности, $L^2(\mu)^* \simeq L^2(\mu)$.

¶ Для $g \in L^q(\mu)$ зададим линейный функционал $\varphi_g : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ (здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) равенством $\varphi_g(f) = \int fg \, d\mu$. В силу 221.7 $fg \in L^1(\mu)$, и значит, φ_g корректно задан. При этом $|\varphi_g(f)| \leq \int |fg| \, d\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p$. Отсюда φ_g ограничен и $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$. Взяв $f_0 = \frac{\bar{g}|g|^{(q/p)-1}}{\| |g|^{q/p} \|_p} \in L^p(\mu)$, имеем $\|f_0\|_p = 1$, так что $\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f_0)| = \|g\|_q$. Итак, отображение $g \rightarrow \varphi_g$ ($g \in L^q(\mu)$) является изометрическим отображением $L^q(\mu)$ в $L^p(\mu)^*$. Осталось убедиться, что это отображение является сюръекцией. Пусть $\varphi \in L^p(\mu)^*$. Аналогично доказательству п. 1 устанавливаем, что (1) определяет на \mathfrak{A} заряд абсолютно непрерывный относительно μ , и по теореме Радона-Никодима получаем формулу (2) (!!). По-прежнему будем считать, что $g \geq 0$. Убедимся, что

$g \in L^q(\mu)$ (тогда равенство $\varphi = \varphi_g$ снова получается приведённым выше способом (!!)). Для этого положим $g_n = g \cdot \chi_{g^{-1}[0, n]}$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда $g_n^q \rightarrow g^q$, и по теореме Фату нам нужно лишь показать, что интегралы $\int g_n^q d\mu$ ограничены в совокупности. Имеем:

$$\begin{aligned} \int g_n^q d\mu &= \int g_n^{q-1} g_n d\mu = \int g_n^{q-1} g d\mu = \varphi(g_n^{q-1}) \leq \|\varphi\| \|g_n^{q-1}\|_p \\ &= \|\varphi\| \left[\int g_n^{p(q-1)} d\mu \right]^{1/p} = \|\varphi\| \left[\int g_n^q d\mu \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда $\int g_n^q d\mu \leq \|\varphi\|^q$ ($n \in \mathbb{N}$). \square

4. У п р а ж н е н и е. Покажите, что в обозначениях 221.10 $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$, $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < +\infty$).

§227. Продолжение ограниченных линейных отображений по непрерывности

Т е о р е м а. Пусть E — нормированное пространство и X — линейал, плотный в E . Пусть F — банахово пространство и $A : X \rightarrow F$ — ограниченное линейное отображение. Тогда существует и определено однозначно отображение $\tilde{A} \in L(E, F)$ со свойствами:

- а) $\tilde{A}|_X = A$,
- б) $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

¶ Пусть $f \in E$ произволен и f_n — произвольная последовательность такая, что $f_n \rightarrow f$. Положим $\tilde{A}f \equiv \lim_n Af_n$. Остаётся проверить, что \tilde{A} — корректно определённый элемент из $L(E, F)$, удовлетворяющий условиям а) и б). Отметим сначала, что $\lim_n Af_n$ существует, так как (Af_n) — фундаментальная последовательность в банаховом пространстве F :

$$\|Af_n - Af_m\| = \|A(f_n - f_m)\| \leq \|A\| \|f_n - f_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow +\infty).$$

Этот предел не зависит от выбора последовательности (f_n) , сходящейся к f (!!). Из арифметических свойств предела следует, что \tilde{A} — линейное отображение из E в F . Условие а) выполнено по построению. Наконец,

$$\|\tilde{A}f\| = \lim_n \|Af_n\| \leq \lim_n \|A\| \|f_n\| = \|A\| \|f\| \quad (f \in E),$$

откуда следует, что \tilde{A} — ограниченный линейный оператор и $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. Обратное неравенство $\|\tilde{A}\| \geq \|A\|$ следует из того, что \tilde{A} — продолжение A . \square

§228. Теорема Хана-Банаха

Теорема Хана-Банаха устанавливает возможность продолжения функционала с подпространства на всё пространство с сохранением определённых свойств. Отметим, например, что с помощью этой теоремы можно ответить (положительно) на

следующий вопрос: существует ли хотя бы один ненулевой ограниченный линейный функционал на произвольном нормированном пространстве $E (\neq \{\theta\})$?

1. Теорема. [Г.Хан, С.Банах]. Пусть E — векторное пространство над полем $\Lambda (= \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{R})$ и $\|\cdot\|$ — полунорма на E (см. 148.5), X — линеал в E и $\varphi : X \rightarrow \Lambda$ — линейный функционал такой, что $|\varphi(f)| \leq \|f\|$ ($f \in X$). Тогда существует линейный функционал $\psi : E \rightarrow \Lambda$ такой, что

$$\text{а) } \psi|_X = \varphi,$$

$$\text{б) } |\psi(f)| \leq \|f\| \quad (f \in E).$$

¶ Ради технической простоты, доказательство проведём для вещественного поля ($\Lambda = \mathbb{R}$). Пусть $g \in E \setminus X$ и $Y = \{\lambda g + f \mid f \in X\}$ — линеал, порождённый вектором g и линеалом X . Продолжим функционал φ на Y так, чтобы $|\varphi(h)| \leq \|h\|$ ($h \in Y$). Для этого возьмём произвольные векторы $f_1, f_2 \in X$ и заметим, что

$$\varphi(f_1) + \varphi(f_2) = \varphi(f_1 + f_2) \leq \|f_1 + f_2\| \leq \|f_1 - g\| + \|f_2 + g\|,$$

откуда $\varphi(f_1) - \|f_1 - g\| \leq \|f_2 + g\| - \varphi(f_2)$. Поэтому

$$\sup_{f_1 \in X} [\varphi(f_1) - \|f_1 - g\|] \leq \inf_{f_2 \in X} [\|f_2 + g\| - \varphi(f_2)].$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число такое, что

$$\sup_{f \in X} [\varphi(f) - \|f - g\|] \leq \alpha \leq \inf_{f \in X} [\|f + g\| - \varphi(f)]. \quad (*)$$

Положим $\tilde{\varphi}(\lambda g + f) \equiv \lambda \alpha + \varphi(f)$ ($f \in X, \lambda \in \mathbb{R}$) и убедимся, что $\tilde{\varphi}$ — искомое продолжение φ на линеал Y . Действительно, если, например, $\lambda > 0$, то в силу (*)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda g + f) &= \lambda[\alpha + \varphi(\frac{1}{\lambda}f)] \leq \lambda[\|g + \frac{1}{\lambda}f\| - \varphi(\frac{1}{\lambda}f) + \varphi(\frac{1}{\lambda}f)] = \|\lambda g + f\|, \\ \tilde{\varphi}(\lambda g + f) &\geq \lambda[\varphi(-\frac{1}{\lambda}f) - \|- \frac{1}{\lambda}f - g\|] + \varphi(f) = -\|\lambda g + f\|, \end{aligned}$$

так что $|\tilde{\varphi}(\lambda g + f)| \leq \|\lambda g + f\|$ ($f \in X, \lambda \in \mathbb{R}$). Аналогично рассматривается случай $\lambda < 0$ (!).

Завершение доказательства основано на применении теоремы Цорна (прил. III, п. 11). Пусть $\{\varphi_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}\}$ — множество всех продолжений функционала φ , удовлетворяющих условию

$$|\varphi_i(f)| \leq \|f\| \quad (f \in X_i)$$

(здесь, естественно, $X_i \supset X$, $\varphi_i(f) = \varphi(f)$ ($f \in X$)). Введём в этом множестве порядок: $\varphi_i \geq \varphi_k$, если $X_i \supset X_k$ и $\varphi_i(f) = \varphi_k(f)$ ($f \in X_k$). Все аксиомы порядка на самом деле выполнены (!!). Проверим, что множество (φ_i) индуктивно. Пусть $(\varphi_j)_{j \in J}$ — совершенно упорядоченное подмножество множества (φ_i) . Определим на линеале $X_0 \equiv \bigcup_{j \in J} X_j$ линейный функционал $\varphi_0(f) \equiv \varphi_j(f)$, если $f \in X_j$. Функцио-

нал φ_0 определён корректно: если $f \in X_{j_1} \cap X_{j_2}$ ($j_1, j_2 \in J$), то в силу совершенной упорядоченности семейства $(\varphi_j)_{j \in J} : \varphi_{j_1} \leq \varphi_{j_2}$, либо $\varphi_{j_2} \leq \varphi_{j_1}$. Пусть, например, $\varphi_{j_2} \leq \varphi_{j_1}$. Тогда $X_{j_2} \subset X_{j_1}$ и $\varphi_{j_1}(f) = \varphi_{j_2}(f)$ ($f \in X_{j_2}$). При этом φ_0 — мажоранта семейства $(\varphi_j)_{j \in J}$, и индуктивность (φ_i) установлена. По теореме Цорна существует максимальное продолжение функционала φ , то есть линейный функционал

$\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$, где Y — линейал в E , причём $\psi|X = \varphi$, $|\psi(f)| \leq \|f\|$ ($f \in Y$). Если $Y \neq E$, то существует $g \in E \setminus Y$ и, применяя к ψ конструкцию, изложенную в начале доказательства, продолжим ψ на линейал $\{\lambda g + f \mid f \in Y, \lambda \in \mathbb{R}\}$ в противоречие с максимальнойностью ψ . \square

Отметим ряд следствий теоремы Хана-Банаха для нормированных пространств.

2. Пусть X — линейал в нормированном пространстве E и φ — ограниченный линейный функционал на X . Тогда существует $\psi \in E^*$ такой, что $\psi|X = \varphi$, $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

¶ Определим на векторном пространстве E выпуклую функцию $\|f\|^\sim \equiv \|\varphi\| \|f\|$, где $\|f\|$ — норма вектора f в нормированном пространстве E , а $\|\varphi\|$ — норма функционала $\varphi \in X^*$. Применим п. 1 к $(E, \|\cdot\|^\sim)$ и функционалу φ : существует линейный функционал ψ на E такой, что

$$\psi|X = \varphi, \quad |\psi(f)| \leq \|f\|^\sim = \|\varphi\| \|f\| \quad (f \in E).$$

Отсюда следует, что $\psi \in E^*$ и $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$. Неравенство $\|\psi\| \geq \|\varphi\|$ следует из того, что ψ — продолжение φ . \square

3. Пусть E — нормированное пространство, $\theta \neq f \in E$. Тогда существует $\psi \in E^*$ такой, что $\|\psi\| = 1$, $\psi(f) = \|f\|$.

¶ Положим $X = \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\varphi(\lambda f) \equiv \lambda \|f\|$ ($\lambda f \in X$). Тогда $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$. Остаётся применить п. 2. \square

4. Если нормированное пространство E нетривиально, то нетривиально и пространство E^* .

¶ Это следствие п. 3. \square

5. Пусть X — линейал в нормированном пространстве E , $g \in E \setminus X$ и $\alpha \equiv \inf_{f \in X} \|g + f\| > 0$. Тогда существует функционал $\psi \in E^*$ такой, что $\psi(g) = \alpha$ и $\psi(f) = 0$ ($f \in X$).

¶ Рассмотрим линейал $Y = \{\lambda g + f : f \in X, \lambda \in \mathbb{R}\}$ и определим на нём функционал $\varphi(\lambda g + f) \equiv \lambda \alpha$. Из оценки (при $\lambda \neq 0$)

$$|\varphi(\lambda g + f)| = |\lambda| \alpha = |\lambda| \inf_{h \in X} \|g + h\| \leq |\lambda| \|g + \frac{1}{\lambda} f\| = \|\lambda g + f\|$$

следует, что $\varphi \in Y^*$. В качестве ψ возьмем продолжение φ по п. 2. \square

6. У п р а ж н е н и е. Завершите доказательство теоремы Хана-Банаха в случае сепарабельного нормированного пространства E , не используя теорему Цорна (указание: использовать теорему §227).

§229. Второе сопряжённое пространство

1. Пусть E — нормированное пространство и E^* — сопряжённое к нему пространство, являющееся банаховым (см. 223.6). Можно рассмотреть сопряжённое к пространству E^* ; оно называется вторым сопряжённым к пространству E . Таким образом, по определению $E^{**} \equiv (E^*)^*$. (Можно, разумеется, продолжить процесс и рассмотреть E^{***} , E^{****} и т. д.)

2. Между исходным пространством E и его вторым сопряжённым имеется тесная связь. Чтобы проанализировать её, введём отображение $\hat{\cdot} : E \rightarrow E^{**}$ (оно часто называется каноническим), сопоставляющее каждому элементу $f \in E$ элемент $\hat{f} \in E^{**}$, действующий по формуле

$$\hat{f}(\varphi) \equiv \varphi(f) \quad (\varphi \in E^*). \quad (1)$$

В самом деле, \hat{f} — ограниченный линейный функционал на банаховом пространстве E^* , так как $|\hat{f}(\varphi)| = |\varphi(f)| \leq \|f\| \|\varphi\|$ ($\varphi \in E^*$).

3. Каноническое отображение $\hat{\cdot} : E \rightarrow E^{**}$ — изометрия.

¶ В соответствии с определением 223.7 нужно убедиться, что отображение $\hat{\cdot}$ сохраняет норму. Из (2) следует, что $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$. Обратно, пусть $f \neq \theta$ и $\varphi_0 \in E^*$ такой, что $\|\varphi_0\| = 1$ и $\varphi_0(f) = \|f\|$ (φ_0 существует в силу 228.3). Тогда из равенства $|\hat{f}(\varphi_0)| = |\varphi_0(f)| = \|f\|$ следует, что $\|\hat{f}\| \geq \|f\|$. □

4. Банахово пространство E называется *рефлексивным*, если $\hat{\cdot} : E \rightarrow E^{**}$ — изометрический изоморфизм E на E^{**} .

Примеры рефлексивных банаховых пространств: евклидовы пространства \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , пространства $L^p(\mu)$ ($1 < p < \infty$).

У п р а ж н е н и я 5. Покажите, что каждое конечномерное нормированное пространство рефлексивно.

6. Убедитесь, что пространство c_0 всех комплексных последовательностей $f = (f^1, f^2, \dots)$ со свойством $\lim_n f^n = 0$ и с нормой $\|f\| \equiv \sup_n |f^n|$, — не рефлексивное банахово пространство.

7. Пусть E — банахово пространство, причём E^* рефлексивно. Покажите, что E также рефлексивно.

§230. Теорема Банаха-Штейнгауза

1. [Принцип равномерной ограниченности]. Пусть E — банахово пространство, F — нормированное пространство, $\mathcal{F} \subset L(E, F)$, причём $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tf\| < +\infty$ при каждом $f \in E$. Тогда $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| < +\infty$.

¶ Положим $A_n = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} \{f : \|Tf\| \leq n\}$. Тогда

(i) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, (ii) каждое A_n замкнуто.

По теореме Бэра 217.4 какое-либо A_n имеет непустую внутренность: $A_n^\circ \neq \emptyset$. Пусть $B_\varepsilon(a) \subset A_n^\circ$. Существует N_1 такое, что $B_\varepsilon(\theta) \subset A_{N_1}^\circ$. {Пусть $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Ta\| < k$ ($\in \mathbb{N}$); полагая $N_1 = n + k$, имеем (так как $f + a \in B_\varepsilon(a)$):

$$\|f\| < \varepsilon \Rightarrow \|Tf\| \leq \|T(f + a)\| + \|Ta\| \leq n + k.$$

Теперь

$$T \in \mathcal{F} \Rightarrow \|T\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Tf\| = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sup_{\|f\| \leq 1} \|T(\varepsilon f)\| \leq N_1/\varepsilon. \quad \square$$

Рассмотрим ряд важных следствий.

2. Пусть E, F — банаховы пространства, $X(\subset E)$ — линейный плотный в E и $T_n \in L(E, F)$ — последовательность линейных ограниченных операторов. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $\lim_n T_n f$ существует в каждой точке $f \in E$,
- (ii) $\lim_n T_n f$ существует в каждой точке $f \in X$ и $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

¶ (i) \Rightarrow (ii) в силу п. 1.

(ii) \Rightarrow (i). Пусть $M = \sup_n \|T_n\|$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть $f_0 \in E \setminus X$ и $f \in X$ таково, что $\|f - f_0\| \leq \varepsilon/2M$; пусть N таково, что $\|(T_n - T_m)f\| < \varepsilon$ ($n, m > N$). Тогда для $n, m > N$

$$\begin{aligned} \|T_n f_0 - T_m f_0\| &\leq \|(T_n - T_m)(f_0 - f)\| + \|(T_n - T_m)f\| \\ &\leq \|(T_n - T_m)(f_0 - f)\| + \varepsilon \leq 2M \cdot (\varepsilon/2M) + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

3. Пусть E, F — нормированные пространства, отображение $a : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ назовём 2-линейным, если линейны отображения $a(f, \cdot) : F \rightarrow \mathbb{C}$, $a(\cdot, g) : E \rightarrow \mathbb{C}$ ($f \in E, g \in F$).

4. Пусть E, F — банаховы пространства, $a : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ — 2-линейное отображение, и при фиксированных $f \in E, g \in F$ отображения $a(f, \cdot) : F \rightarrow \mathbb{C}$, $a(\cdot, g) : E \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывны. Тогда a непрерывно (по совокупности переменных).

¶ Достаточно установить, что если $f_n \rightarrow \theta, g_n \rightarrow \theta$ ($f_n \in E, g_n \in F$), то $a(f_n, g_n) \rightarrow 0$ (!). Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ положим $T_n = a(f_n, \cdot) : F \rightarrow \mathbb{C}$. Это последовательность ограниченных линейных функционалов, причём (так как $a(\cdot, g)$ непрерывны) $\lim_n |T_n(g)| = \lim_n |a(f_n, g)| = 0$ для любого $g \in F$. Поэтому $\sup_n |T_n(g)| < +\infty$ ($g \in F$). По теореме Банаха-Штейнгауза $K \equiv \sup_n \|T_n\| < +\infty$, так что $|a(f_n, g_n)| = |T_n(g_n)| \leq K \|g_n\| \rightarrow 0$. \square

5. У п р а ж н е н и е. Приведите пример, показывающий, что требование полноты пространства E в теореме п. 1 не может быть опущено.

§231. Теорема Банаха об открытом отображении

1. Т е о р е м а. [С. Банах]. Если E, F банаховы пространства, $T : E \rightarrow F$ — ограниченная линейная сюръекция, то образ каждого открытого множества при отображении T открыт в F .

¶ Пусть $B_r = B_r(\theta) \subset E$ ($r > 0$); по условию $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n)^-$. По теореме Бэра $\exists n \in \mathbb{N}$ ($T(B_n)^{\circ} \neq \emptyset$). Поэтому

$$\exists \xi \in T(B_n)^- \quad \exists \varepsilon > 0 \quad (B_\varepsilon(\xi) \subset T(B_n)^-). \quad (*)$$

План доказательства:

- (i) установим, что $\exists \delta > 0$ ($B_\delta(\theta_F) \subset T(B_1)^-$);
- (ii) покажем, что $T(B_1)^- \subset T(B_2)$;
- (iii) заметим, что $\forall \varepsilon > 0$ ($T(B_\varepsilon)^{\circ} \neq \emptyset$);

(iv) наконец, выведем, что для каждого открытого $U(\subset E)$ множество $T(U)$ открыто в F .

(i) следует из (*): $B_\varepsilon(\xi) \subset T(B_n)^-, \xi = Tg \Rightarrow B_\varepsilon(\theta) \subset T(B_n(-g))^- \subset T(B_{n+\|g\|})^-$ и можно положить $\delta = \frac{\varepsilon}{n + \|g\|}$.

(ii) $\eta \in T(B_1)^- \Rightarrow \exists f_1 \in B_1 (\|\eta - Tf_1\| < \delta/2) \Rightarrow \eta - Tf_1 \in T(B_{1/2})^- \Rightarrow \exists f_2 \in B_{1/2} (\|\eta - Tf_1 - Tf_2\| < \delta/2^2) \Rightarrow \eta - Tf_1 - Tf_2 \in T(B_{1/4})^-$.

Продолжая процесс, получим $\exists f_n \in B_{2^{-n}} (\|\eta - Tf_1 - \dots - Tf_n\| < \delta \cdot 2^{-n}) \Rightarrow \eta - Tf_1 - \dots - Tf_n \in T(B_{2^{-n}})^-$. Поэтому $f \equiv \sum_{i=1}^{\infty} f_i \in B_2 \Rightarrow \eta = \sum_{i=1}^{\infty} Tf_i = Tf \in B_2$.

(iii) следует из (ii): $T(B_n)^- \subset T(B_{2n}) \Rightarrow T(B_{2n})^\circ \neq \emptyset \Rightarrow T(B_\varepsilon)^\circ = \frac{\varepsilon}{2n} T(B_{2n})^\circ \neq \emptyset$.

(iv) $\eta \in T(U) \Rightarrow \eta = Tf, f \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(f) \subset U) \Rightarrow$ (см. (iii)) $\eta + T(B_\varepsilon)^\circ \subset T(U)$. \square

Получим теперь ряд следствий доказанной теоремы.

2. [Непрерывность обратного отображения]. Пусть $T : E \rightarrow F$ — непрерывное биективное линейное отображение банахова пространства E на банахово пространство F . Тогда T обратимо.

¶ Для любого открытого множества $U(\subset E)$ открыто множество $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$, то есть T^{-1} непрерывно. \square

3. Пусть E — банахово пространство относительно каждой из двух норм $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, причём $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$. Тогда существует $C > 0$ такое, что $\|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$.

¶ Рассмотрим тождественное отображение $i : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$; оно непрерывно $\{f_n \rightarrow \theta \text{ по норме } \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|if_n\|_1 = \|f_n\|_1 \leq \|f_n\|_2 \rightarrow 0\} \Rightarrow$ (см. п. 2) обратное (также тождественное) отображение $j : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ непрерывно $\Rightarrow \|f\|_2 = \|jf\|_2 \leq C\|f\|_1$, где $C = \|j\|$. \square

4. Пусть E, F — банаховы пространства, $T : E \rightarrow F$ — линейно. Графиком оператора T называется множество

$$\Gamma(T) \equiv \{ \{f, Tf\} : f \in E \} (\subset E \oplus F).$$

5. [Теорема о замкнутом графике]. Пусть E, F — банаховы пространства, $T : E \rightarrow F$ — линейно. Отображение T ограничено тогда $\Gamma(T)$ замкнуто в $E \oplus F$.

¶ Необходимость очевидна (!!). Достаточность. Пусть $\Gamma(T)$ замкнуто. Тогда $\Gamma(T)$ — банахово подпространство пространства $E \oplus F$. Пусть $p_1 : \Gamma(T) \rightarrow E, p_2 : \Gamma(T) \rightarrow F$ — канонические проекции (см. 99.6), $p_1 : \Gamma(T) \rightarrow E$ — биекция и по п. 2 непрерывно отображение p_1^{-1} , а значит, и $T = p_2 \circ p_1^{-1}$. \square

6. З а м е ч а н и е. Рассмотрим 3 утверждения:

- (а) $f_n \rightarrow f$;
- (б) $Tf_n \rightarrow g$;
- (в) $Tf = g$.

Доказать непрерывность T — значит показать, что из (а) следует (б) и (в). Если воспользоваться теоремой п. 5 то достаточно для этого показать, что из (а) и (б) следует (в).

ОГРАНИЧЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§232. Теорема об ортогональном разложении

1. Напомним (см. 154.1), что гильбертовым пространством называется унитарное пространство, полное относительно нормы, определяемой скалярным произведением. Замкнутый линеал в гильбертовом пространстве называется *подпространством*. Подпространство — само гильбертово пространство относительно индуцированного скалярного произведения. *Несобственное* подпространство — это само пространство, все остальные подпространства называются *собственными*. *Тривиальное* подпространство — это подпространство $\{\theta\}$, состоящее из нулевого вектора, все остальные подпространства называются *нетривиальными*.

2. Пусть H — гильбертово пространство, K — его подпространство, $f \in H$. Тогда существует и единствен элемент $g_0 \in K$ наилучшего приближения относительно K (см. 220.5).

¶ СУЩЕСТВОВАНИЕ. Пусть $d = \inf_{g \in K} \|f - g\|$ и $g_n \in K$ таковы, что $d = \lim_n \|f - g_n\|$. Последовательность (g_n) фундаментальна:

$$\begin{aligned} \|g_n - g_m\|^2 &= \|(g_n - f) - (g_m - f)\|^2 \\ &= 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - \|2f - g_n - g_m\|^2 \\ &= 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4\|f - \frac{1}{2}(g_n + g_m)\|^2 \\ &\leq 2\|g_n - f\|^2 + 2\|g_m - f\|^2 - 4d^2 \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(во втором равенстве использовано равенство параллелограмма 152.10(ii)). Следовательно, существует $g_0 = \lim_n g_n$ и $d = \|f - g_0\|$.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ: Пусть $f_0 \in K$ — ещё один элемент наилучшего приближения: $d = \|f - f_0\|$. Тогда

$$d \leq \|f - \frac{f_0 + g_0}{2}\| \leq \frac{1}{2}[\|f - f_0\| + \|f - g_0\|] = d,$$

и с учётом 152.10(iv) $\frac{1}{2}(f - f_0) = \lambda \frac{1}{2}(f - g_0)$, $\lambda > 0$, откуда $\lambda = 1$, и значит, $f_0 = g_0$. □

3. Пусть H — гильбертово пространство, $M \subset H$. Тогда

$$M^\perp \equiv \{f \in H : \forall g \in M \ (\langle f, g \rangle = 0)\}$$

— подпространство H . Если K — подпространство H , то K^\perp называется *ортогональным дополнением* к K .

4. [Теорема об ортогональном разложении]. Пусть K — подпространство гильбертова пространства H . Тогда

- (i) каждый вектор $f \in H$ однозначно представим в виде $f = g + h$, где $g \in K$, $h \in K^\perp$,

(ii) $K = K^{\perp\perp}$.

¶ Обозначим через g элемент наилучшего приближения к f относительно K и положим $h = f - g$. Покажем, что $h \in K^\perp$. Если $d = \inf_{k \in K} \|f - k\| = \|f - g\|$, то

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|h - \frac{\langle h, k \rangle}{\|k\|^2} k\|^2 - d^2 = d^2 + \frac{|\langle h, k \rangle|^2}{\|k\|^2} - \frac{|\langle h, k \rangle|^2}{\|k\|^2} - \frac{|\langle h, k \rangle|^2}{\|k\|^2} - d^2 \\ &= -\frac{|\langle h, k \rangle|^2}{\|k\|^2} \Rightarrow \langle h, k \rangle = 0 \quad (k \in K) \Rightarrow h \in K^\perp. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что представление в (i) единственно. Пусть

$$f = g' + h', \quad \text{где } g' \in K, \quad h' \in K^\perp,$$

— ещё одно представление f . Тогда $\theta = (g - g') + (h - h')$ и, применяя теорему Пифагора 152.10(i), получаем, что $g = g'$, $h = h'$. Очевидно, $K \subset K^{\perp\perp} = \{f \in H : \forall g \in K^\perp (\langle f, g \rangle = 0)\}$. Обратно, если $f \in K^{\perp\perp}$, то в силу п. 4 $f = g + h$, где $g \in K$, $h \in K^\perp$. Умножая обе части этого равенства скалярно на h , получаем $\langle h, h \rangle = 0 \Rightarrow h = \theta \Rightarrow f = g \in K$. \square

§233. Ортогональные суммы гильбертовых пространств

1. Пусть K_1, \dots, K_n — подпространства гильбертова пространства H такие, что каждый вектор $f \in H$ представим в виде

$$f = k_1 + \dots + k_n, \quad k_j \in K_j, \quad \langle k_i, k_j \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

(В этом случае k_j определены однозначно (!!)). Тогда говорят, что H является ортогональной суммой подпространств K_j и пишут $H = K_1 \oplus \dots \oplus K_n$. В частности, $H = K \oplus K^\perp$.

2. Пусть H_j ($j = 1, \dots, n$) — гильбертовы пространства (над полем Λ). Ортогональной суммой пространств H_j называется гильбертово пространство H , элементами которого являются упорядоченные наборы (f_1, \dots, f_n) ($f_j \in H_j$) со скалярным произведением

$$\langle (f_1, \dots, f_n), (g_1, \dots, g_n) \rangle \equiv \sum_{j=1}^n \langle f_j, g_j \rangle.$$

(Мы используем прежнее обозначение $H = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$.)

Доказательство корректности данного определения проведём ниже в более общей ситуации:

3. Ортогональной суммой произвольного семейства $(H_j)_{j \in J}$ гильбертовых пространств называется гильбертово пространство H (обозначается символом $\bigoplus_{j \in J} H_j$), элементами которого являются наборы $(f_j)_{j \in J}$, обладающие свойствами:

(а) в каждом наборе не более чем счётное число элементов отлично от нуля,

(б) $\sum_{j \in J} \|f_j\|^2 < +\infty$.

Векторная структура в множестве наборов вводится естественным (покоординатным) образом, а скалярное произведение определяется формулой

$$\langle (f_j), (g_j) \rangle \equiv \sum_{j \in J} \langle f_j, g_j \rangle. \quad (*)$$

¶ Убедимся в корректности данного определения. Отметим сначала, что ряд в правой части (*) сходится абсолютно (а значит, сходится). Это следует из (а) и оценки

$$\sum_{j \in J} |\langle f_j, g_j \rangle| \leq \sum_{j \in J} \|f_j\| \cdot \|g_j\| \leq \frac{1}{2} \sum_{j \in J} [\|f_j\|^2 + \|g_j\|^2] < +\infty.$$

Из этой же оценки следует, что $f, g \in \bigoplus_{j \in J} H_j \Rightarrow f + g \in \bigoplus_{j \in J} H_j$ (!), так что $\bigoplus_{j \in J} H_j$ — векторное пространство. Проверим полноту $\bigoplus_{j \in J} H_j$. Пусть последовательность

$f^{(n)} = (f_j^{(n)})$ фундаментальна и $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда существует N такое, что $\|f^{(n)} - f^{(m)}\|^2 < \varepsilon$ при $n, m > N$. Тем более, для каждой конечной части $\sigma \subset J$: $\sum_{j \in \sigma} \|f_j^{(n)} - f_j^{(m)}\|^2 < \varepsilon$ ($n, m > N$). Так как H_j полны, существуют $f_j = \lim_n f_j^{(n)} \in H_j$ ($j \in \sigma$). Устремляя m к $+\infty$, находим $\sum_{j \in \sigma} \|f_j^{(n)} - f_j\|^2 \leq \varepsilon$ ($n > N$). Так как σ — произвольное конечное подсемейство J , имеем с учётом требования (а): $\sum_{j \in J} \|f_j^{(n)} - f_j\|^2 \leq \varepsilon$. Таким образом, $f^{(n)} - f \in \bigoplus_{j \in J} H_j$, где $f = (f_j)$. Следовательно, $f = f^{(n)} - (f^{(n)} - f) \in \bigoplus_{j \in J} H_j$, и из произвольности ε : $f^{(n)} \rightarrow f$ ($n \rightarrow \infty$). □

4. П р и м е р. В частности, взяв ортогональную сумму счётного числа экземпляров \mathbb{C}^1 , мы приходим к известному координатному гильбертову пространству ℓ^2 , элементами которого являются последовательности $f = (f_1, f_2, \dots)$ комплексных чисел со свойством $\sum_{j \in \mathbb{N}} |f_j|^2 < +\infty$.

§234. Размерность гильбертова пространства

1. Мы уже встречались с ортонормированными системами векторов в унитарных пространствах (см. §155). Отмечалась также важная роль полных ортонормированных систем: каждый вектор разлагается по такой системе в ряд Фурье (см. 155.7(б)). В соответствии с этим всякую полную ортонормированную систему векторов в унитарном пространстве будем называть *ортонормированным базисом*. Естественно возникает вопрос о существовании ортонормированного базиса.

2. В каждом гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.

¶ Рассмотрим семейство всех ортонормированных систем векторов в гильбертовом пространстве, упорядоченное по включению. Это упорядоченное множество индуктивно (!), и по теореме Цорна (прил. III, п. 11) существует максимальная ортонормированная система. Эта система необходимо замкнута в смысле 155.8 (иначе к ней можно было бы присоединить ещё один вектор, что противоречило бы её максимальной). В силу 155.9 эта система полна, а значит, является ортонормированным базисом. □

Следующее утверждение позволяет говорить об ортогональной размерности гильбертова пространства.

3. Все ортонормированные базисы в гильбертовом пространстве равносильны.

¶ Пусть $(f_j)_{j \in J}$ и $(e_i)_{i \in I}$ — два ортонормированных базиса в гильбертовом пространстве H . Если $\text{Card } J, \text{Card } I < \aleph_0$ (см. прил. III), то утверждение следует из выкладки (с учетом 155.7(г)):

$$\text{Card } J = \sum_j \|f_j\|^2 = \sum_j \sum_i |\langle f_j, e_i \rangle|^2 = \sum_i \sum_j |\langle f_j, e_i \rangle|^2 = \sum_i \|e_i\|^2 = \text{Card } I.$$

Итак, пусть $\text{Card } J, \text{Card } I \geq \aleph_0$ и $J_i = \{j \in J : \langle f_j, e_i \rangle \neq 0\}$ ($i \in I$); отметим (см. 155.5), что $\text{Card } J_i \leq \aleph_0$. Тогда $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ и в силу п. 17 прил. III $\text{Card } J \leq \text{Card } I$.

Поменяв местами в приведённом рассуждении базисы $(f_j)_{j \in J}$ и $(e_i)_{i \in I}$, получим $\text{Card } J \geq \text{Card } I$. □

§235. Сепарабельные гильбертовы пространства

В приложениях чаще всего используются сепарабельные (см. 95.5) гильбертовы пространства. Отметим, что ещё в 30-е годы требование сепарабельности даже включалось в аксиоматику гильбертовых пространств. Имеет место следующий простой критерий сепарабельности:

1. Гильбертово пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда оно обладает не более чем счётным ортонормированным базисом.

Начнём с полезной конструкции ортогонализации:

2. [Процесс ортогонализации Грама]. Для заданной (не более чем счётной) линейно независимой системы $\{f_1, f_2, \dots\}$ векторов унитарного пространства можно построить ортонормированную систему $\{e_1, e_2, \dots\}$ так, что совпадают линейные оболочки этих систем.

¶ Система $\{e_1, e_2, \dots\}$ строится индуктивно следующим образом: $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$; если e_1, \dots, e_{k-1} уже построены, положим $e_k = \left\| f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, e_j \rangle e_j \right\|^{-1} \cdot \left(f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, e_j \rangle e_j \right)$. □

3. Доказательство п. 1. Достаточность. Пусть $\{e_1, e_2, \dots\}$ — ортонормированный базис в H . Тогда множество $\left\{ \sum_{j=1}^n (p_j + iq_j) e_j : p_j, q_j \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}$ счётно и плотно в H (!).

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\{g_1, g_2, \dots\}$ — счётное плотное в H множество (не ограничивая общности, можно считать, что среди элементов этой последовательности нет нулевого элемента θ). Пусть $\{h_1, h_2, \dots\}$ — максимальная линейно независимая часть этого множества (её можно получить следующим образом: положим $h_1 = g_1$; если h_1, \dots, h_{k-1} уже построены, положим $h_k = g_j$, где $j = \min\{n : \text{система } \{h_1, \dots, h_{k-1}, g_n\} \text{ линейно независима}\}$). Полученную систему $\{h_1, h_2, \dots\}$ ортогонализуем методом Грама. Получим ортонормированную систему $\{e_1, e_2, \dots\}$. Она полна. Действительно, пусть $f \in H$ и $\varepsilon > 0$ произвольны. Тогда найдётся g_k такое, что $\|f - g_k\| < \varepsilon$. В соответствии с конструкцией системы $\{h_1, h_2, \dots\}$ вектор g_k является линейной комбинацией элементов h_j , а значит, (в силу конструкции п.

2) линейной комбинацией e_j : $g_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, $\|f - \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\| < \varepsilon$. Из 155.6 следует, что (e_j) — ортонормированный базис в H .

4. П р и м е р. $L^2[0, 1]$ — сепарабельное гильбертово пространство (в соответствии с 161.2 и 221.12 в этом пространстве существует счётный ортонормированный базис).

§236. Изоморфные гильбертовы пространства

1. Гильбертовы пространства H и K (над одним полем Λ) называются *изоморфными*, если существует линейная биекция $U : H \rightarrow K$, сохраняющая скалярное произведение:

$$\langle Uf, Ug \rangle_K = \langle f, g \rangle_H \quad (f, g \in H). \quad (*)$$

2. Гильбертовы пространства изоморфны тогда они обладают равномошными ортонормированными базисами.

¶ Пусть гильбертовы пространства H и K изоморфны, U — соответствующий изоморфизм и $(e_j)_{j \in J}$ — полная ортонормированная система в H . Тогда $(Ue_j)_{j \in J}$ — ортонормированная система в K . Покажем, что $(Ue_j)_{j \in J}$ полна в K . Пусть $g \in K$ произволен и $f \in H$ таков, что $Uf = g$. Тогда (см. 155.7)

$$\sum_{j \in J} |\langle g, Ue_j \rangle|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2 = \|g\|^2,$$

откуда снова в силу 155.7 следует, что $(Ue_j)_{j \in J}$ полна.

Пусть гильбертовы пространства H и K обладают равномошными полными ортонормированными системами $(e_j)_{j \in J} \subset H$, $(h_j)_{j \in J} \subset K$ (их можно занумеровать одним индексом). Определим $U : H \rightarrow K$ равенством

$$Uf \equiv \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle h_j \quad (f \in H).$$

(Ряд, стоящий справа, сходится, так как для любой конечной части $\sigma \subset J$: $\|\sum_{j \in \sigma} \langle f, e_j \rangle h_j\|^2 = \sum_{j \in \sigma} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$.) Отображение U сохраняет векторные опера-

ции (!!). Покажем, что U — биекция H на K . Для любого $g \in K$: $g = \sum_{j \in J} \langle g, h_j \rangle h_j \Rightarrow$

$g = Uf$, где $f = \sum_{j \in J} \langle g, h_j \rangle e_j \in H$, т. е. U — сюръекция; U сохраняет скалярное произведение:

$$\langle Uf, Ug \rangle_K = \langle \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle h_j, \sum_{j \in J} \langle g, e_j \rangle h_j \rangle = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle \overline{\langle g, e_j \rangle} = \langle f, g \rangle_H.$$

Отсюда же следует, что U — инъекция. \square

3. С л е д с т в и е. Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой и изоморфны пространству ℓ^2 .

§237. Теорема Рисса

1. Т е о р е м а [Ф. Рисс]. Пусть H — гильбертово пространство. Тогда для любого $\varphi \in H^*$ существует и определён однозначно вектор $g \in H$ такой, что

$$\varphi(f) = \langle f, g \rangle \quad (f \in H). \quad (*)$$

При этом $\|\varphi\| = \|g\|$.

¶ Отметим сначала, что линейал $M \equiv \{f \in H : \varphi(f) = 0\}$ — подпространство H (см. 232.1). Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда M — собственное подпространство H . Пусть $\theta \neq h \in M^\perp$. Положим $g = \frac{\overline{\varphi(h)}}{\|h\|^2} h$. Заметив, что $\varphi(h)f - \varphi(f)h \in M$ при любом $f \in H$, имеем

$$\varphi(f) = \frac{1}{\|h\|^2} \langle \varphi(h)f - \varphi(f)h + \varphi(f)h, h \rangle = \frac{\varphi(h)}{\|h\|^2} \langle f, h \rangle = \langle f, g \rangle \quad (f \in H).$$

Если k — ещё один вектор, удовлетворяющий (*), то

$$\|g - k\|^2 = \langle g - k, g \rangle - \langle g - k, k \rangle = \varphi(g - k) - \varphi(g - k) = 0.$$

Наконец, равенство норм следует из оценок:

$$\|\varphi\| \leq \|g\| = \left| \varphi\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \right| \leq \|\varphi\|. \quad \square$$

2. Соответствие $\varphi(\in H^*) \rightarrow g(\in H)$ в теореме Рисса антилинейно: $\varphi \rightarrow g$, $\psi \rightarrow h \Rightarrow \lambda\varphi + \mu\psi \rightarrow \bar{\lambda}g + \bar{\mu}h$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$). Оно, кроме того, биективно и изометрично, а равенство

$$\langle \varphi, \psi \rangle \equiv \langle h, g \rangle_H \quad (\text{где } \varphi \rightarrow g, \psi \rightarrow h \text{ } (\varphi, \psi \in H^*))$$

задаёт в H^* структуру гильбертова пространства, и указанное в теореме Рисса соответствие осуществляет антиизоморфное отображение гильбертова пространства H^* на H (!!).

Из теоремы Рисса вытекает следствие принципа равномерной ограниченности 230.1 для гильбертова пространства:

3. Пусть $L \subset H$ и $\sup_{g \in L} |\langle f, g \rangle| < +\infty$ для любого $f \in H$. Тогда $\sup_{g \in L} \|g\| < +\infty$.

¶ Для $g \in L$ положим $\varphi_g \equiv \langle \cdot, g \rangle$. Тогда $M \equiv \{\varphi_g : g \in L\} \subset H^*$ и $\sup_{\varphi_g \in M} |\varphi_g(f)| = \sup_{g \in L} |\langle f, g \rangle| < +\infty$ ($f \in H$). Из 230.1 и теоремы Рисса $\sup_{g \in L} \|g\| = \sup_{\varphi_g \in M} \|\varphi_g\| < +\infty$. \square

4. У п р а ж н е н и е. Покажите, что гильбертовы пространства H и H^* изоморфны. Для $H = \ell^2$ укажите явный вид этого изоморфизма.

§238. Билинейные формы в гильбертовом пространстве

1. Функцию $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, где H — гильбертово пространство, назовём *билинейной формой* (б. ф.) в H , если она линейна по первому аргументу и антилинейна по второму:

$$\begin{aligned} a(\lambda f_1 + \mu f_2, g) &= \lambda a(f_1, g) + \mu a(f_2, g), \\ a(g, \lambda f_1 + \mu f_2) &= \bar{\lambda} a(g, f_1) + \bar{\mu} a(g, f_2), \quad (f_i, g \in H; \lambda, \mu \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

(Сравните это определение с определением 2-линейной формы 230.3.) Б. ф. a называется *эрмитовой*, если $a(f, g) = \overline{a(g, f)}$ ($f, g \in H$). Б. ф. a называется *ограниченной*, если существует $C > 0$ такое, что $|a(f, g)| \leq C \|f\| \|g\|$ ($f, g \in H$). Величина

$$\|a\| \equiv \inf\{C > 0 : |a(f, g)| \leq C \|f\| \|g\| \ (f, g \in H)\}$$

называется нормой ограниченной б. ф. a .

У п р а ж н е н и я. **2.** Покажите, что $\|a\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |a(f, g)|$.

3. Б. ф. ограничена тогда она непрерывна (по совокупности переменных).

4. Если A — линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H (т. е. $A \in L(H, H)$, см. 223.1), то равенство $a(f, g) = \langle Af, g \rangle$ ($f, g \in H$) определяет ограниченную б. ф. Оказывается, справедливо и обратное:

5. Для всякой ограниченной б. ф. a в гильбертовом пространстве H существует и определён однозначно оператор $A \in L(H, H)$ такой, что $a(f, g) = \langle Af, g \rangle$ ($f, g \in H$). При этом $\|a\| = \|A\|$.

¶ Для фиксированного элемента $f \in H$ рассмотрим функционал $F : H \rightarrow \mathbb{C}$, действующий по формуле $F(g) = \overline{a(f, g)}$ ($g \in H$). Он линеен и ограничен, причём $\|F\| \leq \|a\| \|f\|$ (!). По теореме Рисса существует и определён однозначно элемент $h \in H$ такой, что $F(g) = \langle g, h \rangle$ ($g \in H$), т. е. $a(f, g) = \langle h, g \rangle$ ($g \in H$). Таким образом, возникает оператор $A : H \rightarrow H$, определённый равенством $Af = h$. При этом $a(f, g) = \langle Af, g \rangle$ ($f, g \in H$). Покажем, что $A \in L(H, H)$. Оператор A линеен в силу выкладки

$$\begin{aligned} \langle A(\lambda f_1 + \mu f_2), g \rangle &= a(\lambda f_1 + \mu f_2, g) = \lambda a(f_1, g) + \mu a(f_2, g) \\ &= \langle \lambda Af_1 + \mu Af_2, g \rangle \ (g \in H). \end{aligned}$$

Оператор A ограничен в силу оценки $\|Af\| = \|h\| = \|F\| \leq \|a\| \|f\|$. При этом $\|A\| \leq \|a\|$. С другой стороны,

$$|a(f, g)| = |\langle Af, g \rangle| \leq \|Af\| \|g\| \leq \|A\| \|f\| \|g\| \Rightarrow \|a\| \leq \|A\|.$$

Оператор A определён однозначно. (Если, напротив, B — ещё один оператор такой, что $a(f, g) = \langle Bf, g \rangle$ ($f, g \in H$), то для любого $g \in H$: $\langle Af - Bf, g \rangle = 0$, откуда $Af = Bf$ ($f \in H$), т. е. $A = B$.) □

§239. Сопряжённый оператор

1. Пусть $A \in L(H, H)$ и a — соответствующая ему б. ф., то есть $a(f, g) = \langle Af, g \rangle$ ($f, g \in H$). Рассмотрим новую б. ф. $a^*(f, g) \equiv \langle f, Ag \rangle$ ($f, g \in H$). Эта б. ф. ограничена, причём $\|a^*\| = \|a\|$ (!). Поэтому (см. 237.5) существует и определён однозначно оператор $A^* \in L(H, H)$ такой, что $a^*(f, g) = \langle A^*f, g \rangle$ ($f, g \in H$). При этом $\|A^*\| = \|A\|$. Оператор A^* называется *сопряжённым* к A . Этот оператор, таким образом, однозначно определён равенством $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$ ($f, g \in H$).

2. Отметим некоторые легко проверяемые свойства сопряжённого оператора:

- (а) $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;
- (б) $A^{**} = A$;

(в) $I^* = I$ (I — тождественный оператор).

3. Оператор $A \in L(H, H)$ называется *самосопряжённым*, если $A = A^*$. Оператор A самосопряжён тогда б. ф., соответствующая этому оператору в силу 238.4, является эрмитовой (!!). Отметим, что множество всех ограниченных самосопряжённых операторов образует вещественное векторное пространство.

4. Для каждого ограниченного самосопряжённого оператора A :

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Af, f \rangle|.$$

¶ Обозначим $\|A\|' = \sup_{\|f\|=1} |\langle Af, f \rangle|$. Очевидно, $\|A\|' \leq \|A\|$. Для доказательства обратного неравенства заметим (непосредственный подсчёт), что

$$\langle A(f+g), f+g \rangle - \langle A(f-g), f-g \rangle = 4 \operatorname{Re} \langle Af, g \rangle. \quad (*)$$

Пусть теперь $\|f\| = \|g\| = 1$, $\langle Af, g \rangle = re^{i\varphi}$, где $r = |\langle Af, g \rangle|$. Пусть $g_1 = e^{i\varphi}g$ (в частности, $\|g_1\| = 1$). Тогда $\langle Af, g_1 \rangle = r$ и, применяя (*) к паре $\{f, g_1\}$, имеем с учётом 152.10(ii)

$$\begin{aligned} 4r &= 4\langle Af, g_1 \rangle = 4 \operatorname{Re} \langle Af, g_1 \rangle = \langle A(f+g_1), f+g_1 \rangle - \langle A(f-g_1), f-g_1 \rangle \\ &\leq \|A\|'(\|f+g_1\|^2 + \|f-g_1\|^2) = 2\|A\|'(\|f\|^2 + \|g_1\|^2) = 4\|A\|'. \end{aligned}$$

Из произвольности f, g отсюда $\|A\| = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle Af, g \rangle| \leq \|A\|'$. □

У п р а ж н е н и я. 5. Убедитесь, что векторное пространство (над полем \mathbb{R}) всех ограниченных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве H является банаховым пространством относительно операторной нормы.

6. Для оператора $A \in L(H, H)$ положим

$$\mathcal{R}(A) = \{Af : f \in H\}, \quad \ker(A) = \{f \in H : Af = \theta\}.$$

Покажите, что $H = \overline{\mathcal{R}(A^*)} \oplus \ker(A)$.

§240. Алгебра $\mathcal{B}(H)$

1. Пусть H — комплексное гильбертово пространство. В соответствии с 223.6 $L(H, H)$ — банахово пространство относительно операторной нормы. Операция суперпозиции двух операторов $(A \circ B)f \equiv A(Bf)$ ($f \in H$) не выводит из $L(H, H)$ (см. 223.5), причём $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$. Будем в дальнейшем $A \circ B$ называть *произведением* операторов A и B и обозначать символом AB , а класс $L(H, H)$ обозначать через $\mathcal{B}(H)$.

2. Операция произведения определяет в $\mathcal{B}(H)$ структуру алгебры над полем \mathbb{C} , т. е. для любых $A, B, C \in \mathcal{B}(H)$ (!!):

$$\begin{aligned} A(B+C) &= AB+AC, & (B+C)A &= BA+CA, \\ A(BC) &= (AB)C, & A(\lambda B) &= (\lambda A)B = \lambda(AB), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Тождественный оператор I является единицей алгебры $\mathcal{B}(H)$: $AI = IA = A$ ($A \in \mathcal{B}(H)$). Отметим, что если $\dim H > 1$, алгебра $\mathcal{B}(H)$ некоммутативна. Оператор

$A \in \mathcal{B}(H)$ называется *обратимым*, если существует $B \in \mathcal{B}(H)$ такой, что $AB = BA = I$. В этом случае B называется обратным к A и обозначается A^{-1} .

В силу 239.1 *) — операция в $\mathcal{B}(H)$. В следующем ниже утверждении собраны в основном известные нам факты:

3. Банахово пространство $\mathcal{B}(H)$ является алгеброй с единицей. Операция сопряжения *) обладает свойствами:

$$\begin{aligned} (A + B)^* &= A^* + B^*, & (\lambda A)^* &= \bar{\lambda} A^* \quad (\lambda \in \mathbb{C}), \\ A^{**} &= A, & (AB)^* &= B^* A^*. \end{aligned}$$

При этом для любых $A, B \in \mathcal{B}(H)$:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \\ (2) \quad & \|A^* A\| = \|A\|^2. \end{aligned}$$

¶ Докажем лишь последнее равенство. Отметим, что оператор $A^* A$ самосопряжён. В силу 239.4

$$\|A^* A\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle A^* A f, f \rangle| = \sup_{\|f\|=1} \|A f\|^2 = \|A\|^2. \quad \square$$

У п р а ж н е н и я. **4.** Если $A \in \mathcal{B}(H)$ обратим, то обратим и A^* , причём $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

5. Операция *) непрерывна в $\mathcal{B}(H)$.

6. Произведение операторов непрерывно в $\mathcal{B}(H)$ по совокупности переменных, т. е. $A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B \Rightarrow A_n B_n \rightarrow AB$.

§241. Ортопроекторы

1. Ортопроектором на подпространство $K \subset H$ называется отображение $P : H \rightarrow H$, определённое равенством

$$P f \equiv f_1, \text{ где } f = f_1 + f_2 \quad (f_1 \in K, f_2 \in K^\perp) \quad (*)$$

— разложение, определяемое 232.4. При этом $P \in \mathcal{B}(H)$ и $\|P\| = 1$, если $P \neq 0$; если P — ортопроектор на подпространство K , то $I - P$ — ортопроектор на подпространство K^\perp .

¶ В обозначениях (*) и с учётом 152.10(i) $\|P f\|^2 = \|f_1\|^2 \leq \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 = \|f\|^2$ ($f \in H$). Следовательно, $P \in \mathcal{B}(H)$ и $\|P\| \leq 1$. Если $P \neq 0$ и $\theta \neq f \in K$, то $\|P f\| = \|f\|$, т. е. $\|P\| = 1$. \square

Следующее свойство характеризует ортопроекторы в классе всех линейных ограниченных операторов.

2. $P \in \mathcal{B}(H)$ — ортопроектор тогда $P^2 = P = P^*$.

¶ Пусть P — ортопроектор на подпространство K . Из (*) следует, что $P^2 = P$. Пусть $g \in H$ произволен и $g = g_1 + g_2$ ($g_1 \in K, g_2 \in K^\perp$) — его разложение согласно (*). Тогда $\langle P f, g \rangle = \langle f_1, g_1 + g_2 \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle = \langle f_1 + f_2, g_1 \rangle = \langle f, P g \rangle$, то есть $P = P^*$.

Обратно, пусть $P \in \mathcal{B}(H)$ и $P^2 = P = P^*$. Линеал $K = \{P f : f \in H\}$ замкнут: если $P f_n \rightarrow f_0$, то $P f_n = P(P f_n) \rightarrow P f_0$, а из единственности предела $f_0 = P f_0 \in K$.

Итак, K — подпространство. Покажем, что P — ортопроектор на K . Действительно, для любого $f \in H$: $f = Pf + (f - Pf)$ и $f - Pf \in K^\perp$, так как для любого $g \in K$ (с учётом равенства $P = P^*$):

$$\langle g, f - Pf \rangle = \langle Pg, f - Pf \rangle = \langle g, P(f - Pf) \rangle = \langle g, Pf - Pf \rangle = 0. \quad \square$$

3. П р и м е р. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу. Тогда отображение $P : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, определённое равенством $Pf \equiv \chi_X \cdot f$ ($f \in L^2(\mathbb{R})$), — ортопроектор в $L^2(\mathbb{R})$: из оценки

$$\int |\chi_X(x)f(x)|^2 dx = \int_X |f(x)|^2 dx \leq \int |f(x)|^2 dx \quad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

следует, что $P \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$. Кроме того, ясно, что $P^2 = P$. Наконец, $P = P^*$, так как для любых $f, g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle Pf, g \rangle = \int \chi_X(x)f(x)\overline{g(x)} dx = \int f(x)\overline{\chi_X(x)g(x)} dx = \langle f, Pg \rangle.$$

4. Ортопроекторы P_1 и P_2 называются *ортгоналными*, если $P_1P_2 = 0$ (в этом случае и $P_2P_1 = (P_1P_2)^* = 0$).

У п р а ж н е н и я. **5.** Ортопроекторы P_1, P_2 (на подпространства K_1 и K_2 соответственно) ортгоналны ттогда ортгоналны K_1 и K_2 .

6. Пусть P_1 и P_2 — ортопроекторы. Оператор $P \equiv P_1 + P_2$ — ортопроектор ттогда $P_1P_2 = 0$.

7. Произведение $P = P_1P_2$ ортопроекторов P_1, P_2 (на подпространства K_1 и K_2 соответственно) есть ортопроектор ттогда $P_1P_2 = P_2P_1$. При этом $\mathcal{R}(P) = K_1 \cap K_2$.

§242. Унитарные операторы

1. Линейная сюръекция $U : H \rightarrow H$ называется *унитарным оператором*, если $\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle$ ($f, g \in H$). Очевидно, $U \in \mathcal{B}(H)$, $\|U\| = 1$.

Следующее свойство характеризует унитарные операторы в классе всех линейных ограниченных операторов.

2. Пусть $U \in \mathcal{B}(H)$. Следующие условия эквивалентны:

(а) U — унитарный оператор,

(б) $U^*U = UU^* = I$.

¶ (а) \Rightarrow (б). Из равенства $\langle f, g \rangle = \langle Uf, Ug \rangle = \langle U^*Uf, g \rangle$ ($f, g \in H$) следует, что $U^*U = I$. Так как U — сюръекция, для произвольного $f \in H$ найдётся $h \in H$ такой, что $f = Uh$. Равенство $UU^* = I$ следует из выкладки (с учётом доказанного уже равенства $U^*U = I$):

$$\langle U^*Uf, g \rangle = \langle UU^*Uh, g \rangle = \langle U(U^*U)h, g \rangle = \langle Uh, g \rangle = \langle f, g \rangle \quad (f, g \in H).$$

(б) \Rightarrow (а). $U^*U = I \Rightarrow \langle Uf, Ug \rangle = \langle U^*Uf, g \rangle = \langle f, g \rangle$ ($f, g \in H$). Сюръективность $U : f \in H \Rightarrow f = UU^*f = U(U^*f) \in \mathcal{R}(U)$. \square

3. П р и м е р. [Оператор Фурье-Планшереля в $L^2(\mathbb{R})$.] Рассмотрим пространство Шварца \mathcal{S} (см. 170.4). Это плотный в $L^2(\mathbb{R})$ линейал (!!). Как известно (см. 171.7),

отображение $f \rightarrow f^\sharp(t) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x)e^{-ixt} dx$ ($t \in \mathbb{R}$) — биекция \mathcal{S} на \mathcal{S} . Покажем, что $^\sharp$ — изометрия. Мы имеем

$$\begin{aligned}\|f^\sharp\|^2 &= \int \overline{f^\sharp(t)} f^\sharp(t) dt = \int \overline{f^\sharp(t)} ((2\pi)^{-1/2} \int f(x)e^{-ixt} dx) dt \\ &= \int f(x) ((2\pi)^{-1/2} \int \overline{f^\sharp(t)} e^{ixt} dt) dx = \int f(x) \overline{f^{\sharp\flat}(x)} dx \\ &= \int f(x) \overline{f(x)} dx = \|f\|^2.\end{aligned}$$

(в третьем равенстве мы использовали лемму §165).

Таким образом, $^\sharp$ продолжается до ограниченного линейного отображения $U : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. Из выкладки

$$\begin{aligned}\langle f^\sharp, g \rangle &= \int f^\sharp(t) \overline{g(t)} dt = \int (2\pi)^{-1/2} \int f(x)e^{-ixt} dx \cdot \overline{g(t)} dt \\ &= \int f(x) ((2\pi)^{-1/2} \int \overline{g(t)} e^{ixt} dt) dx = \int f(x) \overline{g^\flat(x)} dx \\ &= \langle f, g^\flat \rangle \quad (f, g \in \mathcal{S})\end{aligned}$$

и непрерывности скалярного произведения, получим

$$\langle Uf, g \rangle = \langle f, g^\flat \rangle \quad (f \in L^2(\mathbb{R}), g \in \mathcal{S}),$$

откуда $U^*g = g^\flat$ ($g \in \mathcal{S}$). Оператор U является унитарным оператором в $L^2(\mathbb{R})$ и называется *оператором Фурье-Планишереля*. {Достаточно убедиться, что U удовлетворяет условию 2(б). Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$ произволен и последовательность $f_n \in \mathcal{S}$ такова, что $f_n \rightarrow f$ в $L^2(\mathbb{R})$. Тогда

$$UU^*f = \lim_n UU^*f_n = \lim_n U(f_n^\flat) = \lim_n f_n^{\flat\sharp} = \lim_n f_n = f.$$

Таким образом, $UU^* = I$. Аналогично, $U^*U = I$.}

4. З а м е ч а н и е. Приведём формулу для “вычисления” оператора U на функциях из $L^2(\mathbb{R})$. Обозначая $f_N^\sharp(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-N}^N f(x)e^{-ixt} dx$ ($t \in \mathbb{R}$) (в правой части стоит интеграл Лебега), имеем

$$\begin{aligned}\|Uf - f_N^\sharp\|^2 &= \|Uf - U\chi_{[-N, N]}f\|^2 = \|U(f - \chi_{[-N, N]}f)\|^2 \\ &= \|f - \chi_{[-N, N]}f\|^2 = \int_{|t| \geq N} |f(t)|^2 dt \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(Uf)(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{-N}^N f(x)e^{-ixt} dx \quad (t \in \mathbb{R}),$$

где равенство, естественно, понимается п. в. в \mathbb{R} , и символ $\lim_{N \rightarrow +\infty}$ (limes in medio — предел в среднем) понимается как предел по норме пространства $L^2(\mathbb{R})$.

Примеры 5. В гильбертовом пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$ суммируемых с квадратом последовательностей $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ оператор V , заданный равенством $V(f^n) \equiv (f^{n+1})$, является унитарным.

6. Оператор V в гильбертовом пространстве $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$, определённый равенством $V(f^1, f^2, \dots) \equiv (0, f^1, f^2, \dots)$ обладает свойством $\langle Vf, Vg \rangle = \langle f, g \rangle$ ($f, g \in \ell^2$), но не является унитарным (!!).

Упражнение 7. Пусть X — линейал в гильбертовом пространстве, U — унитарный оператор. Тогда $U(X^\perp) = (UX)^\perp$.

§243. Конечномерные операторы

1. Пусть E и F — нормированные пространства. Оператор $A \in L(E, F)$ называется *конечномерным*, если $\mathcal{R}(A) \equiv \{Af : f \in E\}$ — конечномерное подпространство в F .

2. Каждый конечномерный оператор $A \in L(E, F)$ допускает представление $A = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\cdot) g_j$ ($g_j \in F$, $\varphi_j \in E^*$).

¶ Пусть $\{g_1, \dots, g_n\}$ — некоторый фиксированный алгебраический базис в $\mathcal{R}(A)$. Для произвольного вектора $f \in E$ обозначим через $\varphi_j(f)$ коэффициенты при разложении вектора Af по указанному базису: $Af = \sum_{j=1}^n \varphi_j(f) g_j$. Из линейности A следует, что функционалы $\varphi_j : E \rightarrow \Lambda$ линейны. Если последовательность $f_k \rightarrow \theta$ в E , то (из непрерывности оператора A) $Af_k = \sum_{j=1}^n \varphi_j(f_k) g_j \rightarrow \theta$. Из свойств конечномерного пространства (220.3) $\varphi_j(f_k) \rightarrow 0$ при каждом j , так что $\varphi_j \in E^*$. □

3. Следствие. Каждый конечномерный оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ допускает представление

$$A = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, f_j \rangle g_j \quad (f_j, g_j \in H), \quad (*)$$

где векторы g_j можно выбрать попарно ортогональными.

¶ (*) следует из п. 2 и теоремы Рисса. Применяя процедуру ортогонализации Грама (см. 235.2) к векторам g_j , мы добьёмся их попарной ортогональности. □

Упражнение 4. Для конечномерного оператора $A \in \mathcal{B}(H)$ найти представление A^* в обозначениях п. 3.

5. Найти представление конечномерного ортопроектора в гильбертовом пространстве H .

§244. Компактные операторы

1. Пусть E, F — банаховы пространства. Оператор $A \in L(E, F)$ называется *компактным*, если образ $A(B_1[\theta])$ единичного шара при отображении A — предкомпактное множество в F . Из общего утверждения 105.2 следует:

2. $A \in L(E, F)$ компактен тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $(f_n) \subset E$ последовательность (Af_n) обладает сходящейся подпоследовательностью.

3. П р и м е р. Каждый конечномерный оператор является компактным. В частности, компактен тождественный оператор в конечномерном нормированном пространстве. Между тем:

4. Тождественный оператор, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве, не является компактным.

Установим предварительно один геометрический факт (очевидный, впрочем, для гильбертовых пространств):

5. Л е м м а. Пусть X — замкнутое подпространство нормированного пространства E , $X \neq E$. Тогда существует вектор $f \in E \setminus X$ такой, что $\|f\| = 1$, $\|f - g\| \geq 1/2$ для всех $g \in X$.

¶ Пусть $f_0 \in E \setminus X$ — произволен. Тогда $d \equiv \inf_{g \in X} \|f_0 - g\| > 0$. Выберем $g_0 \in X$ так, чтобы $\|f_0 - g_0\| < 2d$. Тогда вектор $f \equiv \frac{f_0 - g_0}{\|f_0 - g_0\|}$ — искомый, так как для любого $g \in X$

$$\|f - g\| = \left\| \frac{f_0 - g_0}{\|f_0 - g_0\|} - g \right\| = \frac{1}{\|f_0 - g_0\|} \|f_0 - g_0 - \|f_0 - g_0\|g\| > \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

¶ [Доказательство п. 4.] Достаточно установить, что единичный шар $B_1[\theta]$ в бесконечномерном банаховом пространстве не компактен. Построим индуктивно последовательность $(f_n) \subset B_1[\theta]$: $f_1 \in B_1[\theta]$ ($\|f_1\| = 1$) — произволен; если $\{f_1, \dots, f_n\} \subset B_1[\theta]$ уже построены и X_n — подпространство E (необходимо замкнутое), порождённое векторами $\{f_1, \dots, f_n\}$, то вектор f_{n+1} выберем по лемме п. 5. По построению $\|f_n - f_m\| \geq 1/2$ ($n, m \in \mathbb{N}$), и поэтому последовательность $(f_n) \subset B_1[\theta]$ не обладает сходящейся подпоследовательностью, так что шар $B_1[\theta]$ не компактен. \square

6. У п р а ж н е н и е. Единичный шар $B_1[\theta]$ нормированного пространства компактен тогда и только тогда, когда пространство конечномерно.

§245. Свойства компактных операторов в гильбертовом пространстве

1. Далее будем рассматривать компактные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H . Обозначим через $\mathcal{C}(H)$ класс всех компактных операторов в H . Отметим некоторые свойства класса $\mathcal{C}(H)$:

2. $A_n \in \mathcal{C}(H)$, $A \in \mathcal{B}(H)$, $\|A_n - A\| \rightarrow 0 \Rightarrow A \in \mathcal{C}(H)$.

3. $\mathcal{C}(H)$ — банахово пространство.

4. Если H сепарабельно, то $A \in \mathcal{C}(H)$ тогда и только тогда, когда A является пределом по норме конечномерных операторов.

5. $A \in \mathcal{C}(H) \Rightarrow A^* \in \mathcal{C}(H)$.

6. $A \in \mathcal{C}(H)$, $B \in \mathcal{B}(H) \Rightarrow AB, BA \in \mathcal{C}(H)$.

7. $A \in \mathcal{C}(H) \Rightarrow \mathcal{R}(I - A)$ замкнуто.

¶ **2.** Пусть последовательность (f_n) ограничена и (f_n^1) — её подпоследовательность такая, что $(A_1 f_n^1)$ сходится. Пусть (f_n^2) — подпоследовательность последовательности (f_n^1) такая, что $(A_2 f_n^2)$ сходится. Продолжив этот процесс, получим систему

(f_n^k) ($k = 1, 2, \dots$) подпоследовательностей такую, что (f_n^k) — подпоследовательность последовательности (f_n^{k-1}) и $(A_k f_n^k)$ сходится. Тогда последовательность (f_n^n) — подпоследовательность исходной последовательности (f_n) , причём $(A f_n^n)$ сходится. Это следует из оценки

$$\|A(f_n^n - f_m^m)\| \leq \|(A - A_s)(f_n^n - f_m^m)\| + \|A_s(f_n^n - f_m^m)\|. \quad (1)$$

Действительно, в силу ограниченности последовательности (f_n) и условия $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ первое слагаемое в правой части (1) может быть сделано меньше наперёд заданного числа при достаточно большом s . Для этого s последовательность $(A_s f_n^s)$ сходится, а значит, сходится последовательность $A_s f_n^n$, поскольку при $n > s$ (f_n^n) — подпоследовательность последовательности (f_n^s) . Следовательно, второе слагаемое в правой части (1) также может быть сделано меньше наперёд заданного числа при больших n . Остаётся учесть 244.2.

3. Пусть подпоследовательность $A_n \in \mathcal{C}(H)$ фундаментальна. В силу полноты $\mathcal{B}(H)$ существует $A \in \mathcal{B}(H)$, что $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. Из п. 2 теперь следует, что $A \in \mathcal{C}(H)$.

4. Достаточность уже установлена (см. п. 2 и 244.3). Докажем необходимость. Пусть $\{e_1, e_2, \dots\}$ — ортонормированный базис в H и $P_n \equiv \sum_{k=1}^n \langle \cdot, e_k \rangle e_k$ — конечномерные операторы (ортопроекторы). Тогда $AP_n = \sum_{k=1}^n \langle \cdot, e_k \rangle A e_k$ — также последовательность конечномерных операторов и достаточно установить, что $\lambda_n \equiv \|A - AP_n\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Рассмотрим ряд Фурье $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$ произвольного вектора $f \in H$ и заметим, что

$$(A - AP_n)f = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle A e_k, \quad \lambda_n = \sup_{\|f\|=1} \|(A - AP_n)f\| = \sup_{\|f\|=1, f \in (I - P_n)H} \|Af\|,$$

так что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, и поэтому существует $\lambda \equiv \lim_n \lambda_n \geq 0$. Пусть, напротив, $\lambda > 0$. Тогда найдётся такая последовательность $g_n \in (I - P_n)H$, $\|g_n\| = 1$, что

$$\|Ag_n\| > \lambda/2. \quad (2)$$

Заметим, что для любого $f \in H$

$$\langle g_n, f \rangle \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} |\langle g_n, f \rangle|^2 &= |\langle g_n, \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \rangle|^2 = |\langle g_n, \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \rangle|^2 = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle \langle g_n, e_k \rangle|^2 \\ &\leq [\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2] [\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle g_n, e_k \rangle|^2] \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

В силу компактности A найдётся подпоследовательность (g_{n_k}) последовательности (g_n) такая, что (Ag_{n_k}) сходится: $Ag_{n_k} \rightarrow h$. В силу (2) $h \neq \theta$. С другой стороны (с учётом (3)), $\|h\|^2 = \lim_k \langle Ag_{n_k}, h \rangle = \lim_k \langle g_{n_k}, A^* h \rangle = 0$. — противоречие.

5. Проверим утверждение для сепарабельного пространства. Пусть (A_n) — последовательность конечномерных операторов, сходящаяся к $A (\in \mathcal{C}(H))$ по норме (п. 4). В силу 243.3–4 (A_n^*) — последовательность конечномерных операторов, причём $\|A_n^* - A^*\| = \|A_n - A\| \rightarrow 0$. Снова в силу п. 4 $A^* \in \mathcal{C}(H)$.

6. Следует непосредственно из определения. Например, из условий $A \in \mathcal{C}(H)$, $B \in \mathcal{B}(H)$ следует, что для каждой ограниченной последовательности (f_n) в H последовательность (Bf_n) также ограничена. В силу 244.2 последовательность (ABf_n) обладает сходящейся подпоследовательностью (ABf_{n_k}) . Снова в силу 244.2 $AB \in \mathcal{C}(H)$.

7. Пусть $(I - A)f_n \rightarrow g$. Можно считать, что $f_n \in [\ker(I - A)]^\perp$. {Из представления (232.4) $f_n = f'_n + f''_n$ ($f'_n \in \ker(I - A)$, $f''_n \in [\ker(I - A)]^\perp$) получаем $(I - A)f''_n \rightarrow g$. Остаётся поменять последовательность (f_n) на последовательность (f''_n) .}

Покажем теперь, что последовательность (f_n) ограничена. Если (f_n) , напротив, не ограничена, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\|f_n\| \rightarrow +\infty$ и тогда (из сходимости $(I - A)f_n$) следует, что $(I - A)k_n \rightarrow \theta$, где $k_n \equiv \frac{f_n}{\|f_n\|}$ (!). Поскольку A — компактный оператор, можно считать (переходя снова к подпоследовательности), что Ak_n сходится. Поэтому сходится и последовательность $k_n = (I - A)k_n + Ak_n$. Пусть $k_n \rightarrow h$. Тогда $h \in [\ker(I - A)]^\perp$ и $\|h\| = 1$. С другой стороны, $(I - A)h = \lim_n (I - A)k_n = \theta$, и значит, $h \in \ker(I - A)$. Поэтому $h \in [\ker(I - A)] \cap [\ker(I - A)]^\perp \Rightarrow h = \theta$, что противоречит равенству $\|h\| = 1$.

Пусть $C > 0$ таково, что $\|f_n\| \leq C$ ($n \in \mathbb{N}$). Так как A — компактный оператор, существует подпоследовательность (f_{n_k}) такая, что (Af_{n_k}) сходится, а значит, существует $f \equiv \lim_k f_{n_k}$ ($= \lim_k [(I - A)f_{n_k} + Af_{n_k}]$), так что $g = \lim_n (I - A)f_n = \lim_k (I - A)f_{n_k} = (I - A)f$. \square

8. У п р а ж н е н и е. Пусть $A \in \mathcal{C}(H)$ и P — ортопроектор. Покажите, что $\mathcal{R}((I + A)P)$ замкнуто.

§246. Интегральные компактные операторы

В теории линейных интегральных уравнений ключевую роль играют интегральные операторы T вида

$$(Tf)(t) = \int_M K(t, s)f(s)\mu(ds), \quad (*)$$

где функция $K(t, s)$ называется ядром оператора T , определённого на подходящем пространстве функций f , которые в свою очередь заданы на некотором пространстве с мерой (M, μ) .

1. Пусть сначала $K(t, s)$ — непрерывная функция на квадрате $0 \leq t, s \leq 1$. Тогда T корректно определён на пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. При этом T — ограниченный линейный оператор. (В этом случае $M = [0, 1]$, μ — линейная мера Лебега.) Действительно, ограниченность T следует из оценки

$$|(Tf)(t)| \leq \max_{0 \leq t, s \leq 1} |K(t, s)| \cdot \|f\| \quad (t \in [0, 1]).$$

(Здесь $\|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ — известная норма в $C[0, 1]$.)

2. В условиях п. 1 T — компактный оператор.

¶ В силу 219.10 достаточно убедиться, что $TB_1[\theta]$ — равностепенно непрерывное семейство (см. 219.9). Так как K равномерно непрерывна на квадрате $M \times M$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, s, t', s' \in M (\|(t, s) - (t', s')\| < \delta \Rightarrow |K(t, s) - K(t', s')| < \varepsilon).$$

В частности,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, t', s \in M (|t - t'| < \delta \Rightarrow |K(t, s) - K(t', s)| < \varepsilon).$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in B_1[\theta] \forall t, t' \in M (|t - t'| < \delta \Rightarrow |(Tf)(t) - (Tf)(t')| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} |K(t, s) - K(t', s)| \|f\| < \varepsilon).$$

что и требовалось. \square

Мы перейдём теперь к условиям компактности оператора T в гильбертовом пространстве функций $L^2(M, \mu)$. Предварительно установим лемму.

3. Пусть $\{f_j(t)\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\{g_k(s)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — ортонормированные базисы в сепарабельных гильбертовых пространствах $L^2(M_1, \mu_1)$ и $L^2(M_2, \mu_2)$ соответственно. Тогда система функций $\{f_j(t)g_k(s)\}$ — ортонормированный базис в $L^2(M_1 \times M_2, \mu_1 \times \mu_2)$.

¶ Проведём доказательство при предположении, что меры μ_1, μ_2 конечны. Прежде всего, $\{f_j(t)g_k(s)\}$ — ортонормированная система в $L^2(M_1 \times M_2, \mu_1 \times \mu_2)$. Остаётся лишь убедиться, что она замкнута. Пусть

$$\int_{M_1 \times M_2} f(t, s) f_j(t) g_k(s) \mu_1(dt) \mu_2(ds) = 0 \quad (j, k \in \mathbb{N}).$$

По теореме Фубини 214.2

$$\int_{M_1 \times M_2} f(t, s) f_j(t) g_k(s) \mu_1(dt) \mu_2(ds) = \int_{M_2} \left(\int_{M_1} f(t, s) f_j(t) \mu_1(dt) \right) g_k(s) \mu_2(ds) = 0.$$

С учётом замкнутости системы $\{g_k(s)\}$ в $L^2(M_2, \mu_2)$ следует, что для произвольного фиксированного j существует $S_j \subset M_2$ такое, что

$$\int_{M_1} f(t, s) f_j(t) \mu_1(dt) = 0 \quad (s \notin S_j), \quad \mu_2(S_j) = 0.$$

Полагая $S \equiv \bigcup_j S_j$, получаем отсюда

$$\int_{M_1} f(t, s) f_j(t) \mu_1(dt) = 0 \quad (s \notin S, j \in \mathbb{N}), \quad \mu_2(S) = 0.$$

Так как система $\{f_j(t)\}$ замкнута, $s \notin S \Rightarrow f(t, s) = 0$ п. в. относительно μ_1 . Пусть $A = \{(t, s) \in M_1 \times M_2 : f(t, s) \neq 0\}$. Воспользуемся теоремой Фубини в форме 214.5. Так как

$$A_t \equiv \{s \in M_2 : (t, s) \in A\} = \{s \in M_2 : f(t, s) \neq 0\} \subset S$$

п. в. относительно μ_1 , имеем $\mu_1 \times \mu_2(A) = \int_{M_2} \left(\int_{M_1} \mu_2(A_t) \mu_1(dt) \right) \mu_2(ds) = 0$, откуда $f(t, s) = 0$ п. в. относительно $\mu_1 \times \mu_2$. \square

4. Пусть $L^2(M, \mu)$ — сепарабельное гильбертово пространство, $K \in L^2(M \times M, \mu \times \mu)$. Тогда равенством (*) задаётся компактный оператор.

¶ Следует проверить следующие три факта:

- (1) $f \in L^2(M, \mu) \Rightarrow Tf \in L^2(M, \mu)$ (корректность определения T),
- (2) $\|Tf\| \leq C\|f\|$ ($f \in L^2(M, \mu)$) (ограниченность T),
- (3) существует последовательность T_n конечномерных операторов в $L^2(M, \mu)$ такая, что $T_n \rightarrow T$ по норме (компактность T).

Утверждение (1) следует из оценки

$$\begin{aligned} \int_M |(Tf)(t)|^2 \mu(dt) &= \int_M \left| \int_M K(t, s) f(s) \mu(ds) \right|^2 \mu(dt) \\ &\leq \int_M \left(\int_M |K(t, s)|^2 \mu(ds) \cdot \int_M |f(s)|^2 \mu(ds) \right) \mu(dt) \\ &= \int_M \int_M |K(t, s)|^2 \mu(ds) \mu(dt) \cdot \|f\|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда же следует (2) с $C = \|K\| = \left[\int_M \int_M |K(t, s)|^2 \mu(ds) \mu(dt) \right]^{1/2}$. Для построения последовательности T_n рассмотрим ортонормированный базис $\{f_j(t)\}$ в $L^2(M, \mu)$. В силу п. 3 $\{f_j(t) \overline{f_k(s)}\}$ — ортонормированный базис в $L^2(M \times M, \mu \times \mu)$. Поэтому $K(t, s) = \sum_{jk} \lambda_{jk} f_j(t) \overline{f_k(s)}$, где λ_{jk} — коэффициенты Фурье функции K относительно базиса $\{f_j(t) \overline{f_k(s)}\}$, и ряд сходится по норме $L^2(M \times M, \mu \times \mu)$. Пусть $K_n = \sum_{j,k=1}^n \lambda_{jk} f_j(t) \overline{f_k(s)}$. Тогда

$$(T_n f)(t) \equiv \int_M K_n(t, s) f(s) \mu(ds)$$

— конечномерный оператор (т. к. $T_n = \sum_{j,k=1}^n \lambda_{jk} \langle \cdot, f_k \rangle f_j$). При этом (см. пункт (2) настоящего доказательства)

$$\|T - T_n\|^2 \leq \|K - K_n\|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} |\lambda_{jk}|^2 - \sum_{j,k=1}^n |\lambda_{jk}|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

что и требовалось. \square

5. У п р а ж н е н и е. Покажите, что в условиях п. 4 $(T^* f)(t) = \int_M \overline{K(s, t)} f(s) \mu(ds)$ ($f \in L^2(M, \mu)$).

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

§247. Понятие замкнутого оператора

1. *Линейным оператором* (в дальнейшем просто *оператором*) T в гильбертовом пространстве H называется линейное отображение $T : D(T) \rightarrow H$, где $D(T)$ — линеал в H (он называется областью определения T). Отметим, что для любого линейного оператора $T\theta = \theta$. Оператор T называется *плотно заданным*, если линеал $D(T)$ плотен в H . Линеалы $\ker T \equiv \{f \in D(T) : Tf = \theta\}$ и $\mathcal{R}(T) \equiv \{Tf : f \in D(T)\}$ называются соответственно *ядром* и *образом* оператора T .

Примеры. 2. В гильбертовом пространстве $H = L^2[0, 1]$ определим оператор $M : (Mf)(t) \equiv tf(t)$ ($0 \leq t \leq 1$); M определён всюду в H и ограничен.

3. В гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$ снова положим $(Mf)(t) \equiv tf(t)$ ($t \in \mathbb{R}$), где $D(M) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : tf(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$; M плотно задан, но не ограничен: $f_n \equiv \chi_{[n, n+1]} \in D(M)$, $\|f_n\| = 1$, но $\|Mf_n\|^2 = \int_n^{n+1} t^2 dt > n^2$ ($n \in \mathbb{N}$). Операторы в примерах 2, 3 называются операторами умножения на независимую переменную.

Упражнения. 4. Покажите, что $T(f^n) \equiv (nf^n)$ — неограниченный плотно заданный линейный оператор в ℓ^2 .

5. В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ положим $(Tf)(t) = f'(t)$ ($f \in D(T) \equiv \mathcal{D}$), где пространство \mathcal{D} определено в 170.1. Убедитесь, что T — неограниченный плотно заданный линейный оператор.

6. Алгебраические операции над линейными операторами в гильбертовом пространстве H определяются соглашениями:

$$\begin{aligned} D(A+B) &\equiv D(A) \cap D(B), & (A+B)f &\equiv Af + Bf; \\ D(\lambda A) &\equiv D(A), & (\lambda A)f &\equiv \lambda Af \quad (\lambda \in \mathbb{C}); \\ D(AB) &\equiv \{f \in D(B) : Bf \in D(A)\}, & (AB)f &\equiv A(Bf). \end{aligned}$$

Если $\ker A = \{\theta\}$, то определён оператор A^{-1} , обратный к A : $D(A^{-1}) \equiv \mathcal{R}(A)$, $A^{-1}(Af) \equiv f$. При этом $\mathcal{R}(A^{-1}) = D(A)$ и $AA^{-1} = i_{\mathcal{R}(A)}$, $A^{-1}A = i_{D(A)}$ (см. 1.2). Линейный оператор A назовём *обратимым*, если оператор A^{-1} определён всюду и ограничен.

7. *Графиком линейного оператора* T в гильбертовом пространстве H называется множество $\Gamma(T) \equiv \{\{f, Tf\} : f \in D(T)\} \subset H \oplus H$ — подмножество ортогональной суммы гильбертовых пространств (см. 233.2).

8. З а м е ч а н и е. Множество $\Gamma \subset H \oplus H$ является графиком некоторого оператора в H тогда и только тогда, когда Γ — линеал в $H \oplus H$, не содержащий пар вида $\{\theta, g\}$, $g \neq \theta$ (!!).

9. Линейный оператор $S : D(S) \rightarrow H$ называется *расширением* оператора T (пишем $T \subset S$), если $D(T) \subset D(S)$ и $Tf = Sf$ ($f \in D(T)$). Отметим, что $T \subset S$ тогда $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$.

10. Линейный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *замкнутым*, если $\Gamma(T)$ замкнуто в $H \oplus H$ (т. е. $\Gamma(T)$ — подпространство гильбертова пространства $H \oplus H$); оператор T называется *замыкаемым*, если он обладает замкнутым расширением.

11. З а м е ч а н и е. Класс замыкаемых операторов включает в себя класс ограниченных линейных операторов. {Убедимся, что для ограниченного линейного оператора T его продолжение по непрерывности S (§227) является замкнутым оператором. Пусть $\{f_n, Sf_n\} \rightarrow \{f, h\}$ в $H \oplus H$. Тогда $f_n \rightarrow f, Sf_n \rightarrow h$, и в силу конструкции оператора S (см. §227) $f \in D(S)$. Из непрерывности S отсюда следует, что $h = Sf$, т. е. $\{f, h\} = \{f, Sf\} \in \Gamma(S)$.}

12. *Всюду определённый оператор замкнут тогда он ограничен.*

¶ Достаточность установлена в предыдущем пункте. Необходимость является следствием теоремы о замкнутом графике 231.5. □

Часто удобной бывает “покоординатная” форма замкнутости оператора:

13. (i) *Оператор T замкнут тогда*

$$f_n \in D(T), f_n \rightarrow f, Tf_n \rightarrow g \text{ влечёт } f \in D(T), Tf = g.$$

(ii) *Оператор T замыкаем тогда*

$$f_n \in D(T), f_n \rightarrow \theta, Tf_n \rightarrow g \text{ влечёт } g = \theta.$$

¶ (i) — простая переформулировка определения из п. 10. Из замыкаемости T немедленно следует условие в (ii). Обратно, пусть выполнено условие в (ii). Определим оператор S :

$$D(S) \equiv \{f \in H : \exists (f_n) \subset D(T) \exists g \in H (f_n \rightarrow f, Tf_n \rightarrow g)\}, \quad Sf \equiv g.$$

S определён корректно: действительно, пусть $f'_n \in D(T)$ — ещё одна последовательность такая, что $f'_n \rightarrow f, Tf'_n \rightarrow g'$. Тогда

$$f_n - f'_n \in D(T), f_n - f'_n \rightarrow \theta, T(f_n - f'_n) \rightarrow g - g'.$$

Из (ii) следует, что $g = g'$. Далее по построению $S \supset T$, $\Gamma(S) = \Gamma(T)^-$, так что S замкнут. □

14. *Каждый замыкаемый оператор T обладает наименьшим замкнутым расширением (оно обозначается \bar{T} и называется замыканием оператора T). При этом $\Gamma(\bar{T}) = \Gamma(T)^-$.*

¶ Используем конструкцию оператора S из предыдущего пункта и положим $\bar{T} \equiv S$. Тогда (как отмечено выше) справедливо равенство $\Gamma(\bar{T}) = \Gamma(T)^-$. Если R — ещё одно замкнутое расширение оператора T , то $\Gamma(T) \subset \Gamma(R)$, а значит, $\Gamma(\bar{T}) = \Gamma(T)^- \subset \Gamma(R)^- = \Gamma(R)$. Следовательно, $\bar{T} \subset R$, так что \bar{T} — наименьшее замкнутое расширение оператора T . □

15. П р и м е р [незамыкаемого оператора]. Определим в гильбертовом пространстве $L^2[0, 1]$ оператор $T : D(T) \equiv C[0, 1], (Tf)(\lambda) \equiv f(1)\lambda$. Рассмотрим последовательность непрерывных функций f_n , сходящуюся в $L^2[0, 1]$ к θ , и в то же время

таких, что $f_n(1) = 1$. Тогда $Tf_n \rightarrow \psi$, где $\psi(\lambda) = \lambda$ ($0 \leq \lambda \leq 1$). Из 13(ii) следует, что T не замыкаем.

У п р а ж н е н и я. В следующих утверждениях T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H .

16. $\ker T$ — замкнутое подпространство в H .

17. Если определён T^{-1} , то он также замкнут.

18. Если $A \in \mathcal{B}(H)$, то $A+T$ и TA замкнуты. Верно ли аналогичное утверждение, если T — замыкаемый оператор?

§248. Сопряжённый оператор

1. Пусть T — плотно заданный оператор в гильбертовом пространстве H . Определим *сопряжённый* оператор T^* :

$$D(T^*) \equiv \{g \in H : \exists g^* \in H \forall f \in D(T) (\langle Tf, g \rangle = \langle f, g^* \rangle)\}, \quad T^*g \equiv g^* \quad (g \in D(T^*)).$$

¶ Убедимся в корректности данного определения. Следует проверить, что (а) элемент $g^* \in H$ определён однозначно, (б) полученный оператор T^* линеен (!!). Проверим (а). Пусть, напротив, есть ещё один элемент h^* такой, что выполнено равенство

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, h^* \rangle \quad (f \in D(T)).$$

Вычитая из него подобное равенство для элемента g^* , имеем:

$$0 = \langle f, h^* \rangle - \langle f, g^* \rangle = \langle f, h^* - g^* \rangle \quad (f \in D(T)).$$

Так как линеал $D(T)$ плотен в H , получаем, что $h^* = g^*$. □

Отметим, что для $T \in \mathcal{B}(H)$ данное определение согласуется с прежним определением сопряжённого оператора (239.1).

2. З а м е ч а н и е. Оператор T^* может и не быть плотно заданным. Рассмотрим в качестве иллюстрации оператор T из примера 247.15. Если $g \in D(T^*)$, то для вектора g^* в п. 1:

$$f(1) \int_0^1 \lambda \overline{g(\lambda)} d\lambda = \langle Tf, g \rangle = \langle f, g^* \rangle = \int_0^1 f(\lambda) \overline{g^*(\lambda)} d\lambda.$$

Так как линеал $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 0\}$ плотен в $L^2[0, 1]$, отсюда следует, что $g^* = \theta$. Поэтому для $f_1(\lambda) \equiv 1$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) имеем

$$\langle \psi, g \rangle = \int_0^1 \lambda \overline{g(\lambda)} d\lambda = f_1(1) \int_0^1 \overline{g(\lambda)} d\lambda = \langle f_1, \theta \rangle = 0.$$

Таким образом, линеал $D(T^*) \subset \{\psi\}^\perp$, и значит, не плотен в $L^2[0, 1]$.

3. Получим выражение для графика оператора T^* через график оператора T . Определим для этого оператор U в пространстве $H \oplus H$ равенством

$$U\{f, g\} \equiv \{g, -f\} \quad (f, g \in H).$$

U — унитарный оператор (!!).

Если T — плотно заданный оператор в гильбертовом пространстве H , то $\Gamma(T^*) = [U\Gamma(T)]^\perp$.

¶ $\{g, g^*\} \in \Gamma(T^*)$ тогда $\langle Tf, g \rangle - \langle f, g^* \rangle = 0$ ($f \in D(T)$) тогда

$$\langle U\{f, Tf\}, \{g, g^*\} \rangle = \langle \{Tf, -f\}, \{g, g^*\} \rangle = \langle Tf, g \rangle - \langle f, g^* \rangle = 0 \quad (f \in D(T))$$

тогда $\{g, g^*\} \in [U\Gamma(T)]^\perp$. \square

4. Установим свойства сопряжённого оператора:

- (i) если операторы T, S плотно заданы и $S \subset T$, то $T^* \subset S^*$,
- (ii) если T — плотно заданный оператор, то T^* замкнут.
- (iii) плотно заданный оператор T замыкаем тогда T^* — плотно задан. При этом $\overline{T} = T^{**}$.
- (iv) Если T плотно задан, то $H = \ker(T^*) \oplus [\mathcal{R}(T)]^\perp$.

¶ (i). $S \subset T \Rightarrow$ (см. 247.9) $\Gamma(S) \subset \Gamma(T) \Rightarrow U\Gamma(S) \subset U\Gamma(T) \Rightarrow \Gamma(S^*) = [U\Gamma(S)]^\perp \supset [U\Gamma(T)]^\perp = \Gamma(T^*) \Rightarrow S^* \supset T^*$.

(ii). Следует немедленно из п. 3.

(iii). Отметим, что оператор U из п. 3 удовлетворяет равенству $U^2 = -I$. Следовательно (см. также 242.7),

$$\Gamma(T)^- = \Gamma(T)^{\perp\perp} = [U^2\Gamma(T)]^{\perp\perp} = [U(U\Gamma(T))^\perp]^\perp = [U\Gamma(T^*)]^\perp.$$

Если T^* плотно задан, то в силу (ii) из данного равенства следует, что линейал $\Gamma(\overline{T}) = \Gamma(T)^-$ — график оператора T^{**} , так что $\overline{T} = T^{**}$. Обратно, пусть T^* задан не плотно. Тогда найдётся $g \in D(T^*)^\perp$, $g \neq \theta$. Тогда $\{g, \theta\} \in [\Gamma(T^*)]^\perp$, а значит,

$$\{\theta, g\} \in U[\Gamma(T^*)^\perp] = [U\Gamma(T^*)]^\perp = \Gamma(T)^-.$$

Это означает, что $\Gamma(T)^-$ — не график, то есть T не замыкаем.

(iv). $g \in \mathcal{R}(T)^\perp$ тогда $\langle Tf, g \rangle = 0 = \langle f, \theta \rangle$ ($f \in D(T)$) тогда (см. п. 1) $g \in D(T^*)$, $T^*g = \theta$ тогда $g \in \ker T^*$. \square

У п р а ж н е н и я 5. Покажите, что в условиях п. 1 $g \in D(T^*)$ тогда линейный функционал $f \rightarrow \langle Tf, g \rangle$, заданный на линейале $D(T)$, ограничен.

6. Пусть T — плотно задан, а $S \in \mathcal{B}(H)$. Тогда $(S + T)^* = S^* + T^*$.

7. Пусть S, T, ST плотно заданы. Тогда $(ST)^* \supset T^*S^*$. Если, в частности, $S \in \mathcal{B}(H)$, то $(ST)^* = T^*S^*$.

8. Пусть T, T^{-1} плотно заданы. Тогда $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

§249. Эрмитовы и самосопряжённые операторы

1. Плотно заданный оператор T называется *эрмитовым* (или симметрическим), если $T \subset T^*$, или, что эквивалентно,

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle \quad (f, g \in D(T)).$$

Оператор T называется *самосопряжённым*, если $T = T^*$.

2. З а м е ч а н и е. В силу 248.4 (ii) всякий эрмитов оператор замыкаем.

3. Пусть T — самосопряжённый оператор, а оператор U — унитарный. Тогда оператор UTU^* самосопряжён.

¶ Из 248.7 следует, что $S \equiv UTU^*$ эрмитов, т. е. $S \subset S^*$. Обратно (снова с учётом 248.7),

$$U^*SU = T = T^* = (U^*(SU))^* = (SU)^*U \supset U^*S^*U \Rightarrow S \supset S^*. \quad \square$$

П р и м е р ы. 4. [Оператор умножения на независимую переменную]. Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор M :

$$D(M) \equiv \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \lambda f(\lambda) \in L^2(\mathbb{R})\}, \\ (Mf)(\lambda) \equiv \lambda f(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, f \in D(M)).$$

Покажем, что M — самосопряжённый оператор. Ясно, что $M \subset M^*$. Пусть $g \in D(M^*)$, $g^* = M^*g$. Тогда для всех $f \in D(M)$

$$\int \lambda f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\lambda = \langle Mf, g \rangle = \langle f, g^* \rangle = \int f(\lambda) \overline{g^*(\lambda)} d\lambda \Rightarrow \int f(\lambda) [\overline{g^*(\lambda)} - \overline{\lambda g(\lambda)}] d\lambda = 0.$$

Отметим, что $L^2[-N, N]$ при каждом $N > 0$ можно рассматривать как подпространство $L^2(\mathbb{R})$ (функция на отрезке $[-N, N]$ доопределяется нулём вне этого отрезка). При этом $L^2[-N, N] \subset D(M)$. Теперь

$$\int_{-N}^N f(\lambda) [\overline{g^*(\lambda)} - \overline{\lambda g(\lambda)}] d\lambda = 0 \quad (f \in L^2[-N, N])$$

влечёт $g^*(\lambda) - \lambda g(\lambda) = 0$ п. в. на $[-N, N] \Rightarrow$ (из произвольности N) $g^*(\lambda) = \lambda g(\lambda)$ п. в. в $\mathbb{R} \Rightarrow \lambda g(\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$, $g^*(\lambda) = \lambda g(\lambda) = (Mg)(\lambda)$. Итак, $M = M^*$. \square

5. [Оператор дифференцирования]. Оператором дифференцирования в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ назовём оператор $Q \equiv U^*MU$, где U — унитарный оператор Фурье-Планшереля (см. 242.3), а M — оператор умножения на независимую переменную, рассмотренный выше. В силу 247.5 и п. 3 Q — самосопряжённый неограниченный оператор. Получим формулу вычисления этого оператора на функциях из пространства Шварца \mathcal{S} (см. 170.4), которые образуют плотный в $L^2(\mathbb{R})$ линейал. Отметим сначала, что функции из \mathcal{S} удовлетворяют условиям п. 168.8. При этом в обозначениях 168.7 $\mathcal{S} \subset D(M)$, $Mf = f^{\S}$ ($f \in \mathcal{S}$). Согласно 171.7 $US = U^*S = S$. Поэтому $S \subset D(Q)$ и

$$(Qf)(t) = (U^*MUf)(t) = \frac{1}{i}(iU^*MUf)(t) = \frac{1}{i}f'(t) \quad (f \in \mathcal{S}, t \in \mathbb{R}).$$

Этой формулой оправдывается название оператора Q , который является, таким образом, самосопряжённым расширением обычного оператора дифференцирования (с поправочным скалярным множителем), определённого изначально на \mathcal{S} .

Самосопряжённые операторы играют исключительно важную роль в теории операторов и их приложений, в связи с чем полезны критерии и достаточные условия самосопряжённости. Приведём в качестве иллюстрации одно из достаточных условий и его применение к установлению самосопряжённости одного класса операторов.

6. Если T — эрмитов и $\mathcal{R}(T) = H$, то T самосопряжён.

¶ Достаточно установить включение $D(T^*) \subset D(T)$ (из п. 1 тогда следует, что $T = T^*$). Для произвольного $g \in D(T^*)$ найдётся $g^* \in H$, что $\langle Tf, g \rangle = \langle f, g^* \rangle$ ($f \in D(T)$). Так как $\mathcal{R}(T) = H$, найдётся $h \in D(T)$ такой, что $Th = g^*$. Поэтому $\langle Tf, g \rangle = \langle f, Th \rangle = \langle Tf, h \rangle$ ($f \in D(T)$), откуда $g = h \in D(T)$. \square

7. Пусть оператор T плотно задан и замкнут. Тогда T^*T самосопряжён.

¶ План доказательства: (i) покажем, что уравнение $(I + T^*T)f = g$ разрешимо относительно f при любом $g \in H$, (ii) покажем, что линейал $D(T^*T)$ плотен в H , (iii) установим, что оператор T^*T эрмитов и $\mathcal{R}(I + T^*T) = H$. В силу п. 6 это завершит доказательство.

(i). Воспользуемся методом графика. В обозначениях 248.3

$$H \oplus H = \Gamma(T) \oplus \Gamma(T)^\perp = \Gamma(T) \oplus U^*\Gamma(T^*).$$

Поэтому для произвольного $g \in H$ найдутся такие $f \in H$, $h \in D(T^*)$, что

$$\{g, \theta\} = \{f, Tf\} + U^*\{h, T^*h\} = \{f, Tf\} + \{-T^*h, h\},$$

откуда $Tf = -h$ и $g = f + T^*Tf = (I + T^*T)f$.

(ii). Пусть, напротив, найдётся элемент $g \neq \theta$ ортогональный линейалу $D(T^*T)$. Пусть f удовлетворяет уравнению $(I + T^*T)f = g$ (в этом случае $f \in D(T^*T)$, $f \neq \theta$). Тогда

$$0 = \langle (I + T^*T)f, f \rangle = \|f\|^2 + \langle T^*Tf, f \rangle = \|f\|^2 + \langle Tf, T^{**}f \rangle = \|f\|^2 + \langle Tf, Tf \rangle > 0,$$

— противоречие.

(iii). Из включения $(T^*T)^* \supset T^*T^{**} = T^*T$ следует, что T^*T эрмитов, а значит, таков же и $I + T^*T$. В силу (i) $\mathcal{R}(I + T^*T) = H$. В силу п. 6 оператор $I + T^*T$ самосопряжён, а значит, самосопряжён и T^*T . \square

8. У п р а ж н е н и е. Замкнутый эрмитов оператор T самосопряжён тогда T^* эрмитов.

§250. О понятии аналитической вектор-функции

1. Пусть E — банахово пространство, $\Lambda \subset \mathbb{C}$ открыто. Функция $F : \Lambda \rightarrow E$ называется *сильно-аналитической*, если

$$\forall \lambda_0 \in \Lambda \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0) \quad (F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f_n),$$

где элементы $f_n \in E$ не зависят от λ в круге $B_\varepsilon(\lambda_0)$.

2. З а м е ч а н и е. Если $\varphi \in E^*$ и $F : \Lambda \rightarrow E$ сильно аналитическая, то $\varphi \circ F : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ — обычная аналитическая функция.

¶ Действительно, в обозначениях п. 1 имеем:

$$\begin{aligned} \varphi \circ F(\lambda) &= \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f_n\right) = \varphi\left(\lim_k \sum_{n=0}^k (\lambda - \lambda_0)^n f_n\right) = \lim_k \varphi\left(\sum_{n=0}^k (\lambda - \lambda_0)^n f_n\right) \\ &= \lim_k \sum_{n=0}^k \varphi((\lambda - \lambda_0)^n f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(f_n)(\lambda - \lambda_0)^n, \quad \lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0). \quad \square \end{aligned}$$

3. У п р а ж н е н и е. Пусть $F : \Lambda \rightarrow \mathcal{B}(H)$ — сильно аналитическая функция, $A \in \mathcal{B}(H)$, то $A \cdot F$, $F \cdot A$ сильно аналитические (здесь $(A \cdot F)(\lambda) \equiv AF(\lambda)$, $(F \cdot A)(\lambda) \equiv F(\lambda)A$).

§251. Спектр оператора и его свойства

1. Пусть сначала H — конечномерное гильбертово пространство размерности n . Как уже нам известно, имеется биективное соответствие между алгеброй $\mathcal{B}(H)$ всех линейных операторов в H и алгеброй $n \times n$ -матриц: зафиксировав ортонормированный базис (e_j) , сопоставим оператору A матрицу $[a_{ij}]$, где $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$. В частности, если оператор A самосопряжённый, числа a_{ij} связаны равенствами: $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (такие матрицы в курсе линейной алгебры называются эрмитовыми). Напомним, что вектор $f \in H$ ($f \neq \theta$) называется собственным вектором оператора A , отвечающим собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, если $Af = \lambda f$. Множество всех собственных чисел образует так называемый спектр оператора A . Для самосопряжённых операторов имеет место замечательный факт: матрица оператора A в ортонормированном базисе из собственных векторов этого оператора имеет диагональный вид; другими словами (в обозначениях 243.3),

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \cdot, e_j \rangle e_j \quad (\text{то есть } a_{jj} = \lambda_j, \ a_{ij} = 0 \ (i \neq j)).$$

Далее мы обобщим (далеко не в полной мере) эти понятия на бесконечномерный случай.

2. Пусть T — замкнутый плотно заданный оператор в гильбертовом пространстве H . Множество

$$\rho(T) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ — обратим}\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора T . В соответствии с 247.6 $\lambda \in \rho(T)$ означает, что $(\lambda I - T)^{-1}$ ограничен и определён всюду в H . Множество $\sigma(T) \equiv \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ называется *спектром* оператора T . Вектор $f \in D(T) \setminus \{\theta\}$ называется собственным вектором, отвечающим собственному значению λ , если $Tf = \lambda f$. Если в частности, $\lambda \neq 0$ — собственное значение T , то $\lambda \in \sigma(T)$.

3. Пусть T замкнут и плотно задан. Тогда $\rho(T)$ открыто (в \mathbb{C}) и

$$R(\lambda) \equiv (\lambda I - T)^{-1} \quad (\lambda \in \rho(T))$$

— сильно аналитическая функция. Семейство $\{R(\lambda)\}_{\lambda \in \rho(T)}$ состоит из попарно коммутирующих операторов, причём

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\mu)R(\lambda) \quad (\lambda, \mu \in \rho(T)).$$

¶ Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$. Проверим, что в круге $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}$:

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1}.$$

Так как $(\lambda_0 I - T)R(\lambda_0) = I$, имеем для указанных λ

$$\begin{aligned} & (\lambda I - T) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1} \\ &= (\lambda_0 I - T) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1} + (\lambda - \lambda_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1} \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^{n+1} R(\lambda_0)^{n+1} = I. \end{aligned}$$

Таким образом, мы установили первую часть утверждения. Далее для $\lambda, \mu \in \rho(T)$ имеем

$$\begin{aligned} R(\lambda) - R(\mu) &= R(\lambda)(\mu I - T)R(\mu) - R(\lambda)(\lambda I - T)R(\mu) \\ &= R(\lambda)(\mu - \lambda)R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu). \end{aligned}$$

Наконец, используя доказанное равенство, получаем

$$R(\lambda)R(\mu) = \frac{1}{\mu - \lambda} [R(\lambda) - R(\mu)] = \frac{1}{\lambda - \mu} [R(\mu) - R(\lambda)] = R(\mu)R(\lambda) \quad (\lambda \neq \mu). \quad \square$$

4. Спектр всякого ограниченного оператора является непустым компактным множеством в \mathbb{C} .

¶ Пусть $T \in \mathcal{B}(H)$. Для $|\lambda| > \|T\|$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n$ сходится абсолютно в банаховом пространстве $\mathcal{B}(H)$. Прямые вычисления дают:

$$(\lambda I - T) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n \right) (\lambda I - T) = I.$$

Итак, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n = R(\lambda) \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$. Отсюда $\sigma(T)$ ограничено и, будучи замкнутым (см. п. 3), компактно.

Для проверки непустоты спектра заметим, что $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow$

$$\|R(\lambda)\| = \left\| \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|}{|\lambda|} \right)^n = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}}.$$

Отсюда $\|R(\lambda)\| \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$). Для произвольных $f, g \in H$ рассмотрим функционал $\varphi_{f,g} \equiv \langle (\cdot)f, g \rangle \in \mathcal{B}(H)^*$. В силу 250.2 $\varphi_{f,g} \circ R$ — обычная аналитическая функция на $\rho(T)$. Если допустить, что $\sigma(T) = \emptyset$ (а значит, $\rho(T) = \mathbb{C}$), то $\varphi_{f,g} \circ R$ — аналитическая функция во всей комплексной плоскости, причём

$$\varphi_{f,g}(R(\lambda)) = |\langle R(\lambda)f, g \rangle| \leq \|R(\lambda)\| \|f\| \|g\| \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

По теореме Лиувилля из комплексного анализа $\varphi_{f,g} \circ R \equiv 0$, то есть $\langle R(\lambda)f, g \rangle \equiv 0$ ($f, g \in H$), откуда $R(\lambda) \equiv 0$, — противоречие. \square

5. З а м е ч а н и е. Из доказательства п. 4 следует, что для $T \in \mathcal{B}(H)$: $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.

6. Спектр унитарного оператора U лежит на единичной окружности с центром в 0.

¶ В силу п. 5 $\lambda \in \sigma(U) \Rightarrow |\lambda| \leq 1$. $0 < |\lambda| < 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}I - U^*$ — обратим, $\lambda I - U = (\lambda U)(U^* - \frac{1}{\lambda}I) \Rightarrow (\lambda I - U)^{-1} = (U^* - \frac{1}{\lambda}I)^{-1}(\lambda U)^{-1} \in \mathcal{B}(H) \Rightarrow \lambda \in \rho(U)$, то есть $\lambda \in \sigma(U) \Rightarrow |\lambda| = 1$. \square

7. Если T самосопряжён, то $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

¶ Достаточно показать, что $\operatorname{Im} \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$. Пусть $\lambda = a + ib$, $b = \operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Для любого $f \in D(T)$ (с учётом самосопряжённости T)

$$\|(\lambda I - T)f\|^2 = \langle (aI - T)f + ibf, (aI - T)f + ibf \rangle = \|(aI - T)f\|^2 + b^2\|f\|^2 \geq b^2\|f\|^2.$$

Из этой оценки следует, что $\ker(\lambda I - T) = \{\theta\}$, а значит, $(\lambda I - T)^{-1}$ определён и линеал $D((\lambda I - T)^{-1}) = \mathcal{R}(\lambda I - T)$ плотен в H (см. 248.4(iv)). Далее из этой же оценки имеем

$$\|(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)f\| = \|f\| \leq \frac{1}{|b|}\|(\lambda I - T)f\| \quad (f \in D(T));$$

это означает, что оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ ограничен. Кроме того, этот оператор замкнут (как обратный к замкнутому оператору), а значит, $D((\lambda I - T)^{-1}) = H$. Итак, $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. \square

З а м е ч а н и я. 8. В п. 7 для самосопряжённого оператора T получена оценка: $\|R(\lambda)\| \leq 1/|\operatorname{Im} \lambda|$ ($\operatorname{Im} \lambda \neq 0$).

9. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям самосопряжённого оператора ортогональны: если $Af = \lambda f$, $Ag = \mu g$ ($\lambda \neq \mu$), то

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \lambda f, g \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle Af, g \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle f, Ag \rangle = \frac{\mu}{\lambda} \langle f, g \rangle$$

влечёт $\langle f, g \rangle = 0$.

У п р а ж н е н и я. 10. Для ортопроектора P : $\sigma(P) \subset \{0, 1\}$.

11. Если T — замкнутый и плотно заданный оператор, а U — унитарный оператор, то $\sigma(UTU^*) = \sigma(T)$.

12. Покажите, что спектр оператора M умножения на независимую переменную (см. 249.4) в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ совпадает со всей числовой прямой.

УРАВНЕНИЯ С КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

§252. Теорема Фредгольма

Будем рассматривать в этом разделе сепарабельное гильбертово пространство H . Следующая теорема является основополагающей для данного раздела.

Пусть A — компактный оператор в пространстве H . Рассмотрим уравнение

$$\lambda A\psi = \psi, \quad (1)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — параметр. Тогда множество

$$\sigma \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{уравнение (1) имеет ненулевое решение}\}$$

дискретно (то есть не имеет предельных точек), и если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma$, то $I - \lambda A$ обратим.

¶ Утверждение очевидно, если $A = 0$. Пусть $A \neq 0$. Положим $r = \frac{1}{2\|A\|} (> 0)$, зафиксируем $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и покажем, что

$$\sigma_0 \equiv \{\lambda \in B_r(\lambda_0) : \text{уравнение (1) имеет ненулевое решение}\}$$

— конечное множество, причём $\lambda \in B_r(\lambda_0) \setminus \sigma_0 \Rightarrow I - \lambda A$ обратим. Отсюда и следует теорема (в силу произвольности λ_0).

План доказательства: для круга $B_r(\lambda_0)$ построим семейство конечномерных операторов $\{C(\lambda)\}_{\lambda \in B_r(\lambda_0)}$ со свойствами:

- (i) $I - \lambda A$ обратим тогда $I - C(\lambda)$ обратим,
- (ii) уравнение (1) имеет ненулевое решение тогда этим свойством обладает уравнение

$$C(\lambda)\varphi = \varphi \quad (2)$$

- (iii) $\sigma_1 \equiv \{\lambda \in B_r(\lambda_0) : (2) \text{ имеет ненулевое решение}\}$ — конечное множество,

- (iv) $\lambda \in B_r(\lambda_0) \setminus \sigma_1 \Rightarrow I - C(\lambda)$ обратим.

В силу (ii) оказывается, что $\sigma_1 = \sigma_0$, что завершает доказательство теоремы. Приступим к построению семейства $\{C(\lambda)\}$.

Пусть $B = \sum_{i=1}^N \langle \cdot, f_i \rangle g_i$ ($\{g_i\}$ — ортонормированная система) — конечномерный оператор такой, что $\|\lambda_0 A - B\| < \frac{1}{2}$.

Заметим, что $\lambda \in B_r(\lambda_0) \Rightarrow I - \lambda A + B$ обратим. {Действительно, из оценки $\|\lambda A - B\| \leq \|\lambda A - \lambda_0 A\| + \|\lambda_0 A - B\| < 1$ и представления

$$I - \lambda A + B = \|\lambda A - B\| \left(\frac{1}{\|\lambda A - B\|} I - \frac{\lambda A - B}{\|\lambda A - B\|} \right)$$

следует, что $\frac{1}{\|\lambda A - B\|} (> 1)$ — резольвентная точка оператора $\frac{\lambda A - B}{\|\lambda A - B\|}$.

Положим $C(\lambda) = B(I - \lambda A + B)^{-1} = \sum_{i=1}^N \langle \cdot, h_i(\lambda) \rangle g_i$, где $h_i(\lambda) = (I - \lambda A + B)^{-1*} f_i$ ($\lambda \in B_r(\lambda_0)$), и убедимся, что $C(\lambda)$ — искомое семейство конечномерных операторов.

(i) следует из равенства $I - \lambda A = (I - C(\lambda))(I - \lambda A + B)$. Действительно, необходимость очевидна. Для проверки достаточности положим $X = (I - \lambda A + B)(I - \lambda A)^{-1}$. Тогда

$$(I - C(\lambda))X = X(I - C(\lambda)) = (I - \lambda A + B)(I - \lambda A)^{-1} \cdot [(I - C(\lambda))(I - \lambda A + B)](I - \lambda A + B)^{-1} = I. \quad (1)$$

(ii). Пусть $\theta \neq \psi = \lambda A\psi$. Тогда вектор $\varphi \equiv (I - \lambda A + B)\psi$ удовлетворяет уравнению (2), $\varphi \neq \theta$, т. к. $(I - \lambda A + B)$ обратим; обратно, $\theta \neq \varphi = C(\lambda)\varphi \Rightarrow \theta \neq \psi \equiv (I - \lambda A + B)^{-1}\varphi = \lambda A\psi$.

(iii) Уравнение (2) следует рассматривать в конечномерном подпространстве $K = \text{lin} \{g_1, \dots, g_n\}$, в котором оно имеет ненулевое решение тогда $I_K - C(\lambda)$ не обратим, т. е. тогда (в базисе $\{g_1, \dots, g_n\}$) $d(\lambda) \equiv \det[I_K - C(\lambda)] = \det[\delta_{ij} - \langle g_j, h_j(\lambda) \rangle] = 0$. Функции $\xi_{ij}(\lambda) \equiv \langle g_j, h_j(\lambda) \rangle$ ($\lambda \in B_r(\lambda_0)$) — аналитические по λ (!), а значит, в силу теоремы единственности для аналитических функций, либо $\sigma_1 = \{\lambda \in B_r(\lambda_0) : d(\lambda) = 0\}$ — конечно, либо $\sigma_1 = B_r(\lambda_0)$. Второе, однако, невозможно. {Это невозможно при $\lambda_0 = 0$, ибо иначе уравнение (2) имеет ненулевое решение при $\lambda = 0$, а значит (см. (ii)), при $\lambda = 0$ уравнение (1) имеет ненулевое решение. При $\lambda \neq 0$ используйте связность \mathbb{C} (!).}

(iv). Покажем, что $d(\lambda) \neq 0$ (т. е. $\lambda \in B_r(\lambda_0) \setminus \sigma_1$) означает, что уравнение

$$(I - C(\lambda))\varphi = \psi$$

однозначно разрешимо при любом ψ . Положим $\varphi = \psi + \psi_N$, где ψ_N — решение уравнения $(I_K - C(\lambda))\psi_N = C(\lambda)\psi$. Это уравнение в K , и оно разрешимо, так как $\det[I - C(\lambda)] = d(\lambda) \neq 0$. Тогда $[I - C(\lambda)](\psi + \psi_N) = \psi - C(\lambda)\psi + C(\lambda)\psi = \psi$, что и требовалось. Итак, $I - C(\lambda)$ обратим, ибо $[I - C(\lambda)]^{-1}$ определён всюду в H (и замкнут). \square

§253. Спектральная теорема для самосопряжённого компактного оператора

1. [Теорема Рисса-Шаудера]. Пусть $A \in \mathcal{C}(H)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\sigma(A) \setminus B_\varepsilon(0)$ конечно, причём если $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$, то λ — собственное значение оператора A конечной кратности.

¶ Пусть σ — дискретное множество из теоремы §252. При этом $\lambda \in \sigma(A) \setminus B_\varepsilon(0)$ тогда $1/\lambda \in \sigma \cap B_{1/\varepsilon}[0]$. Из дискретности σ отсюда следует, что $\sigma(A) \setminus B_\varepsilon(0)$ конечно. Далее, если K — подпространство всех собственных векторов из H , принадлежащих собственному значению $\lambda \neq 0$, то ограничение на K компактного оператора $\frac{1}{\lambda}A$ является тождественным и компактным оператором в K . Из 244.4 следует, что $\frac{1}{\lambda}A|_K$ конечномерно. \square

2. Если $A \in \mathcal{C}(H)$ — самосопряжённый оператор и $\sigma(A) = \{0\}$, то $A = 0$.

¶ Пусть $\|A\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Af, f \rangle| \neq 0$ и для определённости $\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \langle Af, f \rangle$ (мы помним, что квадратичная форма $\langle Af, f \rangle$ в данном случае принимает вещественные значения). Тогда существует последовательность (g_n) , такая, что $\|g_n\| = 1$ и

$\langle Ag_n, g_n \rangle \rightarrow \|A\|$. Так как $A \in \mathcal{C}(H)$, (Ag_n) обладает сходящейся подпоследовательностью (обозначаемой также (Ag_n)): $Ag_n \rightarrow h$. Имеем

$$\begin{aligned}\|Ag_n - \|A\|g_n\|^2 &= \|Ag_n\|^2 - 2\|A\|\langle Ag_n, g_n \rangle + \|A\|^2 \\ &\leq 2[\|A\|^2 - \|A\|\langle Ag_n, g_n \rangle] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Отсюда $g_n = \frac{1}{\|A\|}(\|A\|g_n - Ag_n + Ag_n) \rightarrow \frac{1}{\|A\|}h \neq \theta$. Следовательно,

$$Ah = \|A\| \lim_n Ag_n = \|A\|h$$

влечёт, что h — собственный вектор оператора A , а $\|A\|$ — отвечающее ему собственное значение. Поэтому $\|A\| \in \sigma(A)$. \square

3. З а м е ч а н и е. Если $\dim H = \infty$, то $0 \in \sigma(A)$ для любого $A \in \mathcal{C}(H)$ (!!).

4. [Теорема Гильберта-Шмидта (спектральная теорема для самосопряжённого компактного оператора)]. Пусть A — самосопряжённый компактный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда существует ортонормированный базис (f_n) в H такой, что

$$A = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, f_n \rangle f_n, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \lambda_n \rightarrow 0.$$

¶ Пусть μ_k — ненулевые точки спектра A . В соответствии с 251.7 и пп. 1,3 $\sigma(A) = \{0\} \cup \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$, $\mu_k \in \mathbb{R}$. Каждое собственное значение μ_k имеет конечную кратность:

$$\dim H_k < +\infty, \quad \text{где } H_k = \{f \in H : Af = \mu_k f\}.$$

В каждом H_k выберем ортонормированный базис и рассмотрим систему (f_n) — объединение этих базисов. Это ортонормированная система, так как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям ортогональны (см. 251.9). Пусть K — замыкание линейной оболочки системы (f_n) . Тогда $AK \subset K$, $AK^\perp \subset K^\perp$ (!!). Поэтому оператор $\tilde{A} \equiv A|_{K^\perp}$ — самосопряжённый компактный оператор (в K^\perp). Снова в силу теоремы Рисса-Шаудера $0 \neq \mu \in \sigma(\tilde{A})$ означает, что μ — собственное значение оператора \tilde{A} , а значит, и оператора A . Но по построению не существует ни одного ненулевого собственного значения, не принадлежащего семейству $\{\mu_1, \mu_2, \dots\}$. Поэтому $\sigma(\tilde{A}) = \{0\}$ и согласно п. 2 $\tilde{A} = 0$.

Дополним ортонормированную систему (f_n) до ортонормированного базиса в H (т. е. присоединим к (f_n) базис в K^\perp). Образует последовательность: $\mu_1, \mu_1, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots$, в которой каждое собственное число μ_k дублируется столько раз, какова его кратность, и, заново перенумеровывая полученную последовательность, мы получим последовательность (λ_n) , причём $\lambda_n \rightarrow 0$. Эта последовательность искомая. Действительно, представив любой вектор $f \in H$ в виде $f = \sum \langle f, f_n \rangle f_n$ (разложение f в ряд Фурье), имеем

$$Af = A\left(\sum_n \langle f, f_n \rangle f_n\right) = \sum_n \langle f, f_n \rangle Af_n = \sum_n \lambda_n \langle f, f_n \rangle f_n. \quad \square$$

5. [Каноническая форма компактного оператора]. Пусть A — компактный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда существуют ортонормированные системы $(f_n), (g_n)$ и числа $\lambda_n \geq 0$ такие, что $A = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, g_n \rangle f_n$ (ряд сходится по операторной норме).

¶ Утверждение очевидно, если $A = 0$. Пусть A — компактный оператор, $A \neq 0$. Тогда A^*A — самосопряжённый компактный оператор, и по теореме Гильберта-Шмидта существует ортонормированная система (g_n) и числа $\mu_n > 0$ такие, что

$$A^*A = \sum_n \mu_n \langle \cdot, g_n \rangle g_n, \quad \mu_n \rightarrow 0.$$

(В представлении оператора A^*A согласно п. 4 мы оставляем лишь ненулевые слагаемые; $\mu_n > 0$ в силу выкладки:

$$\mu_n = \mu_n \|g_n\|^2 = \langle \mu_n g_n, g_n \rangle = \langle A^*A g_n, g_n \rangle = \|A g_n\|^2.)$$

Отметим далее, что $\ker(A^*A) = \{g_1, g_2, \dots\}^\perp$. Положим $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$, $f_n = \frac{A g_n}{\lambda_n}$. Полученная система векторов (f_n) — ортонормированная:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle A g_n, A g_m \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle A^*A g_n, g_m \rangle = \frac{\lambda_n^2}{\lambda_n \lambda_m} \langle g_n, g_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Произвольный вектор $f \in H$ представим в виде $f = \sum_n \langle f, g_n \rangle g_n + h$, где $h \in \ker(A^*A)$. Но тогда $h \in \ker(A)$, откуда $Af = \sum_n \langle f, g_n \rangle A g_n = \sum_n \lambda_n \langle f, g_n \rangle f_n$ ($f \in H$). Искомое представление A получено. При этом $\lambda_n \rightarrow 0$ влечёт сходимость полученного ряда по операторной норме (!). □

§254. Приложения к линейным интегральным уравнениям

1. Рассмотрим интегральные операторы вида $(Tf)(t) = \int_M K(t, s) f(s) \mu(ds)$ в пространстве $H = L^2(M, \mu)$. При этом предполагается, что $K \in L^2(M \times M, \mu \times \mu)$. Уравнение

$$\int_M K(t, s) f(s) \mu(ds) = g(t)$$

(относительно f) называется *уравнением Фредгольма 1-го рода*. Функция $K(t, s)$ называется *ядром интегрального уравнения* (ядро Гильберта-Шмидта), а оператор T (он является компактным) называется *оператором Гильберта-Шмидта*. При этом (см. 246.5)

$$(T^*f)(t) = \int_M \overline{K(s, t)} f(s) \mu(ds).$$

2. З а м е ч а н и е. Более общим образом можно рассматривать операторное уравнение

$$Tf = g, \tag{1}$$

где T — некоторый компактный оператор. Оно называется операторным уравнением Фредгольма 1-го рода. Уравнение (1) не корректно в следующем смысле: если g_1, g_2 — близкие (по норме) правые части, то соответствующие решения f_1, f_2 (если они существуют) могут быть далёкими друг от друга. Действительно, оператор T

заведомо не обратим (т. к. $0 \in \sigma(T)$), и даже если T^{-1} определён, он является замкнутым, но не непрерывным оператором. Поэтому существует последовательность $g_n \rightarrow \theta$ такая, что $T^{-1}g_n$ не стремится к θ .

3. Уравнение вида

$$f(t) - \int_M K(t, s)f(s)\mu(ds) = g(t)$$

(относительно неизвестной функции f) называется уравнением Фредгольма 2-го рода. Мы будем записывать его в операторной форме:

$$(I - T)f = g, \quad (2)$$

где T — компактный оператор. Если $g \neq \theta$, то уравнение (2) называется *неоднородным*; если $g = \theta$, — *однородным*:

$$(I - T)f = \theta. \quad (3)$$

Уравнение

$$(I - T^*)f = \theta \quad (4)$$

называется сопряжённым однородным уравнением.

Основные результаты, касающиеся разрешимости уравнений Фредгольма 2-го рода, собраны в следующих трех теоремах (также называемых теоремами Фредгольма):

4. Уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда g ортогонально каждому решению сопряжённого однородного уравнения (4).

5. [Альтернатива Фредгольма]. Либо уравнение (2) имеет при любом g единственное решение, либо однородное уравнение (3) имеет ненулевое решение.

6. Однородные уравнения (3), (4) имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

¶ 4. Следует немедленно из представления

$$H = \ker(I - T^*) \oplus \mathcal{R}(I - T) \quad (5)$$

(см. 248.4(iv)), в котором учтено, что $\mathcal{R}(I - T)$ замкнуто (см. 245.7).

5. Это следствие теоремы §252 при $\lambda = 1$.

6. Пусть $\{f_1, \dots, f_m\}$, $\{h_1, \dots, h_n\}$ — ортонормированные базисы из решений уравнений (3) и (4) соответственно и пусть, напротив, $n \neq m$. Рассмотрим для определённости случай $n > m$ (случай $n < m$ рассматривается аналогично). Определим компактный оператор S равенством

$$S = T - \sum_{k=1}^m \langle \cdot, f_k \rangle h_k$$

и заметим, что уравнение $Sf = f$ имеет лишь тривиальное решение. {Действительно, если f — решение этого уравнения, то все слагаемые в левой части равенства

$$(I - T)f + \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle h_k = \theta$$

попарно ортогональны (см. (5)). В силу 152.10

$$(I - T)f = \theta, \quad \langle f, f_k \rangle = 0 \quad (1 \leq k \leq m).$$

Тогда из первого равенства следует, что вектор f — линейная комбинация векторов (f_k) , а из остальных, — что $f = \theta$.

Согласно альтернативе Фредгольма заключаем, что уравнение $(I - S)f = h_{m+1}$ однозначно разрешимо. Умножая обе части этого уравнения скалярно на вектор h_{m+1} , получаем (снова см. (5)) противоречие:

$$1 = \langle h_{m+1}, h_{m+1} \rangle = \langle (I - S)f, h_{m+1} \rangle = \langle (I - T)f, h_{m+1} \rangle + \sum_{k=1}^m \langle f, f_k \rangle \langle h_k, h_{m+1} \rangle = 0. \quad \square.$$

§255. Случай симметричных и вырожденных ядер

1. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром Гильберта-Шмидта $K(t, s) (= \overline{K(s, t)})$:

$$f(t) - \int_M K(t, s)f(s)\mu(ds) = g(t).$$

В соответствии с §254 это уравнение с компактным самосопряжённым оператором $(Tf)(t) \equiv \int_M K(t, s)f(s)\mu(ds)$:

$$(I - T)f = g. \quad (*)$$

Отметим следствия теорем Фредгольма применительно к данному случаю:

2. (i) Если число 1 не есть собственное значение оператора T , то уравнение (*) однозначно разрешимо.

(ii) Если 1 — собственное значение T , то уравнение (*) разрешимо, если функция g ортогональна всем собственным функциям, принадлежащим собственному значению 1.

3. Получим решение уравнения (*), используя спектральную теорему для компактного самосопряжённого оператора. Пусть (f_n) — ортонормированный базис из собственных векторов оператора T и

$$T = \sum_n \lambda_n \langle \cdot, f_n \rangle f_n, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \lambda_n \rightarrow 0,$$

— его представление по спектральной теореме 253.4. Пусть

$$\sigma_0 = \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n = 0\}, \quad \sigma_1 = \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n = 1\}, \quad \sigma = \mathbb{N} \setminus (\sigma_0 \cup \sigma_1).$$

Решение уравнения (*) ищем в виде $f = \sum_n \mu_n f_n$, где $\mu_n = \langle f, f_n \rangle$ — неизвестные коэффициенты Фурье вектора f . Тогда равенство $(I - T) \sum_n \mu_n f_n = \sum_n \langle g, f_n \rangle f_n$ перепишется в виде

$$\begin{aligned}
(I - T) \sum_n \mu_n f_n &= \sum_{n \in \sigma_0} \mu_n (I - T) f_n + \sum_{n \in \sigma_1} \mu_n (I - T) f_n \\
&+ \sum_{n \in \sigma} \mu_n (I - T) f_n = \sum_{n \in \sigma_0} \mu_n f_n + \sum_{n \in \sigma} \mu_n (1 - \lambda_n) f_n \\
&= \sum_{n \in \sigma_0} \langle g, f_n \rangle f_n + \sum_{n \in \sigma_1} \langle g, f_n \rangle f_n + \sum_{n \in \sigma} \langle g, f_n \rangle f_n.
\end{aligned}$$

С учётом единственности представления элемента рядом Фурье получаем в случае

$$2(i) \text{ (тогда } \sigma_1 = \emptyset): \mu_n = \begin{cases} \langle g, f_n \rangle, & \text{если } n \in \sigma_0, \\ \frac{\langle g, f_n \rangle}{1 - \lambda_n}, & \text{если } n \in \sigma. \end{cases} \quad \text{Искомое решение имеет вид}$$

$$f = \sum_{n \in \sigma_0} \langle g, f_n \rangle f_n + \sum_{n \in \sigma} (1 - \lambda_n)^{-1} \langle g, f_n \rangle f_n.$$

В случае 2(ii) (тогда $\sigma_1 \neq \emptyset$ и необходимо $\langle g, f_n \rangle = 0$ ($n \in \sigma_1$)) имеем

$$f = \sum_{n \in \sigma_0} \langle g, f_n \rangle f_n + \sum_{n \in \sigma_1} \mu_n f_n + \sum_{n \in \sigma} (1 - \lambda_n)^{-1} \langle g, f_n \rangle f_n,$$

где μ_n ($n \in \sigma_1$) — произвольные константы.

4. Рассмотрим в заключение случай вырожденного ядра. Именно, пусть $K(t, s) = \sum_{j=1}^n P_j(t) Q_j(s)$, где $\{P_j\}$, $\{Q_j\}$ — наборы линейно независимых функций. Тогда

$$(Tf)(t) = \int_M \left[\sum_{j=1}^n P_j(t) Q_j(s) \right] f(s) \mu(ds) = \sum_{j=1}^n \langle f, \overline{Q_j} \rangle P_j(t).$$

Итак, T — конечномерный оператор. Обозначим

$$x_j = \langle f, \overline{Q_j} \rangle, \quad b_j = \langle g, \overline{Q_j} \rangle, \quad a_{ij} = \int_M P_i(t) Q_j(t) \mu(dt) = \langle P_i, \overline{Q_j} \rangle.$$

Тогда (*) превратится в уравнение $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n x_j P_j(t)$. Снова подставляя $f(t)$ в (*), получим

$$g(t) + \sum_{j=1}^n x_j P_j(t) - \sum_{j=1}^n \langle g + \sum_{i=1}^n x_i P_i, \overline{Q_j} \rangle P_j(t) = g(t),$$

или $\sum_{j=1}^n \{x_j - b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i\} P_j(t) = 0$. Так как $\{P_j\}$ — линейно независимые функции, приходим к следующей системе уравнений относительно неизвестных x_j : $x_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j$ ($1 \leq j \leq n$). Таким образом, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений, условия разрешимости которой хорошо известны из курса линейной алгебры.

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Заключительный раздел курса можно рассматривать как возвращение к его началу в контексте нормированных пространств. По существу речь идёт о локальном изучении нелинейных отображений посредством отображений линейных. В этом смысле этот заключительный раздел может служить отправной точкой для нелинейного функционального анализа, включающего в себя, с одной стороны, классическое вариационное исчисление, восходящее к трудам Эйлера и Лагранжа, с другой стороны, это — современные разделы функционального анализа, интенсивно развивающиеся и далеко ещё не завершённые. Здесь мы ограничимся лишь самыми первоначальными сведениями.

§256. Производная Фреше и её свойства

1. Пусть E, F — нормированные пространства над полем $\Lambda (= \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{R})$, $U (\subset E)$ — открыто. Отображение $A : U \rightarrow F$ называется *дифференцируемым в точке* $x \in U$, если существует ограниченный линейный оператор $L_x \in L(E, F)$ такой, что справедливо асимптотическое равенство

$$A(x+h) - A(x) = L_x h + o(h) \quad (h \rightarrow \theta). \quad (*)$$

{Здесь, как обычно, равенство $r(h) = o(h)$ ($h \rightarrow \theta$) означает, что $\lim_{h \rightarrow \theta} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$, см. 103.1.} Оператор L_x называется *производной Фреше* отображения A и обозначается также $A'(x)$; $L_x h$ — *дифференциал Фреше* отображения A в точке x .

Отметим элементарные свойства производной Фреше.

2. Если A дифференцируемо в точке x , то производная Фреше L_x определена однозначно.

3. Если отображение A дифференцируемо в точке x , то оно непрерывно в этой точке.

4. Если отображение A постоянно, то его производная Фреше равна нулю (то есть нулевому линейному оператору).

5. Если $A \in L(E, F)$, то A дифференцируемо в каждой точке $x \in E$ и $A'(x) = A$.

6. Если $A, B : U \rightarrow F$ дифференцируемы в точке $x \in U$, то в этой точке дифференцируемы отображения $A + B$, λA ($\lambda \in \Lambda$), причём

$$(A+B)'(x) = A'(x) + B'(x), \quad (\lambda A)'(x) = \lambda A'(x).$$

7. Пусть E, F, G — нормированные пространства $U (\subset E)$, $V (\subset F)$ открыты, $A : U \rightarrow F$ дифференцируемо в точке $x \in U$, $A(U) \subset V$ и $B : V \rightarrow G$ дифференцируемо в точке $A(x)$. Тогда в точке x дифференцируемо отображение $B \circ A$, причём $(B \circ A)'(x) = B'(A(x))A'(x)$.

Доказательство указанных утверждений проводится по известным схемам (см. §75) без каких-либо принципиальных изменений. Тем не менее, рекомендуется привести эти доказательства в контексте Упражнения 10 (см. ниже).

Примеры. 8. Пусть $f(u, v)$ — непрерывная функция двух переменных, обладающая непрерывной частной производной $f'_v(u, v)$. Исследуем на дифференцируемость функционал $\Phi : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, заданный интегралом $\Phi(x) = \int_a^b f(t, x(t)) dt$. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(x+h) - \Phi(x) &= \int_a^b [f(t, x(t)+h(t)) - f(t, x(t))] dt \\ &= \int_a^b [f'_v(t, x(t))h(t) + o(h(t))] dt \quad (h \rightarrow \theta).\end{aligned}$$

Кроме того, из равенства

$$f(t, x(t)+h(t)) - f(t, x(t)) = f'_v(t, x(t))h(t) + o(h(t)) \quad (h \rightarrow \theta)$$

следует, что остаток $o(h(t))$ — непрерывная функция и поэтому интеграл $\int_a^b o(h(t)) dt$ корректно определён. При этом $\lim_{h \rightarrow \theta} \frac{1}{\|h\|} \cdot \left| \int_a^b o(h(t)) dt \right| = 0$, так как сходимость $h \rightarrow \theta$ в $C[a, b]$ означает равномерную сходимость к нулю. Итак, $\int_a^b o(h(t)) dt = o(h)$ ($h \rightarrow \theta$). Поэтому

$$\Phi'(x)(h) = \int_a^b f'_v(t, x(t))h(t) dt \quad (h \in C[a, b]).$$

(Для значения функционала $\Phi'(x)$ на векторе h мы используем более привычную для глаз запись $\Phi'(x)(h)$ вместо $\Phi'(x)h$.)

9. В вещественном гильбертовом пространстве H продифференцируем функционал $A(f) = \|f\|^2$ ($f \in H$). Имеем

$$A(f+h) - A(f) = 2\langle h, f \rangle + \|h\|^2.$$

Поэтому $A'(f) = 2\langle \cdot, f \rangle \in H^*$.

Упражнение 10. Изменим основное определение п. 1, потребовав, чтобы в равенстве (*) оператор $L_x : E \rightarrow F$ был просто линейным (не обязательно ограниченным). Проанализировать, какие свойства (из свойств 2–7) производной остаются в силе для такого определения.

11. В вещественном гильбертовом пространстве исследовать на дифференцируемость функционал $B(f) = \|f\|$.

§257. Необходимое условие локального экстремума

1. Пусть E — нормированное пространство и $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественный функционал. Подобно 84.1 вводится понятие локального экстремума. Говорят, что функционал Φ обладает *локальным максимумом* в точке f_0 , если найдется $\varepsilon > 0$ такое,

что $f \in B_\varepsilon(f_0)$ влечет $\Phi(f) \leq \Phi(f_0)$. Аналогично определяется локальный минимум. Известное необходимое условие локального экстремума для функций (см. 84.2) обобщается на случай нормированного пространства:

2. Если функционал $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируем и обладает локальным экстремумом в точке f_0 , то $\Phi'(f_0) = 0$.

¶ Пусть для определённости Φ обладает в точке f_0 локальным максимумом. Пусть, напротив, $\Phi'(f_0) \neq 0$. Тогда найдётся вектор h такой, что $\Phi'(f_0)h \neq 0$. Пусть для определённости $\Phi'(f_0)h > 0$. В условии дифференцируемости функционала

$$\Phi(f_0 + g) - \Phi(f_0) = \Phi'(f_0)g + o(g) \quad (g \rightarrow \theta)$$

будем брать векторы g вида th ($t \rightarrow 0$, $t > 0$). Тогда для достаточно малых $t > 0$:

$$\frac{|o(th)|}{\|th\|} < \frac{\Phi'(f_0)h}{2\|h\|}. \text{ Для таких } t \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} \Phi(f_0 + th) - \Phi(f_0) &= \|th\| \left[\frac{\Phi'(f_0)th}{\|th\|} + \frac{o(th)}{\|th\|} \right] = \|th\| \left[\frac{\Phi'(f_0)h}{\|h\|} + \frac{o(th)}{\|th\|} \right] \\ &\geq \|th\| \left[\frac{\Phi'(f_0)h}{\|h\|} - \frac{|o(th)|}{\|th\|} \right] > 0, \end{aligned}$$

— противоречие с локальным максимумом в точке f_0 . \square

3. П р и м е р. Вернёмся к примеру 256.8. Если наш функционал $\Phi(x) = \int_a^b f(t, x(t)) dt$ обладает локальным экстремумом в точке x_0 , то

$$\Phi'(x_0)h = \int_a^b f'_v(t, x_0(t))h(t) dt = 0 \quad (h \in C[a, b]).$$

Отсюда следует, что $f'_v(t, x_0(t)) = 0$ (!!).

§258. Оценочная формула Лагранжа

Пусть E, F — нормированные пространства над полем $\Lambda (= \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{R})$, $U (\subset E)$ — открыто, отрезок $[x, x+h] = \{x+th : 0 \leq t \leq 1\}$ содержится в U и отображение $A : U \rightarrow F$ дифференцируемо на этом отрезке. Тогда

$$\|A(x+h) - A(x)\| \leq \sup_{\theta \in [0,1]} \|A'(x+\theta h)\| \|h\|.$$

¶ Пусть функционал $\varphi \in F^*$ произволен. Положим $f(t) \equiv \varphi(A(x+th))$ ($0 \leq t \leq 1$). Эта числовая функция числового аргумента дифференцируема по t на интервале $(0, 1)$ в силу 256.7, причём $f'(t) = \varphi(A'(x+th)h)$ ($0 < t < 1$). Применяя к f формулу конечных приращений Лагранжа, имеем $f(1) - f(0) = f'(\theta)$ ($0 < \theta < 1$), $\theta = \theta(\varphi)$, то есть

$$|\varphi(A(x+h) - A(x))| = |\varphi(A'(x+\theta h)h)| \leq \|\varphi\| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|A'(x+\theta h)\| \|h\|.$$

По следствию к теореме Хана-Банаха 228.3, существует такой элемент $\psi \in F^*$, $\|\psi\| = 1$, что $\psi(A(x+h) - A(x)) = \|A(x+h) - A(x)\|$. Применяя полученную выше оценку к функционалу ψ , получим

$$\|A(x+h) - A(x)\| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|A'(x+\theta h)\| \|h\|. \quad \square$$

§259. Интеграл от вектор-функции со значениями в банаховом пространстве

1. Пусть F — банахово пространство и $A : [a, b] \rightarrow F$ — вектор-функция. Будем говорить, что эта функция *интегрируема* по отрезку $[a, b]$, если существует предел интегральных сумм Римана

$$\lim_n \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) A(\xi_k), \quad t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k,$$

при любом выборе разложений $\Delta(a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$, подчинённых условию $\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). В этом случае указанный предел называется *интегралом Римана от вектор-функции* A и обозначается символом $\int_a^b A(t) dt$. Корректность определения интеграла следует из аргументов, использованных в скалярном случае (см. 46.4). Отметим некоторые свойства интеграла (ср. §81).

2. Непрерывная вектор-функция интегрируема.

3. Если $A : [a, b] \rightarrow F$ интегрируема, а $B \in L(F, G)$, где G — ещё одно банахово пространство, то BA интегрируема и

$$\int_a^b BA(t) dt = B \int_a^b A(t) dt.$$

4. Если вектор-функция $A(t)$ непрерывна, то

$$\left\| \int_a^b A(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|A(t)\| dt.$$

5. [Формула Ньютона-Лейбница]. Пусть вектор-функция $A(t)$ непрерывно дифференцируема. Тогда

$$\int_a^b A'(t) dt = A(b) - A(a).$$

¶ 2. В силу полноты пространства F достаточно установить, что последовательность сумм Римана $S_{\Delta_k} = \sum_{j=1}^{n_k} (t_j - t_{j-1}) A(\xi_j)$ фундаментальна. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\delta > 0$ таково, что $\forall t, s \in [a, b]$ ($|t - s| < \delta \Rightarrow \|A(t) - A(s)\| < \varepsilon$). Выберем теперь $N \in \mathbb{N}$ столь большим, чтобы $d(\Delta_k) < \delta/2$ ($k > N$). Пусть $m, k > N$ и $\Delta(a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b)$ — разложение, узлы которого являются объединением узлов разложений

$$\Delta_k(a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_k} = b) \text{ и } \Delta_s(a = s_0 < s_1 < \dots < s_{n_m} = b).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|S_{\Delta_k} - S_{\Delta_m}\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n_k} (t_j - t_{j-1}) A(\xi_j) - \sum_{i=1}^{n_m} (s_i - s_{i-1}) A(\eta_i) \right\| \\ &= \left\| \sum_{r=1}^n (\tau_r - \tau_{r-1}) [A(\xi_j^r) - A(\eta_i^r)] \right\|, \end{aligned}$$

где $\xi_j^r = \xi_j$, если $[\tau_{r-1}, \tau_r] \subset [t_{j-1}, t_j]$, и $\eta_i^r = \eta_i$, если $[\tau_{r-1}, \tau_r] \subset [s_{i-1}, s_i]$. Тогда

$$|\xi_j^r - \eta_i^r| \leq |\xi_j^r - \tau_r| + |\tau_r - \eta_i^r| \leq |t_j - t_{j-1}| + |s_i - s_{i-1}| < \delta$$

влечёт $\|A(\xi_j^r) - A(\eta_i^r)\| < \varepsilon$, а значит,

$$\|S_{\Delta_k} - S_{\Delta_m}\| \leq \sum_{r=1}^n \|A(\xi_j^r) - A(\eta_i^r)\|(\tau_r - \tau_{r-1}) < \varepsilon(b-a). \square$$

3. Так как линейное отображение B непрерывно, имеем для любой последовательности разложений $\Delta(a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$, подчинённых условию $\max(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и любом выборе $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$B \int_a^b A(t) dt = B \left(\lim_n \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) A(\xi_k) \right) = \lim_n \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) BA(\xi_k) = \int_a^b BA(t) dt.$$

4. Из непрерывности вектор-функции $A(t)$ следует непрерывность скалярной функции $\|A(t)\|$ и, следовательно, существование интеграла $\int_a^b \|A(t)\| dt$. Теперь

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b A(t) dt \right\| &= \left\| \lim_n \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) A(\xi_k) \right\| = \lim_n \left\| \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) A(\xi_k) \right\| \\ &\leq \lim_n \sum_{k=1}^n \|A(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1}) = \int_a^b \|A(t)\| dt. \end{aligned}$$

5. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. По условию вектор-функция $A'(t)$ непрерывна и в силу п. 2 она интегрируема. Тогда найдётся разложение $\Delta(a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$ такое, что

$$\left\| \int_a^b A'(t) dt - \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) A'(t_k) \right\| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b A'(t) dt - [A(b) - A(a)] \right\| &= \left\| \int_a^b A'(t) dt - \sum_{k=1}^n [A(t_k) - A(t_{k-1})] \right\| \\ &\leq \left\| \int_a^b A'(t) dt - \sum_{k=1}^n A'(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{k=1}^n [A(t_k) - A(t_{k-1}) - A'(t_k)(t_k - t_{k-1})] \right\| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^n \|A(t_k) - A(t_{k-1}) - A'(t_k)(t_k - t_{k-1})\|. \end{aligned}$$

Применяя оценочную формулу Лагранжа §258 к функции $B(t) = A(t) + A'(t_k)(t_k - t)$, получим

$$\begin{aligned} \|A(t_k) - A(t_{k-1}) - A'(t_k)(t_k - t_{k-1})\| &= \|B(t_k) - B(t_{k-1})\| \\ &\leq (t_k - t_{k-1}) \sup_{\xi \in [t_{k-1}, t_k]} \|A'(\xi) - A'(t_k)\|. \end{aligned}$$

Из равномерной непрерывности вектор-функции $A'(t)$ следует, что при разложениях Δ достаточно малого диаметра

$$\sup_{\xi \in [t_{k-1}, t_k]} \|A'(\xi) - A'(t_k)\| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Поэтому $\left\| \int_a^b A'(t) dt - [A(b) - A(a)] \right\| < 2\varepsilon$. Из произвольности ε утверждение доказано. \square

§260. Производные высших порядков. Формула Тейлора

1. Пусть E, F — нормированные пространства, $U (\subset E)$ — открыто. Пусть отображение $A : U \rightarrow F$ дифференцируемо в U , причём производное отображение $A' : U \rightarrow L(E, F)$ дифференцируемо в точке $x \in U$. Тогда в соответствии с 256.1 однозначно определено отображение $A''(x) \in L(E, L(E, F))$, называемое *2-й производной* отображения A . Удобно отождествлять $A''(x)$ с элементом пространства $L(E \times E, F)$ (см. 223.13) как 2-линейным отображением, действующим по формуле

$$A''(x)\{h, k\} \equiv (A''(x)h)k \quad (h, k \in E).$$

Аналогично вводятся производные более высоких порядков.

В заключение мы приведём аналог формулы Тейлора, ограничившись случаем остатка в форме Пеано при $n = 2$, и укажем её применение к нахождению достаточных условий локального экстремума функционала.

2. Пусть в условиях п. 1 отображение A'' определено и непрерывно в U . Если $\{x + th : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$, то

$$A(x + h) = A(x) + A'(x)h + \frac{1}{2}A''(x)\{h, h\} + o(\|h\|^2) \quad (h \rightarrow \theta).$$

¶ Так как A' дифференцируемо в U , имеем

$$A'(x + h) - A'(x) = A''(x)h + o(h) \quad (h \rightarrow \theta). \quad (*)$$

Применяя формулу Ньютона-Лейбница 259.5 к вектор-функции $t \rightarrow [A(x + th)]' = A'(x + th)h$ ($0 \leq t \leq 1$), имеем (с учётом $(*)$)

$$\begin{aligned} A(x + h) - A(x) &= \int_0^1 A'(x + th)h dt = \int_0^1 [A'(x)h + (A''(x)th)h + o(th)h] dt \\ &= A'(x)h + \frac{1}{2}A''(x)\{h, h\} + r(h), \end{aligned}$$

где $r(h) = \int_0^1 o(th)h dt$. Покажем, что $r(h) = o(\|h\|^2)$ ($h \rightarrow \theta$). Для произвольного

$\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|h\| < \delta$ влечёт $\frac{\|o(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon$, откуда

$$\frac{1}{\|h\|^2} \cdot \left\| \int_0^1 o(th)h dt \right\| \leq \frac{1}{\|h\|^2} \cdot \int_0^1 \|o(th)\| \|h\| dt < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim_{h \rightarrow \theta} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|^2} = 0$. \square

3. Пусть U — открытое множество в банаховом пространстве E и функционал $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ имеет 2-ю непрерывную производную $\Phi'' : U \rightarrow L(E \times E, \mathbb{R})$. Если $f_0 \in U$ — точка локального минимума для Φ , то $\Phi''(f_0)\{h, h\} \geq 0$ ($h \in E$). Обратно, если $\Phi'(f_0) = 0$ и $\Phi''(f_0)\{h, h\} \geq C\|h\|^2$ при некотором $C > 0$, то f_0 — точка локального минимума для Φ .

¶ Пусть f_0 — точка локального минимума для Φ . Тогда $\Phi'(f_0) = 0$ и по формуле Тейлора (п. 2)

$$0 \leq \Phi(f_0 + h) - \Phi(f_0) = \frac{1}{2}\Phi''(f_0)\{h, h\} + o(\|h\|^2) \quad (h \rightarrow \theta).$$

Введя числовой параметр $t > 0$, получим отсюда

$$\Phi''(f_0)\{h, h\} = \frac{2}{t^2} [\Phi(f_0 + th) - \Phi(f_0) + o(\|th\|^2)].$$

Переходя здесь к пределу при $t \rightarrow 0$, получим, что $\Phi''(f_0)\{h, h\} \geq 0$.

Обратно, пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\frac{|o(\|h\|^2)|}{\|h\|^2} < \frac{C}{4}$ ($\|h\| < \varepsilon$), где $o(\|h\|^2)$ — остаток в формуле Тейлора (п. 2) для функционала Φ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(f_0 + h) - \Phi(f_0) &= \frac{1}{2}\Phi''(f_0)\{h, h\} + o(\|h\|^2) \geq \frac{C}{2}\|h\|^2 + o(\|h\|^2) \\ &> \frac{C}{4}\|h\|^2 > 0 \quad (\|h\| < \varepsilon), \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

ПРИЛОЖЕНИЕ I. МОДЕЛИ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

Данное приложение посвящено детальному изложению одной модели числовой прямой. Попутно изложены начальные сведения из теории отношений, полезные для основного курса. В заключение приведён эскиз модели числовой прямой, предложенной А. Н. Колмогоровым (Успехи мат. наук, 1946, вып. 1, с. 217–219). Эта модель интересна тем, что для построения действительных чисел используются только натуральные числа (а рациональные числа в качестве промежуточного шага не вводятся).

1. Пусть E — множество. Непустая часть ρ множества $E \times E$ называется (бинарным) *отношением* в множестве E . Если $(x, y) \in \rho$, то говорят, что элементы x и y находятся в отношении ρ и пишут $\rho(x, y)$ (существен порядок следования элементов x и y в этом обозначении!). Пусть ρ — отношение в E . Смежным классом элемента $x \in E$ называется множество $\rho(x) \equiv \{y \in E : \rho(y, x)\}$. Чаще всего имеют дело с отношениями, обладающими некоторыми из нижеследующих свойств:

- рефлексивность: $\forall x \in E (\rho(x, x))$,
 симметрия: $\rho(x, y) \Rightarrow \rho(y, x)$,
 антисимметрия: $“\rho(x, y), \rho(y, x)” \Rightarrow x = y$,
 транзитивность: $“\rho(x, y), \rho(y, z)” \Rightarrow \rho(x, z)$.

2. Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*. Нам понадобится теорема, характеризующая отношения эквивалентности. Чтобы её сформулировать, введём понятие разбиения множества.

3. Семейство $(A_i)_{i \in I}$ непустых частей множества E называется *разбиением* E , если $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

4. Т е о р е м а. Каждому отношению эквивалентности ρ в множестве E отвечает разбиение $(A_i)_{i \in I}$ множества E такое, что

$$\rho(x, y) \text{ тогда } \exists i \in I (x, y \in A_i). \quad (1)$$

Обратно, каждому разбиению $(A_i)_{i \in I}$ множества E отвечает отношение эквивалентности в E , характеризующее свойством (1).

¶ Пусть ρ — отношение эквивалентности. В силу рефлексивности ρ ни один из смежных классов семейства $\{\rho(x)\}_{x \in E}$ не пуст. Из симметрии и транзитивности ρ следует, что для произвольных $x, y \in E$ классы $\rho(x)$ и $\rho(y)$ либо совпадают, либо не пересекаются (!!). В качестве искомого разбиения возьмём попарно различные смежные классы семейства $\{\rho(x)\}_{x \in E}$. Обратное утверждение очевидно (!!). □

5. Множество, элементами которого являются попарно различные смежные классы отношения эквивалентности ρ в множестве E , называется *фактор-множеством* множества E по отношению ρ . Оно обозначается символом E/ρ . Отображение $x \rightarrow \rho(x)$, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in E$ его смежный класс, называется канонической сюръекцией множества E на E/ρ .

6. Рефлексивное антисимметричное транзитивное отношение в множестве E называется *отношением порядка*. Множество E , в котором фиксировано некоторое отношение порядка ρ называется *упорядоченным множеством*. В этом случае обычно

пишут $x \leq y$ вместо $\rho(x, y)$. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то пишут $x < y$. Элементы x, y упорядоченного множества называются сравнимыми, если $x \leq y$ или $y \leq x$. Порядок в E называется *совершенным*, если все элементы E попарно сравнимы; в этом случае E называется *совершенно упорядоченным*.

7. З а м е ч а н и е. Если E совершенно упорядочено, то для любых $x, y \in E$ имеет место одно из трёх: $x < y$, $x = y$, $y < x$.

8. Пусть Λ — поле бесконечной характеристики (из аксиом (I)–(III) следует, что именно таковым должно быть \mathbb{R}). В 6.1 было сказано, как возникает при этом множество \mathbb{N} натуральных чисел. Подгруппу аддитивной группы кольца Λ , порождённую единицей кольца, обозначим через \mathbb{Z} . Очевидно, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Множество \mathbb{Z} совершенно упорядочено отношением: $n \leq m$, если $\exists p \in \mathbb{N}$ ($m = n + p - 1$).

9. Рассмотрим множество $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, элементы которого условимся записывать в виде p/q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$). Пусть $\rho(p/q, p_1/q_1)$ означает, что $pq_1 = p_1q$. Отношение ρ — отношение эквивалентности в E , а E/ρ естественно отождествляется с множеством \mathbb{Q} .

10. Множество \mathbb{Q} совершенно упорядочено отношением: $p/q \leq r/s$, если $ps \leq rq$ в смысле порядка в \mathbb{Z} (здесь $p, r \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}$).

11. У п р а ж н е н и е. Покажите, что в упорядоченном множестве отношение $<$ транзитивно.

12. Под последовательностью в \mathbb{Q} мы понимаем функцию $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Подобно тому, как это было сделано в разделе “Предел числовой последовательности”, можно ввести понятие сходящейся (в \mathbb{Q}) последовательности, фундаментальной последовательности и т. п. В частности, последовательность $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbb{Q}) \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} (|f(n+p) - f(n)| < \varepsilon).$$

Нетрудно видеть, что фундаментальными являются все сходящиеся последовательности. Очень существенно, что обратное утверждение уже неверно: существуют фундаментальные последовательности в \mathbb{Q} , которые не сходятся ни к одному рациональному числу (см. ниже п. 18). Для сходящихся последовательностей в \mathbb{Q} имеют место обычные арифметические свойства. Аналоги этих свойств имеют место и для фундаментальных последовательностей в \mathbb{Q} (их доказательство является рутинным повторением соответствующих рассуждений для общих числовых последовательностей).

13. Если последовательность f фундаментальна, то она ограничена.

14. Если последовательности f и g фундаментальны, то фундаментальными являются последовательности $f \pm g$, $f \cdot g$.

15. Если последовательность f фундаментальна и не сходится к 0, то и последовательность $1/f$ фундаментальна.

16. Если последовательность f не возрастает и ограничена снизу, то она фундаментальна.

17. З а м е ч а н и е. В этом приложении при рассмотрении частного двух последовательностей f/g не исключается, что $g(n) = 0$ для некоторых n . Для таких n разрешается считать числа $(f/g)(n)$ произвольными.

18. У п р а ж н е н и е. Покажите, что последовательность f в \mathbb{Q} , заданная равенствами $f(1) = 2$, $f(n+1) = \frac{1}{2}(f(n) + \frac{2}{f(n)})$ ($n \geq 1$), является фундаментальной, но не сходится к рациональному числу. (Убедитесь, что f не возрастает и ограничена снизу, учтите п. 16 и воспользуйтесь арифметическими свойствами сходящихся последовательностей.)

19. Пусть Φ — множество всех фундаментальных последовательностей в \mathbb{Q} . Отношение ρ , заданное свойством: $\rho(f, g)$, если $(f - g)(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), — является отношением эквивалентности в Φ . Таким образом, элементы множества Φ/ρ являются попарно различными классами $\rho(f)$ ($f \in \Phi$). В качестве множества \mathbb{R} действительных чисел возьмём фактор-множество Φ/ρ . Определим в Φ/ρ операции $(+)$ и (\cdot) :

$$\rho(f) + \rho(g) \equiv \rho(f + g), \quad \rho(f) \cdot \rho(g) \equiv \rho(f \cdot g).$$

В силу п. 14 эти определения корректны. Смежный класс, образованный последовательностями, сходящимися к числу $q \in \mathbb{Q}$, назовём Φ -рациональным числом и обозначим $\rho(q)$; в этот класс входит “постоянная” последовательность (q, q, \dots) .

Итак, определено вложение $q \rightarrow \rho(q)$ множества \mathbb{Q} в Φ/ρ . Это вложение инъективно (!!).

Определим в Φ/ρ отношение порядка

$$\rho(f) \leq \rho(g), \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (f(n) - g(n) < \varepsilon).$$

¶ Убедимся, что \leq задаёт порядок. Это отношение рефлексивно и транзитивно (!!). Проверим, что оно антисимметрично. Если $\rho(f) \leq \rho(g)$ и $\rho(g) \leq \rho(f)$, то из (2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $N \in \mathbb{N}$ такое, что при любом $n > N$ $f(n) - g(n) < \varepsilon$, $g(n) - f(n) < \varepsilon$. Следовательно, $|f(n) - g(n)| < \varepsilon$ при $n > N$. Таким образом, $(f - g)(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). По определению ρ отсюда следует, что $\rho(f, g)$, то есть $\rho(f) = \rho(g)$. □

Перейдём теперь к проверке аксиом для нашей модели.

20. Начнём с аксиомы (II). Операция $\ll + \gg$ определяет в Φ/ρ структуру коммутативной группы (!!). Роль единицы этой группы (то есть нуля поля) исполняет Φ -рациональное число $\rho(0)$. Например, дистрибутивность $\ll + \gg$ относительно $\ll \cdot \gg$ следует из выкладки

$$\begin{aligned} \rho(f) \cdot [\rho(g) + \rho(h)] &= \rho(f) \cdot \rho(g + h) = \rho(f \cdot (g + h)) \\ &= \rho(f \cdot g + f \cdot h) = \rho(f \cdot g) + \rho(f \cdot h) \\ &= \rho(f)\rho(g) + \rho(f)\rho(h) \quad (f, g, h \in \Phi). \end{aligned}$$

Чтобы завершить проверку аксиомы (II), осталось убедиться, что ненулевые элементы Φ/ρ обратимы относительно операции $\ll \cdot \gg$. Пусть $\rho(f) \neq \rho(0)$, то есть фундаментальная последовательность f не сходится к 0. В силу п. 15 $g = 1/f \in \Phi$. Кроме того, $\rho(f) \cdot \rho(g) = \rho(f \cdot (1/f)) = \rho(1)$, что и требовалось.

21. Перейдём теперь к аксиоме (I). Отметим, что в силу (2) отношение $<$ в Φ/ρ характеризуется свойством

$$\rho(f) < \rho(g) \text{ тогда } \exists \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in \mathbb{Q}) \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ (\varepsilon < g(n) - f(n)). \quad (3)$$

Кроме того,

$$\rho(f) < \rho(g) \text{ тогда } \rho(f - g) < \rho(0). \quad (4)$$

В силу пп. 7, 11 аксиомы (I_1) , (I_2) справедливы. В силу 6.7 аксиому (I_3) можно не проверять.

22. Аксиома (III). Пусть $\rho(f) < \rho(0)$ и $h \in \Phi$ произвольно. Пусть $\varepsilon > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\varepsilon < -f(n) \quad (n > N). \quad (5)$$

Тогда $\varepsilon < h(n) - [f(n) + h(n)]$ ($n > N$), то есть $\rho(f) + \rho(h) = \rho(f + h) < \rho(h)$. С учётом (4) отсюда следует свойство (III_1) . Пусть, кроме того, $0 < \rho(h)$. Тогда существует $q \in \mathbb{Q}$ ($0 < q$) и $N_1 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$q < h(n) \quad (n > N_1). \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует: $q\varepsilon < -f(n)h(n)$ ($n > N_2 = \max\{N_1, N_2\}$), то есть $\rho(f) \cdot \rho(h) < \rho(0)$. С учётом (4) отсюда вытекает (III_2) .

В силу 6.9 можно не заниматься проверкой аксиомы (IV).

23. Аксиома (V). Пусть $E \subset \Phi/\rho$ не пусто и ограничено сверху. Без ограничения общности можно считать (и мы будем считать), что $\rho(0) \leq \rho(f)$ ($\rho(f) \in E$). Пусть F — множество всех мажорант множества E . Пусть m_0 — наибольшее целое неотрицательное число такое, что $\rho(m_0)$ — не мажоранта E , так что $\rho(m_0 + 1)$ — наименьшее Φ -натуральное число из F . Рассмотрим 10 Φ -рациональных чисел

$$\rho(m_0.0), \rho(m_0.1), \dots, \rho(m_0.9) \quad (7)$$

(например, при $m_0 = 5$ второе Φ -рациональное число в этом ряду — это Φ -рациональное число $\rho(51/10)$). Пусть $\rho(m_0.m_1)$ — наибольшее из тех Φ -рациональных чисел ряда (7), которое не входит в F (здесь m_1 — одна из цифр $0, 1, \dots, 9$). Рассмотрим снова 10 Φ -рациональных чисел $\rho(m_0.m_1.0), \dots, \rho(m_0.m_1.9)$, и подобно сделанному выше выберем из них число $\rho(m_0.m_1.m_2)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность

$$\rho(m_0), \rho(m_0.m_1), \rho(m_0.m_1.m_2), \dots$$

Φ -рациональных чисел, обладающих свойствами:

(8) при любом k ($= 0, 1, 2, \dots$) Φ -рациональное число $\rho(m_0.m_1 \dots m_k)$ — не мажоранта E ,

(9) при $q_k = m_0.m_1 \dots m_k + 10^{-k}$ Φ -рациональное число $\rho(q_k)$ — мажоранта E .

Рассмотрим последовательность f в \mathbb{Q} , заданную равенствами

$$f(1) = m_0, \ f(2) = m_0.m_1, \ f(3) = m_0.m_1.m_2, \ \dots$$

Нетрудно видеть, что $f \in \Phi$. Для завершения проверки аксиомы (V) нужно лишь убедиться, что $\rho(f)$ — искомая наименьшая мажоранта множества E . Итак, нужно установить, что

- (а) $\rho(f) \in E$,
- (б) если $\rho(g)$ — мажоранта E , то $\rho(f) \leq \rho(g)$.

Проверим (а). Пусть, напротив, $\rho(f)$ — не мажоранта E . Тогда $\exists \rho(g) \in E$ ($\rho(f) < \rho(g)$). Следовательно, существуют $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$) и $N_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $\varepsilon < g(n) - m_0.m_1m_2 \dots m_{n-1}$ ($n > N_1$). Пусть $N_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $10^{-N_2} < \varepsilon$, и пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $n > N + 1$ (см. (9))

$$\begin{aligned} g(n) - q_N &= g(n) - m_0.m_1m_2 \dots m_N - 10^{-N} \\ &= g(n) - m_0.m_1m_2 \dots m_{n-1} + m_0.m_1m_2 \dots m_{n-1} \\ &\quad - m_0.m_1m_2 \dots m_N - 10^{-N} \\ &> \varepsilon + 0.0 \dots m_{N+1} \dots m_{n-1} - 10^{-N} \geq \varepsilon - 10^{-N_2}, \end{aligned}$$

то есть $\rho(q_N) < \rho(g)$, и значит, $\rho(q_N)$ — не мажоранта E . Это противоречит (9).

Проверим (б). Пусть, напротив, $\rho(g)$ — мажоранта E , причём $\rho(g) < \rho(f)$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$) и $N_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $\varepsilon < m_0.m_1m_2 \dots m_{n-1} - g(n)$ при $n > N_1$. Выберем $N_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $10^{-N_2} < \varepsilon$, и пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $n > N + 1$

$$\begin{aligned} m_0.m_1m_2 \dots m_N - g(n) &= m_0.m_1m_2 \dots m_N - m_0.m_1m_2 \dots m_{n-1} \\ &\quad + m_0.m_1m_2 \dots m_{n-1} - g(n) \\ &> -0.0 \dots m_{N+1} \dots m_{n-1} + \varepsilon \\ &> \varepsilon - 10^{-N} \geq \varepsilon - 10^{-N_2}. \end{aligned}$$

Отсюда Φ -рациональное число $\rho(m_0.m_1m_2 \dots m_N)$ — мажоранта E , что противоречит (9). Итак, модель \mathbb{R} построена.

В заключение отметим ещё два важных факта.

24. Т е о р е м а [единственности]. Пусть $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ и $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{\leq})$ — две модели множества действительных чисел. Тогда существует биекция $j : \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ такая, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- (а) $j(\alpha + \beta) = j(\alpha) \hat{+} j(\beta)$,
- (б) $j(\alpha \cdot \beta) = j(\alpha) \hat{\cdot} j(\beta)$,
- (в) $\alpha \leq \beta$ тогда $j(\alpha) \hat{\leq} j(\beta)$.

¶ Идея доказательства: в силу аксиомы (II) в каждой из двух моделей есть множества рациональных чисел (\mathbb{Q} и $\hat{\mathbb{Q}}$), причём существует естественная биекция $j_1 : \mathbb{Q} \rightarrow \hat{\mathbb{Q}}$, обладающая свойствами (а) – (в). Осталось продолжить j_1 до биекции $j : \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ с сохранением свойств (а) – (в). Можно показать, что в аксиоме (I₃) промежуточное число γ всегда можно выбрать рациональным (см. 6.8). Отсюда $\alpha = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q \leq \alpha\}$. Искомая биекция j может быть определена равенством $j(\alpha) = \sup\{j_1(q) : q \leq \alpha\}$. □

25. Т е о р е м а [Г. Кантор]. Множество \mathbb{R} действительных чисел несчётно.

¶ Достаточно установить, что несчётен отрезок $[0, 1]$. Пусть, напротив, $[0, 1] = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. Рассмотрим три отрезка $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$. Пусть $[a_1, b_1]$ — один из них, выбранный из условия $\alpha_1 \notin [a_1, b_1]$ (α_1 не может, очевидно, принадлежать всем трём отрезкам). Отрезок $[a_1, b_1]$ разобьём на три отрезка так же, как мы это проделали с отрезком $[0, 1]$ и пусть $[a_2, b_2]$ — один из трёх подотрезков отрезка $[a_1, b_1]$, которому не принадлежит число α_2 . Продолжая процесс, мы получим систему отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, \dots , удовлетворяющую условиям леммы 11.4. Пусть α — действительное число, принадлежащее всем отрезкам $[a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Этого числа нет, однако, среди членов последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. \square

26. Приведём эскиз ещё одной модели числовой прямой, предложенной А. Н. Колмогоровым. Проверка всех аксиом предлагается в качестве тем самостоятельных исследований. Будем считать известными только неотрицательные целые числа: $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Если $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, то через $\left[\frac{m}{n}\right]$ обозначим наибольшее число $k \in \mathbb{N}_0$, для которого $kn \leq m$.

Пусть \mathcal{F} — множество всех функций $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Рассмотрим подмножество Φ множества \mathcal{F} , состоящее из функций φ , обладающих свойствами:

$$\forall k \in \mathbb{N} \left(\varphi(n) = \left\lfloor \frac{\varphi(kn)}{k} \right\rfloor \right), \quad (10)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} (\varphi(kn) > k\varphi(n)). \quad (11)$$

Присоединим к Φ функцию $\theta \in \mathcal{F}$, $\theta(n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), и обозначим $\Phi_0 = \Phi \cup \{\theta\}$. Зададим в Φ_0 отношение порядка следующим образом:

$$\varphi < \psi \text{ означает, что } \exists n \in \mathbb{N} (\varphi(n) < \psi(n)).$$

Зададим в Φ_0 операции сложения и умножения функций равенствами:

$$(\varphi + \psi)(n) \equiv \max_{k \in \mathbb{N}} \left\lfloor \frac{\varphi(kn) + \psi(kn)}{k} \right\rfloor \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(\varphi \cdot \psi)(n) \equiv \max_{s, k \in \mathbb{N}} \left\lfloor \frac{\varphi(kn)\psi(sn)}{nks} \right\rfloor \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Задача состоит в доказательстве того, что множество Φ_0 обладает всеми свойствами множества неотрицательных вещественных чисел.

27. З а м е ч а н и е. Основная идея предложенной выше модели состоит в использовании “натуральноичной” системы представления действительных чисел (в отличие от известных десятичной и двоичной систем). Именно, неотрицательное действительное число φ характеризуется последовательностью $\varphi(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : k < \varphi n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). В частности, натуральному числу ν в данной модели соответствует последовательность $\nu(n) = \nu n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

ПРИЛОЖЕНИЕ II. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1. Рассмотрим множество \mathbb{R}^2 . Его элементы $z = (x, y)$, где $x, y \in \mathbb{R}$, будем записывать в виде формальной суммы $z = x + iy$ (здесь i является пока просто символом). Определим над этими формальными суммами операции сложения $(+)$ и умножения (\cdot) равенствами

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \equiv (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \equiv (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Указанные операции определяют в \mathbb{R}^2 структуру коммутативного кольца с единицей (нулём кольца является элемент $0 + i0$, а единицей — элемент $1 + i0$) (!!). Более того, ненулевые элементы этого кольца образуют группу по умножению. {В проверке нуждается лишь существование обратного у каждого элемента $z = x + iy \neq 0$. В этом случае $x^2 + y^2 \neq 0$ и, как показывает простой подсчёт, искомым обратным является элемент $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$.} Таким образом, наше кольцо является полем. Оно называется *полем комплексных чисел* и обозначается через \mathbb{C} . Поле вещественных чисел \mathbb{R} можно рассматривать как подполе \mathbb{C} , если отождествить число $x \in \mathbb{R}$ с числом $x + i0 \in \mathbb{C}$. Элемент $0 + i1$ называется мнимой единицей (мы пишем далее i вместо $0 + i1$). Отметим, что $i^2 = i \cdot i = (0 + i1)(0 + i1) = -1$. С учётом этого замечания операции (1) переходят в привычные операции сложения и умножения, дистрибутивного относительно сложения, с заменой i^2 на -1 . Число $x - iy$ называется сопряжённым к $x + iy$ и обозначается \bar{z} .

2. Комплексные числа естественно изображать точками числовой плоскости \mathbb{R}^2 : $z = x + iy \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$. При этом $x \equiv \operatorname{Re} z$ называется действительной частью числа z , $y \equiv \operatorname{Im} z$ — мнимой частью z (Real — действительный, Imaginary — мнимый, англ.). В такой интерпретации покомпонентное сложение (1) комплексных чисел соответствует правилу сложения векторов. Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется величина $|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$. В соответствии с указанной интерпретацией \mathbb{C} называется также комплексной плоскостью. Переходя к полярным координатам, число $z = x + iy \in \mathbb{C}$ зададим координатами (r, φ) :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

так что $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Это тригонометрическая форма комплексного числа. Здесь $r = |z|$, а угол φ называется аргументом числа z . Аргумент определяется с точностью до величины, кратной 2π . Отметим, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\begin{aligned} z_j &= r_j(\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j) \quad (j = 1, 2) \Rightarrow \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\P r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad \square \end{aligned}$$

3. На комплексные числа переносится понятие предела последовательности. По определению $z_0 = \lim_n z_n$ (или $z_n \rightarrow z_0$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N (|z_n - z_0| < \varepsilon).$$

Предел последовательности единствен. Последовательность (z_n) комплексных чисел называется ограниченной, если $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} (|z_n| \leq M)$. Всякая сходящаяся последовательность ограничена. Имеют место аналоги арифметических свойств предела (см. 10.7). Соответствующие доказательства без изменения переносятся на случай комплексных последовательностей.

4. [Теорема Вейерштрасса]. *Каждая ограниченная последовательность комплексных чисел обладает сходящейся подпоследовательностью.*

¶ Пусть $z_n = x_n + i y_n$ — ограниченная последовательность в \mathbb{C} . Последовательности $(x_n), (y_n)$ в \mathbb{R} ограничены в силу оценок

$$|x_n|, |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|. \quad (2)$$

По теореме Вейерштрасса для \mathbb{R} последовательность (x_n) обладает сходящейся подпоследовательностью: $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Последовательность (y_{n_k}) , будучи ограниченной, также обладает сходящейся подпоследовательностью: $y_{n_{k_j}} \rightarrow y_0$ ($j \rightarrow +\infty$). Тогда $z_{n_{k_j}} \rightarrow z_0 = x_0 + i y_0$ ($j \rightarrow +\infty$). \square

5. Последовательность $z_n \in \mathbb{C}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N (|z_n - z_m| < \varepsilon).$$

Имеет место критерий Коши: *последовательность (z_n) в \mathbb{C} фундаментальна тогда и только тогда, когда она сходится.*

¶ В силу неравенств (2) из фундаментальности $z_n = x_n + i y_n$ следует фундаментальность последовательностей действительных чисел $(x_n), (y_n)$. В силу критерия Коши для \mathbb{R} существуют $x_0 = \lim_n x_n, y_0 = \lim_n y_n$. Следовательно, $z_n \rightarrow z_0 = x_0 + i y_0$. \square

6. Рядом в \mathbb{C} назовём формальную сумму

$$z_1 + z_2 + \dots \quad (z_k \in \mathbb{C}). \quad (3)$$

Ряд (3) называется сходящимся, если сходится последовательность его частных сумм $s_n \equiv z_1 + \dots + z_n$; при этом $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \lim_n s_n$. Для рядов в \mathbb{C} остаются справедливыми утверждения 13.3 и 13.5. Ряд (3) называется сходящимся абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$. Из критерия Коши следует, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

ПРИЛОЖЕНИЕ III. ПОРЯДКОВЫЕ СТРУКТУРЫ

1. Пусть (E, \leq) — упорядоченное множество (см. прил. I.6). Элемент $a \in E$ называется *мажорантой* (*минорантой*) множества X , если $\forall x \in X (x \leq a)$ (соответственно $\forall x \in X (a \leq x)$). Элемент $a \in E$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью* X , если a — наименьший (соответственно наибольший) элемент множества всех мажорант (соответственно минорант) X ; пишут $a = \sup X$ (соответственно $a = \inf X$). Элемент $a \in X (\subset E)$ называется *максимальным* (*минимальным*) элементом X , если $\forall x \in X (a \leq x \Rightarrow a = x)$ (соответственно $\forall x \in X (x \leq a \Rightarrow a = x)$).

Упорядоченное множество называется *индуктивным*, если всякая совершенно упорядоченная его часть обладает мажорантой.

2. П р и м е р. Множество всех подмножеств множества E , упорядоченное по включению, индуктивно.

3. Совершенно упорядоченное множество E называется *вполне упорядоченным* (а порядок в E называется *полным*), если каждая непустая часть E обладает наименьшим элементом.

П р и м е р ы. 4. Множество \mathbb{N} вполне упорядочено.

5. Множество \mathbb{R} (с естественным порядком) не является вполне упорядоченным.

6. Пусть $(E_i)_{i \in I}$ — семейство множеств. Декартовым произведением множеств E_i называется множество $\prod_{i \in I} E_i$, элементами которого являются всевозможные, упорядоченные индексом i , наборы $(x_i)_{i \in I}$, где $x_i \in E_i$. В частности, если $E_i = E (i \in I)$, то $\prod_{i \in I} E_i$ обозначается символом E^I . Ясно, что если одно из множеств E_i пусто, то $\prod_{i \in I} E_i = \emptyset$. Кажется столь же ясным, что если все $E_i \neq \emptyset$, то $\prod_{i \in I} E_i \neq \emptyset$. Действительно, выбрав в каждом E_i по одному элементу x_i (это можно сделать, так как $E_i \neq \emptyset (i \in I)$), получим элемент $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$. Однако, ясность пропадает, если наложить на “выбор” разумное требование существования правила, руководствуясь которым каждый из нас выбирал бы одни и те же элементы $x_i \in E_i$. Существование такого правила утверждается в следующей аксиоме:

7. [Аксиома выбора]. Если $(A_i)_{i \in I}$ — семейство непустых частей множества E , то существует правило, по которому каждому множеству A_i сопоставляется некоторый элемент $x_i \in A_i$.

Это правило назовём *функцией выбора* для семейства $(A_i)_{i \in I}$.

8. У п р а ж н е н и е. Проверить справедливость аксиомы выбора для подмножеств $(A_i)_{i \in I}$ множества \mathbb{N} натуральных чисел (указать правило, фигурирующее в аксиоме выбора).

9. Т е о р е м а [Е. Цермело]. Всякое множество может быть вполне упорядочено.

¶ Пусть E — произвольное множество и f — функция выбора для семейства всех непустых подмножеств множества E . Непустое подмножество X множества E назовём f -множеством, если в X можно ввести структуру вполне упорядоченного множества, причём

$$\forall x \in X (x = f(E \setminus (-, x))), \text{ где } (-, x) \equiv \{y \in X : y < x\}.$$

f -множества существуют: например, таковым является одноэлементное множество $\{f(E)\}$.

Доказательство проведём в несколько этапов:

(i). Установим, что если X, Y — различные f -множества и $X \subset Y$, то $\exists b \in Y$ ($X = (-, b)$).

Действительно, пусть b — наименьший элемент множества $Y \setminus X$. Тогда $X \subset (-, b)$. Если допустить, что $X \neq (-, b)$, то определён наименьший элемент a множества $(-, b) \setminus X$; $a < b$, так как $a \in Y \setminus X$, что противоречит определению элемента b . Итак $X = (-, b)$, и (i) установлено.

(ii). Если X, Y — f -множества то $X \subset Y$ или $Y \subset X$.

Если, напротив, $X \not\subset Y$ и $Y \not\subset X$, то $Y \setminus X \neq \emptyset$, $X \setminus Y \neq \emptyset$ и существуют:

a — наименьший (в X) элемент множества $X \setminus Y$,

b — наименьший (в Y) элемент множества $Y \setminus X$.

Отметим, что $X \cap Y \neq \emptyset$ (например, $f(E) \in X \cap Y$), и справедливы равенства:

$X \cap Y = (-, a)$ (справа — промежуток в множестве X),

$X \cap Y = (-, b)$ (справа — промежуток в множестве Y).

{Действительно, если $z \in X \cap Y$, то по определению элементов a и b : $z < a$ (в X), $z < b$ (в Y). Обратно, если, например, $z \in X$, $z < a$, то $z \in Y$, так как иначе $z \in X \setminus Y$ и значит $z \geq a$ — противоречие. Итак, $X \cap Y = (-, a)$. Аналогично, $X \cap Y = (-, b)$.}

Теперь по определению f -множеств:

$$a = f(E \setminus (-, a)) = f(E \setminus (X \cap Y)) = f(E \setminus (-, b)) = b,$$

— противоречие.

(iii). Пусть (X_α) — семейство всех f -множеств и $Z = \bigcup X_\alpha$ — их объединение. В силу (ii) в Z корректно определена структура совершенно упорядоченного множества ($x \leq y$ в Z означает, что $x \leq y$ в подходящем f -множестве X_α).

(iv). Множество Z является f -множеством.

Действительно, во-первых, $\forall x \in Z \exists \alpha (x \in X_\alpha) \Rightarrow x = f(E \setminus (-, x))$, так как X_α f -множество, а в силу (iii) промежуток $(-, x)$ в X_α совпадает с промежутком $(-, x)$ в Z .

Во-вторых, Z является вполне упорядоченным множеством. Действительно, пусть X — непустое подмножество множества Z . Чтобы показать что X обладает наименьшим элементом, введём элементы a_α — наименьшие элементы множеств $X \cap X_\alpha$ (в случае, если $X \cap X_\alpha \neq \emptyset$). Достаточно показать, что наименьшим элементом обладает (совершенно упорядоченное) множество (a_α) . Зафиксируем элемент a_{α_0} . Если a_{α_0} — не наименьший элемент семейства (a_α) , то найдётся индекс α такой, что $a_\alpha < a_{\alpha_0}$, а значит $X_\alpha \setminus X_{\alpha_0} \neq \emptyset$. В силу (ii) $X_{\alpha_0} \subset X_\alpha$, а теперь в силу (i) $\exists b \in Z$ ($X_{\alpha_0} = (-, b)$). Поэтому $\{a_\alpha : a_\alpha < a_{\alpha_0}\} \subset X_{\alpha_0}$. Так как X_{α_0} вполне упорядочено, (a_α) обладает наименьшим элементом.

(v). По построению Z является наибольшим (относительно порядка, определяемого включением) f -множеством в E .

(vi). Установим в заключение, что $Z = E$. (Это завершает доказательство теоремы.)

Пусть, напротив, $E \setminus Z \neq \emptyset$ и $a = f(E \setminus Z) \in E \setminus Z$. Определим отношение порядка \leq_0 в множестве $Z \cup \{a\}$ следующим образом:

$x \leq_0 y$, если $x, y \in Z$ и $x \leq y$,

$\forall x \in Z (x \leq_0 a)$.

Тогда $Z \cup \{a\}$ вполне упорядочено. При этом $Z = (-, a)$ и

$$f(E \setminus (-, a)) = f(E \setminus Z) = a.$$

Итак, $Z \cup \{a\}$ — f -множество. Это, однако, противоречит тому, что Z — наибольшее f -множество. \square

10. С понятием полного порядка связано следующее обобщение известного принципа математической индукции.

[Принцип трансфинитной индукции]. Пусть (E, \leq) — вполне упорядоченное множество, и его подмножество A обладает свойствами:

- (а) наименьший элемент множества E принадлежит A ,
- (б) для произвольного $x \in E$ из принадлежности множеству A каждого элемента $y < x$ следует, что $x \in A$.

Тогда $A = E$.

¶ Пусть, напротив, $A^c \neq \emptyset$, и b — наименьший элемент A^c . Тогда $\forall y < b (y \in A)$ и из (б) следует, что $b \in A$, — противоречие. \square

Заметим, что если в множестве уже задан некоторый порядок, то существующий по теореме Цермело полный порядок с исходным, вообще говоря, никак не связан. Поэтому в приложениях чаще используют не теорему Цермело, а следующее ее важное следствие.

11. Т е о р е м а [М. Цорн]. Всякое индуктивное множество обладает максимальным элементом.

¶ Пусть (E, \leq) индуктивно и \leq^* — полный порядок в E , существующий по теореме Цермело, a — наименьший (относительно \leq^*) элемент в E . Построим индуктивно множество D .

- (i) элемент a отнесём в множество D ,
- (ii) если $x \in E$ и все элементы $y <^* x$ уже расклассифицированы (то есть отнесены в D или в D^c), то по определению $x \in D$, если x сравним (относительно \leq) со всеми элементами множества $\{z \in D : z <^* x\}$, и $x \notin D$ — в противном случае.

Из принципа трансфинитной индукции следует, что указанными условиями множество D корректно задано, то есть каждый элемент $x \in E$ либо отнесён в D , либо отнесён в D^c . По построению множество D совершенно упорядочено (относительно \leq), причём

$$\forall y \in D^c \exists z \in D (y \text{ не сравним с } z \text{ относительно } \leq). \quad (1)$$

{В самом деле, если (1) не выполнено, то

$$X \equiv \{y \in D^c : \forall z \in D (y \text{ сравним с } z \text{ относительно } \leq)\} \neq \emptyset.$$

Пусть y_0 — наименьший (относительно \leq^*) элемент множества X . Тогда согласно конструкции D (см. (2)) $y_0 \in D$ — противоречие.}

Так как E индуктивно, множество D обладает мажорантой b . Это искомый максимальный элемент E . (Если, напротив, существует $c > b$, то $\forall z \in D (z < c)$, так что, в частности, c сравним (относительно \leq) со всеми элементами множества D . Поэтому (см. (1)) $c \in D$ и, следовательно, $c \leq b$ — противоречие.) \square

Теорема Цорна была получена как следствие аксиомы выбора. На самом деле эти два утверждения эквивалентны:

12. *Утверждение теоремы Цорна эквивалентно аксиоме выбора.*

¶ Покажем, что из утверждения теоремы Цорна следует аксиома выбора. Пусть E — произвольное множество и \mathfrak{A} — произвольное семейство его непустых подмножеств. Требуется доказать, что $\exists f : \mathfrak{A} \rightarrow E \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{A} (f(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{a})$. Мы докажем утверждение для случая $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E) \equiv \mathfrak{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Тогда искомая функция получится как ограничение построенной функции выбора на \mathfrak{A} .

Пусть \mathfrak{Z} — семейство всех непустых подмножеств множества E , обладающих нужным нам свойством:

$$\forall X \in \mathfrak{Z} \exists f_X : \mathfrak{A}(X) \rightarrow X \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(X) (f_X(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{a}). \quad (2)$$

Семейство $\mathfrak{Z} \neq \emptyset$ (оно содержит одноэлементные подмножества множества E). Пусть Φ — семейство всех функций выбора, удовлетворяющих (2). Будем считать, что $f_X \leq g_Y$ ($f_X, g_Y \in \Phi$), если $X \subset Y$ и $\forall Z \subset X (f_X(Z) = g_Y(Z))$. Тогда \leq — отношение порядка в Φ (!). Убедимся, что Φ индуктивно. Пусть $(f_{X_i})_{i \in I}$ — совершенно упорядоченное подмножество Φ . Тогда функция f_X , определённая для множества $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ равенством

$$f_X(\mathfrak{a}) = f_{X_i}(\mathfrak{a}), \text{ если } \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}(X_i),$$

является мажорантой Φ . Теперь в силу утверждения теоремы Цорна Φ обладает максимальным элементом f_A . Осталось лишь установить, что $A = E$. Пусть, напротив, $\exists x \in E \setminus A$. Рассмотрим множество $X \equiv A \cup \{x\}$ и определим функцию $f : \mathfrak{A}(X) \rightarrow X$ равенством:

$$f(Y) = \begin{cases} f_A(Y), & \text{если } x \notin Y, \\ \{x\}, & \text{если } x \in Y. \end{cases}$$

f — функция выбора для семейства $\mathfrak{A}(X)$, причём $f|_{\mathfrak{A}(A)} = f_A$. Итак, $f_A < f$, что противоречит максимальнойности f_A . \square

13. Часто встречаются ситуации, когда приходится сравнивать множества по количеству элементов в них содержащихся. Для двух множеств E и F будем писать $\text{Card } E \geq \text{Card } F$ (соответственно $\text{Card } E > \text{Card } F$), если существует инъекция $f : F \rightarrow E$ (соответственно существует инъекция $f : F \rightarrow E$, но не существует инъекции из E в F). Следующее утверждение гласит, что для двух множеств имеет место одно из трёх: либо $\text{Card } E > \text{Card } F$, либо $\text{Card } F > \text{Card } E$, либо E и F равномощны (в этом случае пишем $\text{Card } E = \text{Card } F$):

14. У п р а ж н е н и е. Пусть E и F — два множества, причём существуют инъекции $f : E \rightarrow F$ и $g : F \rightarrow E$. Тогда E и F равномощны. {Указание: рассмотреть

множество $A \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_0 = E \setminus g(F)$, $A_n \equiv g \circ f(A_{n-1})$ ($n \in \mathbb{N}$). Убедиться, что отображение

$$h(x) \equiv \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A, \\ g^{-1}(x), & \text{если } x \in E \setminus A \end{cases}$$

является биекцией E на F .}

15. По определению $\text{Card } E = n$ ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) означает, что E — конечное множество, состоящее из n элементов; $\text{Card } E = \aleph_0$ (соответственно $\text{Card } E \leq \aleph_0$) означает, что E счётно (соответственно не более чем счётно); $\text{Card } E > \aleph_0$ означает, что E несчётно.

16. У п р а ж н е н и е. Пусть $\text{Card } E > \aleph_0$, $\text{Card } F \leq \aleph_0$ и $F \subset E$. Тогда $\text{Card}(E \setminus F) = \text{Card } E$.

17. Пусть $\text{Card } I, \text{Card } J \geq \aleph_0$, $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ и $\text{Card } J_i \leq \aleph_0$ при каждом $i \in I$. Тогда $\text{Card } J \leq \text{Card } I$.

¶ Пусть \leq — полный порядок в I . Воспользуемся трансфинитной индукцией. Пусть $i_0 = \inf I$. Построим инъекцию $\psi_0 : J_{i_0} \rightarrow I$ так, чтобы $I \setminus \psi_0(J_{i_0})$ было равномощно I . Пусть для $\alpha \in I$ уже построена инъекция $\psi_\alpha : \bigcup_{i < \alpha} J_i \rightarrow I$, причём $I \setminus \psi_\alpha(\bigcup_{i < \alpha} J_i)$ равномощно I . Возможны два случая:

- 1) $J_\alpha \subset \bigcup_{i < \alpha} J_i$. Положим $\psi_\alpha \equiv \psi_\alpha^\sim$; тогда ψ_α — инъекция из $\bigcup_{i \leq \alpha} J_i$ в I (при этом $I \setminus \psi_\alpha(\bigcup_{i \leq \alpha} J_i)$ равномощно I),
- 2) $J_\alpha \not\subset \bigcup_{i < \alpha} J_i$. Так как J_α счётно, определим инъекцию

$$\varphi_\alpha : J_\alpha \setminus \bigcup_{i < \alpha} J_i \rightarrow I \setminus \psi_\alpha^\sim(\bigcup_{i < \alpha} J_i).$$

Затем определим инъекцию $\psi_\alpha : \bigcup_{i \leq \alpha} J_i \rightarrow I$, полагая $\psi_\alpha|_{\bigcup_{i < \alpha} J_i} \equiv \psi_\alpha^\sim$, $\psi_\alpha|(J_\alpha \setminus \bigcup_{i < \alpha} J_i) \equiv \varphi_\alpha$. При этом $I \setminus \psi_\alpha(\bigcup_{i \leq \alpha} J_i)$ равномощно I . Теперь отображение $\psi : \bigcup_{i \in I} J_i \rightarrow I$, определённое равенством $\psi(j) \equiv \psi_\alpha(j)$, где $\alpha = \min\{i \in I : j \in J_i\}$, является искомой инъекцией из J в I .

ПРИЛОЖЕНИЕ IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ТЕОРЕМА СТОКСА

Приложение содержит краткое введение в теорию дифференциальных форм, оно завершается выводом общей формулы Стокса для цепей. Его можно рассматривать как эскиз современного изложения раздела “Элементы интегрирования по многообразиям”.

k -линейные формы

1. Отображение $f : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (где $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{nk}$) называется k -линейной формой на \mathbb{R}^n , если при произвольных $a_s \in \mathbb{R}^n$ ($s = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k$) отображение

$$x \rightarrow f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_k)$$

линейно при любом j ($1 \leq j \leq k$).

2. З а м е ч а н и е. Из общего вида линейной формы в \mathbb{R}^n (см. 72.1–2) следует, что каждая k -линейная форма представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} c_{i_1 \dots i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}, \quad (1)$$

где x_β^α — α -я координата вектора x_β в его разложении по стандартному базису e_1, \dots, e_n , а $c_{i_1 \dots i_k}$ — константы, однозначно определяемые формой f ($1 \leq i_s \leq n$, $1 \leq s \leq k$).

¶ Действительно, подставляя выражения $x_\beta = \sum x_\beta^\alpha e_\alpha$ ($\beta = 1, \dots, k$) в левую часть (1) и пользуясь линейностью f по каждому аргументу, получим правую часть (1), где $c_{i_1 \dots i_k} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. □

3. В множестве всех k -линейных форм на \mathbb{R}^n естественно вводится структура векторного пространства. Оно обозначается $T^k(\mathbb{R}^n)$ или T^k ; k -линейные формы, как элементы пространства T^k , называются также ковариантными k -тензорами. В частности, линейные формы, как элементы пространства $T^1 = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ называются *ковекторами*.

Внешние формы

4. k -линейная форма f на \mathbb{R}^n называется *внешней*, если

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_k),$$

где $\varepsilon(\sigma) (= \pm 1)$ — сигнатура перестановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(k) \end{pmatrix}$. Всякая линейная форма на \mathbb{R}^n — 1-линейная внешняя форма.

5. З а м е ч а н и е. Если f — внешняя форма и $x_i = x_j$ для некоторых индексов i и j ($i \neq j$), то $f(x_1, \dots, x_k) = 0$.

6. Пусть u^1, \dots, u^k — линейные формы на \mathbb{R}^n . *Внешним произведением* этих форм (в указанном порядке) называется внешняя k -линейная форма на \mathbb{R}^n , определяемая равенством

$$u^1 \wedge \dots \wedge u^k(x_1, \dots, x_k) = \det[u^i(x_j)].$$

7. Пусть y_1, \dots, y_n — базис в \mathbb{R}^n . Базис f^1, \dots, f^n в $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ назовём дуальным к базису y_1, \dots, y_n , если $f^i(y_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = \overline{1, n}$). В частности, для стандартного базиса e_1, \dots, e_n дуальный базис образует система dx^1, \dots, dx^n дифференциалов независимых переменных x^i .

8. Всякая внешняя k -линейная форма на \mathbb{R}^n представима в виде

$$f = \sum_{i_1 < \dots < i_k}^* c_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \equiv \sum_{i_1 < \dots < i_k} c_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

¶ Представим f в виде (1). В этом представлении $x_s^j = dx^j(x_s)$. Так как f внешняя, имеем

$$c_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} = \varepsilon(\sigma) c_{i_1 \dots i_k}. \quad (2)$$

(Обратно, из (2) следует, что f внешняя.) Группируя члены, отличающиеся перестановкой индексов, имеем

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k) &= \sum_{i_1 \dots i_k}^* c_{i_1 \dots i_k} \left(\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}^{i_1} \dots x_{\sigma(k)}^{i_k} \right) = \sum_{i_1 \dots i_k}^* c_{i_1 \dots i_k} \det[dx^{i_m}(x_j)] \\ &= \left(\sum_{i_1 \dots i_k}^* c_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right)(x_1, \dots, x_k). \quad \square \end{aligned}$$

Отметим специальные случаи внешних форм.

9. Если $k > n$, то всякая k -линейная внешняя форма на \mathbb{R}^n нулевая.

¶ В представлении п. 8 в этом случае среди каждого набора индексов i_1, \dots, i_k обязательно найдётся пара одинаковых. В силу п. 5 получаем требуемое. \square

10. Всякая n -линейная внешняя форма на \mathbb{R}^n имеет вид $f = \lambda dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Умножение внешних форм

11. В множестве $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ всех k -линейных внешних форм на \mathbb{R}^n естественно вводится структура вещественного векторного пространства. Определим ещё одну операцию над внешними формами, называемую внешним умножением. Пусть $f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $g \in \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ и

$$f = \sum_{i_1 \dots i_k}^* c_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad g = \sum_{j_1 \dots j_s}^* d_{j_1 \dots j_s} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$$

— их канонические представления. Внешним произведением форм f и g называется форма $f \wedge g \in \Lambda^{k+s}(\mathbb{R}^n)$, определяемая равенством

$$f \wedge g \equiv \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_s}} c_{i_1 \dots i_k} d_{j_1 \dots j_s} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}.$$

Отметим свойства операции умножения форм.

12. $(\lambda f) \wedge g = f \wedge (\lambda g) = \lambda(f \wedge g)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$13. (f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h,$$

$$14. f \wedge g = (-1)^{ks} g \wedge f,$$

$$15. (f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h).$$

¶ Пп. 12,13,15 очевидны, п. 14 достаточно проверить для “базисных” форм $f = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, $g = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$ ($i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_s$). Утверждение следует из замечания, что сигнатура перестановки $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_s \\ j_1 & \dots & j_s & i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ равна $(-1)^{ks}$. □

Замена переменных во внешних формах

16. Пусть $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение и f — внешняя k -линейная форма на \mathbb{R}^n . Тогда равенство

$$\psi * f(x_1, \dots, x_k) \equiv f(\psi(x_1), \dots, \psi(x_k)), \quad x_j \in \mathbb{R}^m \quad (1 \leq j \leq k),$$

определяет форму $\psi * f \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$.

¶ Для любой перестановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(k) \end{pmatrix}$ имеем

$$\begin{aligned} \psi * f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) &= f(\psi(x_{\sigma(1)}), \dots, \psi(x_{\sigma(k)})) = \varepsilon(\sigma) f(\psi(x_1), \dots, \psi(x_k)) \\ &= \varepsilon(\sigma) \psi * f(x_1, \dots, x_k). \quad \square \end{aligned}$$

17. У п р а ж н е н и е. Доказать равенство $\psi * (f \wedge g) = (\psi * f) \wedge (\psi * g)$. (Покажите сначала, что $\psi * (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = (\psi * dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge (\psi * dx^{i_k})$.)

Дифференциальные формы

18. Касательным пространством к евклидову пространству \mathbb{R}^n в точке $x \in \mathbb{R}^n$ назовём пространство \mathbb{R}^n , все точки которого “отмечены” индексом x . Будем обозначать касательное пространство символом \mathbb{R}_x^n : каждому вектору $u \in \mathbb{R}^n$ сопоставляется вектор $u_x \in \mathbb{R}_x^n$ — тот же вектор u , отмеченный точкой x . Говорят, что u_x — вектор u , приложенный к точке x . По определению \mathbb{R}_x^n наследует евклидову структуру из \mathbb{R}^n , то есть в \mathbb{R}_x^n определено скалярное произведение $\langle u_x, v_x \rangle \equiv \langle u, v \rangle$ ($u, v \in \mathbb{R}^n$).

19. Пусть U — открытое множество в \mathbb{R}^n . Говорят, что на множестве U задана дифференциальная форма ω степени k (или, короче, k -форма), если определено отображение $x \in U \rightarrow \omega(x) \in \Lambda^k(\mathbb{R}_x^n)$, то есть каждой точке $x \in U$ сопоставлена некоторая k -линейная внешняя форма на касательном пространстве \mathbb{R}_x^n ; θ -формой, по определению, называется всякая функция $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$.

В силу п. 8 всякая k -форма на $U \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\omega(x) = \sum^* c_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad x \in U,$$

где dx^1, \dots, dx^n — базис в пространстве $L(\mathbb{R}_x^n, \mathbb{R})$, дуальный к стандартному базису e_1, \dots, e_n в \mathbb{R}_x^n . Коэффициенты $c_{i_1 \dots i_k}(x)$ — числовые функции точки x . Если эти функции принадлежат классу $C^p(U)$ ($p = 0, 1, \dots, \infty$), то есть p раз непрерывно

дифференцируемы (класс $C^0(U)$ состоит из непрерывных числовых функций, заданных на U), то k -форма ω называется k -формой класса C^p . В частности, 0-форма класса C^p — это функция $\omega \in C^p(U)$.

Примеры. 20. Всякая 1-форма на $U(\subset \mathbb{R}^n)$ имеет вид $\omega(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x)dx^i$ ($x \in U$). Значение её на векторе $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$: $\omega(x)(\xi) = \sum_{i=1}^n c_i(x)dx^i(\xi) = \sum_{i=1}^n c_i(x)\xi^i$.

21. Пусть $U(\subset \mathbb{R}^n)$ открыто и $\varphi \in C^1(U)$. Производное отображение φ' определяет 1-форму на U : $x \in U \rightarrow \varphi' : \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}$. Эта 1-форма называется дифференциалом отображения φ и обозначается $d\varphi$. Итак, в канонической записи $d\varphi \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i$, причём $d\varphi(x)(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x)\xi^i$, $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}_x^n$.

Умножение дифференциальных форм

22. Будем обозначать $\Omega^k(U)$ через множество всех k -форм на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Соответственно через $\Omega^{k,p}(U)$ обозначим множество всех k -форм из $\Omega^k(U)$ класса C^p . Введённые множества естественно наделяются структурами векторного пространства. На дифференциальные формы естественно переносится также операция внешнего умножения. Пусть $\omega \in \Omega^k(U)$, $\mu \in \Omega^s(U)$. Тогда равенство $(\omega \wedge \mu)(x) \equiv \omega(x) \wedge \mu(x)$ ($x \in U$) определяет форму $\omega \wedge \mu \in \Omega^{k+s}(U)$. В частности, если $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция (то есть 0-форма), то $\varphi \wedge \omega$ будем обозначать также через $\varphi \cdot \omega$. Из пп. 14, 15 следует, что операция умножения дифференциальных форм обладает свойствами:

23. $\omega \in \Omega^k(U)$, $\mu \in \Omega^s(U) \Rightarrow \omega \wedge \mu = (-1)^{ks} \mu \wedge \omega$.

24. $(\omega \wedge \mu) \wedge \xi = \omega \wedge (\mu \wedge \xi)$.

25. **Пример.** Рассмотрим 1-формы $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$: $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)dx^i$, $\beta(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x)dx^i$ ($x \in U$). Тогда

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \sum_{i,j} a_i(x)b_j(x)dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} [a_i(x)b_j(x) - a_j(x)b_i(x)]dx^i \wedge dx^j.$$

Взяв $\xi_k = (\xi_k^1, \dots, \xi_k^n) \in \mathbb{R}_x^n$ ($k = 1, 2$), имеем

$$(\alpha \wedge \beta)(x)(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i < j} [a_i(x)b_j(x) - a_j(x)b_i(x)]\xi_1^i \xi_2^j = \sum_{i < j} \begin{vmatrix} a_i(x)\xi_1^i & b_i(x)\xi_1^i \\ a_j(x)\xi_2^j & b_j(x)\xi_2^j \end{vmatrix}.$$

Внешнее дифференцирование

26. Переходим к основной операции над дифференциальными формами — операции внешнего дифференцирования. Пусть U — открытое множество в \mathbb{R}^n . *Внешним дифференцированием* называется линейное отображение $d : \Omega^{k,p}(U) \rightarrow \Omega^{k+1,p-1}(U)$ ($k \geq 0, p \geq 1$), однозначно определяемое условиями:

- (i) если $\varphi \in \Omega^{0,p}(U)$, $p \geq 1$ (т. е. $\varphi \in C^p(U)$), то $d\varphi$ — дифференциал формы φ (см. п. 21),
- (ii) для одночленной формы $\omega(x) = c(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ($\omega \in \Omega^{k,p}(U)$):

$$d\omega(x) \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial c}{\partial x^j}(x) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (x \in U).$$

Отметим основные свойства введённой операции.

27. Если $\omega \in \Omega^{k,1}(U)$, $\mu \in \Omega^{s,1}(U)$, то $d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^k \omega \wedge d\mu$.

28. Если $\omega \in \Omega^{k,2}(U)$ ($k \geq 0$), то $d^2\omega \equiv d(d\omega) = 0$.

¶ П. 28 достаточно установить для формы вида $\omega(x) = c(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Имеем

$$\begin{aligned} (d^2\omega)(x) &= d\left\{\sum_{j=1}^n \frac{\partial c}{\partial x^j}(x) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right\}(x) \\ &= \sum_{j,s=1}^n \frac{\partial^2 c(x)}{\partial x^s \partial x^j} dx^s \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{s < j} \left[\frac{\partial^2 c(x)}{\partial x^s \partial x^j} - \frac{\partial^2 c(x)}{\partial x^j \partial x^s} \right] dx^s \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0. \end{aligned}$$

Свойство п. 27 также достаточно доказать для форм вида $\omega(x) = b(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, $\mu(x) = c(x)dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$. Имеем

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \mu)(x) &= \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial x^m} (b(x)c(x)) dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \\ &= \sum_{m=1}^n b(x) \frac{\partial c}{\partial x^m}(x) dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \\ &\quad + \sum_{m=1}^n c(x) \frac{\partial b}{\partial x^m}(x) dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \\ &= (-1)^k b(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial c}{\partial x^m}(x) dx^m \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{m=1}^n \frac{\partial b}{\partial x^m}(x) dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \wedge (c(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) \\ &= (-1)^k \omega \wedge d\mu + d\omega \wedge \mu. \quad \square \end{aligned}$$

29. П р и м е р. Пусть U — открытое множество в \mathbb{R}^3 и ω — 1-форма класса C^1 на U : $\omega(x) = p(x)dx^1 + q(x)dx^2 + r(x)dx^3$, $x = (x^1, x^2, x^3) \in U$. Вычислим $d\omega$. Имеем

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial p}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial p}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial p}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial q}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial q}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial q}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial r}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial r}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial r}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^3 \\ &= \left(\frac{\partial q}{\partial x^1} - \frac{\partial p}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x^1} - \frac{\partial p}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial r}{\partial x^2} - \frac{\partial q}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

30. У п р а ж н е н и е. Пусть $\omega = p dx^1 \wedge dx^2 + q dx^1 \wedge dx^3 + r dx^2 \wedge dx^3$ — 2-форма класса C^1 на $U \subset \mathbb{R}^3$. Показать, что $d\omega = \left(\frac{\partial p}{\partial x^3} + \frac{\partial q}{\partial x^2} + \frac{\partial r}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

Замена переменных в дифференциальных формах

31. Пусть U открыто в \mathbb{R}^n , V открыто в \mathbb{R}^m , отображение $\varphi : U \rightarrow V$ непрерывно дифференцируемо. Тогда в каждой точке $x \in U$ определено касательное отображение $\varphi'(x) : \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}_{\varphi(x)}^m$. Поэтому каждой форме $\omega \in \Omega^k(V)$ можно сопоставить форму $\varphi^* \omega \in \Omega^k(U)$:

$$\varphi^* \omega(x) \equiv \begin{cases} \omega(\varphi(x)), & \text{если } k = 0, \\ \varphi'(x) * \omega(\varphi(x)), & \text{если } k \geq 1 \end{cases} \quad (x \in U).$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \omega \in \Omega^{0,p}(V), \varphi \in C^p &\Rightarrow \varphi^* \omega \in \Omega^{0,p}(U), \\ \omega \in \Omega^{k,p}(V), \varphi \in C^{p+1} &\Rightarrow \varphi^* \omega \in \Omega^{k,p}(U), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Перечислим основные свойства введённой операции (предполагается, что выполняются подходящие ограничения на участвующие в этих свойствах отображения).

32. $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^* \omega_1 + \varphi^* \omega_2,$

33. $\varphi^*(c \cdot \omega)(x) = c(\varphi(x)) \cdot \varphi^* \omega(x),$

34. $\varphi^*(\omega \wedge \mu) = \varphi^* \omega \wedge \varphi^* \mu,$

35. $\varphi^* dy^i = \sum_j \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(x) dx^j = d\varphi^i(x)$, где φ^i — i -я координатная функция отображения φ , а dy^1, \dots, dy^m — базис в $L(\mathbb{R}_{\varphi(x)}^m, \mathbb{R})$, дуальный к стандартному базису в $\mathbb{R}_{\varphi(x)}^m$.

36. $\varphi^* d\omega = d(\varphi^* \omega).$

¶ П. 32 очевиден, п. 33 — следствие п. 34, п. 34 — следствие п. 17. Установим п. 35. Для $\xi \in \mathbb{R}_x^n$ имеем $\varphi^* dy^i(\xi) = dy^i(\varphi(x))(\varphi'(x)\xi) = (\varphi'(x))^i = \sum_j \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \xi^j = d\varphi^i(x)(\xi)$.

Докажем п. 36. Пусть сначала ω — 0-форма. Тогда $\varphi^* \omega = \omega \circ \varphi$ и

$$\begin{aligned} d(\varphi^* \omega)(x) &= d(\omega \circ \varphi)(x) = d\omega(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \\ &= \varphi'(x) * d\omega(\varphi(x)) = d(\omega \circ \varphi)(x) = \varphi^* d\omega(x). \end{aligned}$$

Для доказательства общего случая достаточно рассмотреть форму вида $\omega(y) = c(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$. Для неё (с учётом п. 33–35)

$$\varphi^* \omega = c(\varphi(x)) \varphi^*(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k})(x) = c(\varphi(x)) d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}(x).$$

Поэтому (с учётом п. 28 и разобранного случая 0-формы)

$$\begin{aligned} d(\varphi^* \omega)(x) &= d(\varphi^* c)(x) \wedge (d\varphi^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}(x)) + \varphi^* c(x) \wedge d(d\varphi^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}(x)) \\ &= (\varphi^* dc)(x) \wedge d\varphi^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}(x) = (\varphi^* dc)(x) \wedge (\varphi^* dy^{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi^* dy^{i_k}(x)) \\ &= \varphi^* d(c dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k})(x) = (\varphi^* d\omega)(x). \quad \square \end{aligned}$$

37. У п р а ж н е н и е. Если $m = n$, то

$$\varphi^*(c \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = c \circ \varphi \cdot \det \varphi' \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

38. П р и м е р. Пусть U открыто в \mathbb{R}^2 , где заданы полярные координаты (ρ, θ) , причём $U \cap \{(\rho, \theta) : \theta = 0\} = \emptyset$, V — открытое множество в другом экземпляре \mathbb{R}^2 , где заданы прямоугольные координаты (y^1, y^2) , и отображение φ задано формулами

$$y^1 = \varphi^1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad y^2 = \varphi^2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Пусть $\omega = dy^1 \wedge dy^2$. Тогда

$$\varphi^* \omega = d\varphi^1 \wedge d\varphi^2 = (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) = \rho d\rho \wedge d\theta.$$

Теорема Пуанкаре

39. Форма $\omega \in \Omega^{k,1}(U)$ называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Дифференциальная форма ω называется *точной*, если существует форма η такая, что $\omega = d\eta$. В силу п. 28 каждая точная форма $\omega \in \Omega^{k,1}(U)$ является замкнутой. Возникает вопрос, не следует ли из замкнутости формы её точность? Ответ положителен лишь при некоторых ограничениях на область U .

40. Назовём область $U \in \mathbb{R}^n$ *звёздной*, если $\exists a \in U \forall x \in U ([a, x] \subset U)$, где $[a, x] = \{ta + (1-t)x : t \in [0, 1]\}$ — отрезок в \mathbb{R}^n . Очевидно, каждое звёздное множество линейно связно, а каждое выпуклое множество звёздно.

41. Т е о р е м а. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое звёздное множество. Тогда всякая замкнутая форма $\omega \in \Omega^k(U)$ точна.

¶ Без ограничения общности считаем, что в определении п. 40 $a = \theta$. Определим линейное отображение $J : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$, задав его на одночленных формах равенством

$$J\{c(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\} \equiv \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} c(tx) dt \right) x^{i_\alpha} \cdot \omega_\alpha, \quad (3)$$

где обозначено $\omega_\alpha = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{\alpha-1}} \wedge dx^{i_{\alpha+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. При этом $J(0) = 0$. Утверждение теоремы следует из тождества

$$\omega = J(d\omega) + d(J\omega), \quad (4)$$

которое проверяется непосредственными вычислениями. В силу линейности отображения J достаточно доказать (4) для одночленной формы $\omega(x) = c(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Имеем (см. (3))

$$d(J\omega)(x) = \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^k \frac{\partial c}{\partial x^j}(tx) dt \cdot x^{i_\alpha} + \int_0^1 t^{k-1} c(tx) dt \cdot \frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial x^j} \right] dx^j \wedge \omega_\alpha.$$

Обозначая $\sum_1 = \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial c}{\partial x^j}(tx) dt \cdot x^{i_\alpha} \right) dx^j \wedge \omega_\alpha$, получаем

$$\begin{aligned} d(J\omega)(x) &= \sum_1 + \int_0^1 t^{k-1} c(tx) dt \cdot \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} dx^{i_\alpha} \wedge \omega_\alpha \\ &= \sum_1 + k \int_0^1 t^{k-1} c(tx) dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} J(d\omega)(x) &= \sum_{j=1}^n J \left\{ \frac{\partial c}{\partial x^j}(x) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial c}{\partial x^j}(tx) dt \cdot x^j \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial c}{\partial x^j}(tx) dt \cdot x^{i_\alpha} \right) dx^j \wedge \omega_\alpha \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \int_0^1 t^k \frac{\partial c}{\partial x^j}(tx) dt \cdot x^j \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} - \sum_1. \end{aligned}$$

Складывая полученные равенства, имеем

$$J(d\omega)(x) + d(J\omega)(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^k c(tx)] dt dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = c(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \omega(x). \quad \square$$

Сингулярные кубы

42. Пусть $I^k = [0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$, U — открытое множество в \mathbb{R}^k такое, что $I^k \subset U$. Пусть $\varkappa : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq k$) — непрерывно дифференцируемое отображение. Ограничение этого отображения на I^k называется *k-мерным сингулярным кубом* в \mathbb{R}^n . Допуская некоторую вольность, будем обозначать это ограничение по-прежнему буквой \varkappa ($\varkappa : I^k \rightarrow \mathbb{R}^n$). Если отображение действует в открытую область $V \subset \mathbb{R}^n$, то говорят о *k-мерном сингулярном кубе* в области V . Нульмерным сингулярным кубом называется отображение $\varkappa : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$. В частности, сам стандартный куб I^k рассматривается как *k-мерный сингулярный куб*, являющийся ограничением на I^k тождественного отображения \mathbb{R}^k на себя.

43. Пусть $\varkappa, \varkappa_0 : I^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — два *k-мерных сингулярных куба*. Будем говорить, что \varkappa_0 получен из \varkappa изменением параметризации (пишем $\varkappa \sim \varkappa_0$), если существует

диффеоморфизм $p : I^k \rightarrow I^k$ (то есть p — биекция, непрерывно дифференцируемая вместе с p^{-1} , причём p' , $(p^{-1})'$ допускают непрерывные продолжения на границу I^k) такой, что

- (i) $\varkappa_0 = \varkappa \circ p$,
- (ii) $\det p' > 0$.

Будем писать $\varkappa \sim -\varkappa_0$, если существует диффеоморфизм $p : I^k \rightarrow I^k$ такой, что выполнено (i) и

- (iii) $\det p' < 0$.

В частности, 1-мерный сингулярный куб в \mathbb{R}^n есть гладкая кривая в \mathbb{R}^n в смысле 178.1, а 2-мерный сингулярный куб в \mathbb{R}^3 есть гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 в смысле 185.1.

44. У п р а ж н е н и е. Покажите, что \sim — отношение эквивалентности в множестве k -мерных сингулярных кубов.

Интеграл формы по сингулярному кубу

45. Пусть ω — 0-форма класса C^0 в области $U \subset \mathbb{R}^n$ (то есть $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция) и $\varkappa : \{0\} \rightarrow U$ — 0-мерный сингулярный куб. Положим $\int_{\varkappa} \omega \equiv \omega(\varkappa(0))$.

46. Пусть $\omega \in \Omega^{k,0}(U)$ — одночленная k -форма, то есть $\omega(x) = c(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$, $x = (x^1, \dots, x^k) \in U$, где $U \subset \mathbb{R}^k$ — открытая область, содержащая стандартный куб I^k . По определению

$$\int_{I^k} \omega \equiv \int_{I^k} c(x) dx = \int_0^1 \dots \int_0^1 c(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k$$

(справа стоит обычный кратный интеграл Римана).

47. (Общий случай). Пусть $\omega \in \Omega^k(V)$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq k$ и $\varkappa : I^k \rightarrow V$ — k -мерный сингулярный куб в области V . Согласно п. 31 с каждой k -формой $\omega \in \Omega^k(V)$ ассоциирована k -форма $\varkappa^* \omega \in \Omega^k(I^k)$, $I^k \subset U$. Интеграл от k -формы ω по сингулярному k -мерному кубу $\varkappa : I^k \rightarrow V$ определяется равенством

$$\int_{\varkappa} \omega \equiv \int_{I^k} \varkappa^* \omega. \quad (5)$$

48. Запишем явное выражение интеграла (5) от одночленной k -формы $\omega(x) = c(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$). Пусть $\varkappa : I^k \rightarrow V$, то есть $t = (t^1, \dots, t^k) \in I^k \rightarrow \varkappa(t) = (\varkappa^1(t), \dots, \varkappa^n(t)) \in V$. Тогда (см. пп. 33,34)

$$\begin{aligned} \varkappa^* \omega(t) &= c(\varkappa(t)) \varkappa^*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = c(\varkappa(t)) \varkappa^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varkappa^*(dx^{i_k}), \\ \varkappa^*(dx^{i_s}) &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varkappa^{i_s}}{\partial t^j} dt^j, \quad 1 \leq s \leq k. \end{aligned}$$

Отсюда (см. п. 37)

$$\begin{aligned} \varkappa^* \omega(t) &= c(\varkappa(t)) \det \begin{bmatrix} \varkappa^{i_1} & \dots & \varkappa^{i_k} \\ t^1 & \dots & t^k \end{bmatrix} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k, \\ \text{где } \begin{bmatrix} \varkappa^{i_1} & \dots & \varkappa^{i_k} \\ t^1 & \dots & t^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varkappa^{i_1}}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial \varkappa^{i_1}}{\partial t^k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varkappa^{i_k}}{\partial t^1} & \dots & \frac{\partial \varkappa^{i_k}}{\partial t^k} \end{bmatrix}, \text{ так что} \\ \int_{\varkappa} \omega &= \int_{I^k} c(\varkappa(t)) \det \begin{bmatrix} \varkappa^{i_1} & \dots & \varkappa^{i_k} \\ t^1 & \dots & t^k \end{bmatrix} dt^1 \dots dt^k. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим свойства интеграла.

49. Если $\varkappa \sim \varkappa_0$, то для любой k -формы ω : $\int_{\varkappa} \omega = \int_{\varkappa_0} \omega$.

50. Если $\varkappa \sim -\varkappa_0$, то $\int_{\varkappa} \omega = - \int_{\varkappa_0} \omega$.

¶ Пусть, например, $\varkappa \sim \varkappa_0$. Равенство п. 49 достаточно установить для одночленных форм. Пусть $p : I^k \rightarrow I^k$ — диффеоморфизм такой, что $\varkappa_0 = \varkappa \circ p$, $\det p' > 0$. В обозначениях п. 49 имеем (используем теорему о замене переменных в кратном интеграле)

$$\begin{aligned} \int_{\varkappa_0} \omega &= \int_{\varkappa \circ p} \omega = \int_{I^k} c(\varkappa(p(t))) \det(\varkappa \circ p)'(t) dt \\ &= \int_{I^k} c(\varkappa(p(t))) \cdot \det \varkappa'(p(t)) \cdot \det p'(t) dt \\ &= \int_{I^k} c(\varkappa(x)) \cdot \det \varkappa'(x) dx = \int_{\varkappa} \omega. \quad \square \end{aligned}$$

Пространство цепей

51. Рассмотрим вещественное векторное пространство S^k , алгебраическим базисом которого является множество всех k -мерных сингулярных кубов в \mathbb{R}^n . Таким образом, элементы S^k — это формальные суммы вида

$$s = \lambda_1 \varkappa_1 + \dots + \lambda_p \varkappa_p, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

где $\varkappa_1, \dots, \varkappa_p$ — k -мерные сингулярные кубы в \mathbb{R}^n . Положим по определению для любой k -формы ω

$$\int_s \omega = \sum_{i=1}^p \lambda_i \int_{\varkappa_i} \omega.$$

Пусть наряду с (7) задан ещё один элемент $t = \mu_1 \widetilde{\varkappa}_1 + \dots + \mu_q \widetilde{\varkappa}_q$ пространства S^k . Элементы s и t называются эквивалентными ($s \sim t$), если $\int_s \omega = \int_t \omega$ для любой k -формы ω ; \sim — отношение эквивалентности в S^k (!). Пусть \mathfrak{S}^k — фактор-пространство пространства S^k по указанному отношению эквивалентности. Элементы этого фактор-пространства называются k -мерными цепями в \mathbb{R}^n . Мы по-прежнему будем обозначать k -мерные цепи символом (7). В частности, k -мерная цепь θ называется нулевой, если $\int_\theta \omega = 0$ для любой k -мерной формы ω .

52. З а м е ч а н и е. Если θ — нулевая k -мерная цепь и $\varkappa_1, \dots, \varkappa_p$ — любые k -мерные сингулярные кубы, то $\theta = 0 \cdot \varkappa_1 + \dots + 0 \cdot \varkappa_p$.

53. У п р а ж н е н и е. Покажите, что пространство \mathfrak{S}^k бесконечномерно. {Указание: пусть $p \in \mathbb{N}$ произвольно и U_1, \dots, U_p — произвольные попарно непересекающиеся открытые множества в \mathbb{R}^n . Рассмотреть k -мерные сингулярные кубы $\varkappa_1, \dots, \varkappa_p$ такие, что $\varkappa_i(I^k) \subset U_i$ ($1 \leq i \leq p$); цепи $1 \cdot \varkappa_i$ ($1 \leq i \leq p$) ненулевые. Показать, что эти цепи линейно независимы.}

54. Рассмотрим пространство $\Omega^{k,0} = \Omega^{k,0}(\mathbb{R}^n)$. На произведении $\Omega^{k,0} \times \mathfrak{S}^k$ определим вещественную билинейную форму

$$\langle \omega, s \rangle \equiv \int_s \omega \quad (\omega \in \Omega^{k,0}, s \in \mathfrak{S}^k). \quad (8)$$

55. Билинейная форма (8) невырождена, то есть

(а) если $\langle \omega, s \rangle = 0$ для любой $\omega \in \Omega^{k,0}$, то $s = \theta$,

(б) если $\langle \omega, s \rangle = 0$ для любой $s \in \mathfrak{S}^k$, то $\omega = 0$.

¶ (а) следует из определения нулевой цепи (см. п. 51).

(б). Если $\omega = \sum^* c_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \neq 0$, то хотя бы один коэффициент этой формы $\neq 0$ в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть, например, $c_{1 \dots k}(0) > 0$. Возьмём k -мерный сингулярный куб \varkappa в \mathbb{R}^n , заданный равенством

$$\varkappa(t^1, \dots, t^k) = (\lambda t^1, \dots, \lambda t^k, 0, \dots, 0), \quad t = (t^1, \dots, t^k) \in I^k,$$

где у вектора в правой части равенства $n - k$ нулей. При достаточно малом $\lambda > 0$ $c_{1 \dots k}(\varkappa(t)) > 0$, $t \in I^k$. Следовательно, для цепи $s = 1 \cdot \varkappa$ имеем

$$\langle \omega, s \rangle = \int_s \omega = \int_{I^k}^* \varkappa^* \omega = \int_{I^k} c(\varkappa(t)) \det \begin{bmatrix} \lambda t^1 & \dots & \lambda t^k \\ t^1 & \dots & t^k \end{bmatrix} dt = \lambda^k \int_{I^k} c(\varkappa(t)) dt > 0,$$

что противоречит предположению. □

Граница цепи

56. Определим сначала границу сингулярного куба $\varkappa : I^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, то есть цепи вида $s = 1 \cdot \varkappa$. Пусть

$$\mathbb{R}_{i,0}^{k-1} \equiv \{t = (t^1, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^k : t^i = 0\}$$

— гиперплоскость в \mathbb{R}^k . Рассмотрим эту гиперплоскость как $(k-1)$ -мерное евклидово пространство с координатным представлением, индуцированным из \mathbb{R}^k . Так что числа $t^1, \dots, t^{i-1}, t^{i+1}, \dots, t^k$ суть координаты точки $(t^1, \dots, t^{i-1}, 0, t^{i+1}, \dots, t^k) \in \mathbb{R}_{i,0}^{k-1}$. Аналогично определим гиперплоскость $\mathbb{R}_{i,1}^{k-1} \equiv \{t \in \mathbb{R}^k : t^i = 1\}$. Пусть $I_{i,\alpha}^{k-1}$ — соответствующие стандартные гиперкубы в $\mathbb{R}_{i,\alpha}^{k-1}$ ($\alpha = 0, 1$); они являются противоположными гранями исходного гиперкуба $I^k \subset \mathbb{R}^k$. Тогда отображения $\varkappa_{i,\alpha} = \varkappa|_{I_{i,\alpha}^{k-1}}$ суть $(k-1)$ -мерные сингулярные кубы ($\alpha = 0, 1$; $i = 1, \dots, k$). *Границей сингулярного куба \varkappa* называется цепь $\partial \varkappa \equiv \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \varkappa_{i,\alpha}$. Цепи $(-1)^{i+\alpha} \varkappa_{i,\alpha}$ называются ориентированными $(k-1)$ -мерными гранями сингулярного гиперкуба \varkappa .

57. П р и м е р. При $k = 2$ рассмотрим стандартный куб I^2 как сингулярный 2-мерный куб (то есть единичный квадрат в \mathbb{R}^2), определённый тождественным отображением \mathbb{R}^2 на себя. Тогда (см. Рис. 28)

$$\partial I^2 = -I_{1,0}^1 + I_{1,1}^1 + I_{2,0}^1 - I_{2,1}^1.$$

58. В общем случае для произвольной k -мерной цепи $\varkappa = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varkappa_i$ определим её границу равенством $\partial \varkappa = \sum_{i=1}^p \lambda_i \partial \varkappa_i$. Итак, определено линейное отображение $\partial : \mathfrak{S}^k \rightarrow \mathfrak{S}^{k-1}$.

Теорема Стокса для цепи

Наряду с линейным отображением $\partial : \mathfrak{S}^k \rightarrow \mathfrak{S}^{k-1}$ рассмотрим оператор дифференцирования $d : \Omega^{k-1,1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega^{k,0}(\mathbb{R}^n)$. Имеет место следующая основная теорема многомерного анализа.

59. Т е о р е м а. Для любой цепи $s \in \mathfrak{S}^k$ ($k \geq 1$) и любой формы $\omega \in \Omega^{k-1,1}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_s d\omega = \int_{\partial s} \omega. \quad (9)$$

60. З а м е ч а н и е. Равенство (9), записанное через билинейную форму, введённую в п. 54, имеет вид

$$\langle d\omega, s \rangle = \langle \omega, \partial s \rangle. \quad (10)$$

(То есть операторы d и ∂ являются взаимно сопряжёнными.)

61. Доказательство теоремы. Достаточно ограничиться случаем, когда $s = 1 \cdot \varkappa$, где \varkappa — k -мерный сингулярный куб. Более того, можно считать, что куб \varkappa стандартен ($\varkappa = I^k$), так как общий случай тогда следует из выкладки

$$\int_{\partial \varkappa} \omega = \int_{\partial I^k} \varkappa^* \omega = \int_{I^k} d(\varkappa^* \omega) = \int_{I^k} \varkappa^* d\omega = \int_{\varkappa} d\omega.$$

Можно считать, что стандартный куб $\varkappa = I^k$ естественно вложен в \mathbb{R}^n , то есть $\varkappa(t^1, \dots, t^k) = (t^1, \dots, t^k, 0, \dots, 0)$, где у вектора в правой части $n - k$ нулей справа. Если ещё принять во внимание линейность интеграла (9) по ω , то достаточно

рассмотреть одночленную форму вида

$$\omega = c(x^1, \dots, x^k) \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}} dx^j.$$

Мы имеем

$$\int_{\partial \mathfrak{K}} \omega = \sum_{\ell=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{\ell+\alpha} \int_{\mathfrak{K}_{\ell,\alpha}} \omega = \sum_{\ell=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{\ell+\alpha} \int_{I^{k-1}} \mathfrak{K}_{\ell,\alpha}^* \omega.$$

Учитывая п. 49, получим

$$\int_{I^{k-1}} \mathfrak{K}_{\ell,\alpha}^* \omega = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell \neq i, \\ \int_{I^{k-1}} c(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^k) \prod_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ i \neq j}} dx^j, & \text{если } \ell = i, \end{cases}$$

так что

$$\int_{\partial \mathfrak{K}} \omega = \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_0^1 \dots \int_0^1 c(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^k) \prod_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ i \neq j}} dx^j.$$

С другой стороны,

$$\int_{\mathfrak{K}} d\omega = \sum_{\ell=1}^k \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial c}{\partial x^\ell}(x^1, \dots, x^k) dx^\ell \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ i \neq j}} dx^j \right).$$

В правой части этого равенства отличен от нуля единственный член (при $\ell = i$), так что

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{K}} d\omega &= \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial c}{\partial x^i} dx^i \wedge \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq k, \\ i \neq j}} dx^j \right) = (-1)^{i-1} \int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial c}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \\ &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial c}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k \quad (\text{см. 123.3}) \\ &= (-1)^{i+1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\frac{\partial c}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^k) dx^i \right) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^k \\ &= (-1)^{i+1} \int_0^1 \dots \int_0^1 [c(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^k) \\ &\quad - c(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^k)] \cdot dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^k \\ &= \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_0^1 \dots \int_0^1 c(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^{i-1} dx^{i+1} \dots dx^k. \end{aligned}$$

УКАЗАТЕЛЬ ИМЁН

- А́бель Н. (Abel N., 1802 – 1829) — норвежский математик 154 ⁴
Адама́р Ж. (Hadamard J., 1865 – 1963) — французский математик 174
Алекса́ндров П. (1896 – 1982) — русский математик 129
Архиме́д (Ἀρχιμήδης, ок. 287 – 212 до н. э.) — древнегреческий математик и механик 16
Ба́нах С. (Banach S., 1892 – 1945) — польский математик 280
Боре́ль Э. (Borel E., 1871 – 1956) — французский математик 248
Бу́няко́вский В. (1804 – 1889) — русский математик 57
Ба́р Р. (Baire R., 1874 – 1932) — французский математик 276
Ве́йерштрасс К. (Weierstraß K., 1815 – 1897) — немецкий математик 18
Во́льтерра В. (Volterra V., 1860 – 1940) — итальянский математик 278
Га́усс К. (Gauss C., 1777 – 1855) — немецкий математик 224
Ге́льдер Л. (Hölder L., 1859 – 1937) — немецкий математик 57
Ги́льберт Д. (Hilbert D., 1862 – 1943) — немецкий математик 186
Гра́м Й. (Gram J., 1850 – 1916) — датский математик 302
Гри́н Д. (Green G., 1793 – 1841) — английский математик 219
Даламбе́р Ж. (D'Alembert J., 1717 – 1783) — французский математик и философ 26
Дарбу́ Г. (Darboux J.G., 1842 – 1917) — французский математик 72
Ди́ра́к П. (Dirac P., 1902 – 1984) — английский физик 207
Дирихле́ П. (Dirichlet P., 1805 – 1859) — немецкий математик 66
Евкли́д (Ευκλείδης, 3 век до н. э.) — древнегреческий математик 61
Его́ров Д. (1869 – 1931) — русский математик 250
Жорда́н К. (Jordan K., 1838 – 1922) — французский математик 132
Ка́нтор Г. (Cantor G., 1845 – 1918) — немецкий математик 245
Ка́рлесон Л. (Carleson L., р. 1928) — шведский математик 193
Колмого́ров А. (1903 – 1987) — русский математик 17
Коши́ О. (Cauchy A., 1789 – 1857) — французский математик 23
Лагранже́ Ж. (Lagrange J., 1736 – 1813) — французский математик и механик 46
Лебе́г А. (Lebesgue H., 1875 – 1941) — французский математик 66
Ле́ви Б. (Levi B., 1875 – 1961) — итальянский математик 257
Ле́йбниц Г. (Leibniz G., 1646 – 1716) — немецкий математик 26
Ли́пшиц Р. (Lipschitz R., 1832 – 1903) — немецкий математик 192
Лиувилль Ж. (Liouville J., 1809 – 1882) — французский математик 323
Лобаче́вский Н. (1792 – 1856) — русский математик 12
Лопита́ль Г. (L'Hospital G., 1661 – 1704) — французский математик 48
Минко́вский Г. (Minkowski H., 1864 – 1909) — немецкий математик и физик 57
Нико́дим О. (Nikodym O., 1887 – 1974) — польский математик, работал в США 263
Нью́тон И. (Newton I., 1643 – 1727) — английский физик и математик 35
Острогра́дский М. (1801 – 1861) — русский математик 224
Парсева́ль М. (Parseval M., 1755 – 1836) — французский математик 187
Пеа́но Д. (Peano G., 1858 – 1932) — итальянский математик 50
Пифаго́р (Πυθαγόρας, ок. 570 – ок. 500 до н.э.) — древнегреческий мыслитель 184
Планше́рель М. (Plancherel M., 1885 – 1967) — швейцарский математик 309
Пуанка́ре Ж. (Poincaré J., 1854 – 1912) — французский математик и астроном 358
Радон (Radon J., 1877 – 1956) — австрийский математик 263
Ри́ман Б. (Riemann B., 1826 – 1866) — немецкий математик 37
Рисс Ф. (Riesz F., 1880 – 1956) — венгерский математик 304
Роль М. (Rolle M., 1652 – 1719) — французский математик 46

⁴Указана страница первого упоминания имени в тексте

Симпсон Т. (Simpson T., 1710 – 1761) — английский математик 75
 Соболев С. (1908 – 1989) — русский математик 202
 Стильтес Т. (Stieltjes T., 1856 – 1894) — нидерландский математик 241
 Стокс Д. (Stokes G., 1819 – 1923) — английский физик и математик 226
 Тейлор Б. (Taylor B., 1685 – 1731) — английский математик 49
 Тихонов А. (1906 – 1993) — русский математик 127
 Фатú (Fatou P., 1878 – 1929) — французский математик 257
 Фермá П. (Fermat P., 1601 – 1665) — французский математик 54
 Фредгольм Э. (Fredholm E., 1866 – 1927) — шведский математик 277
 Фрешé М. (Fréchet M., 1878 – 1973) — французский математик 332
 Фубини Г. (Fubini G., 1879 – 1943) — итальянский математик 268
 Фурье Ж. (Fourier J., 1768 – 1830) — французский математик 186
 Хан Г. (Hahn H., 1879 – 1934) — австрийский математик 261
 Хэвисайд О. (Heaviside O., 1850 – 1925) — английский физик и математик 210
 Цермело Э. (Zermelo E., 1871 – 1953) — немецкий математик 347
 Цорн М. (Zorn M., 1906 – 1993) — немецкий математик, работал в США 128
 Чебышев П. (произносится Чебышёв, 1821 – 1894) — русский математик и механик 194
 Шаудер Ю. (Schauder J., 1899 – 1943) — польский математик 326
 Шварц К. (Schwarz K., 1843 – 1921) — немецкий математик 57
 Шварц Л. (Schwartz L., 1915 – 2002) — французский математик 202
 Шмидт Э. (Schmidt E., 1876 – 1959) — немецкий математик 327
 Штейнгауз (Steinhaus H., 1887 – 1972) — польский математик 281
 Эйлер Л. (Euler L., 1707 – 1783) — швейцарский математик, механик и физик,
 работал в России 167
 Якоби К. (Jacobi K., 1804 – 1851) — немецкий математик 95

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- σ -аддитивность меры 231⁵
аксиома Архимеда 16
– выбора 347
– непрерывности 16
– счётности 1-ая 122
– – 2-ая 119
алгебра борелевская 233
– множеств 232
 σ -алгебра 232
альтернатива Фредгольма 329
- База топологии 119
базис окрестностей точки 114
– ортонормированный 301
биекция 11
билинейная форма 304
– – ограниченная 305
– – эрмитова 305
бэта-функция Эйлера 167
- Вектор собственный 322
вектор-функция 86
– гладкая 98
– непрерывная кусочно-гладкая 98
вложение 287
внешность множества 115
внутренность множества 115
- Гамма-функция Эйлера 168
гомеоморфизм 117
градиент 216
граница множества 116
– сингулярного куба 363
– цепи 363
грань верхняя 16, 347
– нижняя 16, 347
график линейного оператора 298
– функции 12
- Дзета-функция (ζ -функция Римана) 173
дивергенция 224
дифференциал отображения 93
дифференциал n -го порядка 45
– Фреше 332
– функции 42
дифференцирование внешнее 355
- длина плоской кривой 79
– пространственной кривой 79, 100
 δ -функция Дирака 207
- Замыкание множества 115
заряд 260
– абсолютно непрерывный 263
- Иерархия 121
изометрия 274, 287
изоморфизм изометрический 287
интеграл абсолютно сходящийся 154, 157
– в смысле главного значения (v.p.) 156
интеграл верхний (нижний) Дарбу 72, 140
– криволинейный 1-го рода 213
– – 2-го рода 215
– Лебега 253
– – неопределённый 260
– неопределённый 58
– несобственный 155
– по σ -конечной мере 271
– по сингулярному кубу 360
– поверхностный 1-го рода 222
– – 2-го рода 224
– расходящийся 150, 156
– Римана 64
– – кратный 139
– – вектор-функции 99, 335
– с особенностью 150, 156
– сходящийся 150, 156
– Фурье простой 198
- интервал 17
инъекция 11
- Касательная прямая 41
– плоскость 97
касательное отображение 42
колебание функции 141
кольцо (σ -кольцо) множеств 232
контур замкнутый 216
кормушка сети 122
коэффициенты Фурье 186
кривая гладкая 213
– замкнутая 213
– непрерывная кусочно-гладкая 213
критерий Дарбу 72, 140
– компактности в $C[a, b]$ 279

⁵Указывается страница, где вводится данное понятие

- критерий Коши сходимости
 - последовательности 23
 - — — числового ряда 25
- куб сингулярный 359
- Лемма о вложенных отрезках 22
 - осцилляционная 190
- ловушка сети 122
- Мажоранта множества 16, 347
- максимум локальный 53, 333
- матрица Якоби 95
- мера 231
 - абсолютно непрерывная 244
 - внешняя 234
 - Жордана 135
 - — внешняя 135
 - — внутренняя 135
 - σ -конечная 239, 240
 - конечно-аддитивная 230
 - Лебега 237
 - Лебега-Стилтьеса 241
 - полная 240, 241
 - прямоугольника 133
 - сингулярная 244
- метод Лагранжа 110
- метрика 112
 - дискретная 112
- минимум локальный 53
- миноранта множества 16, 347
- множество вполне ограниченное 278
 - упорядоченное 347
 - выпуклое 127
 - действительных чисел 16
 - замкнутое 18, 83, 115
 - индуктивное 347
 - измеримое по Жордану
 - (J -измеримое) 135
 - измеримое по Лебегу 235, 238
 - канторово 245
 - компактное 84
 - лебеговой меры нуль 65
 - линейно связное 89
 - локально J -измеримое 156
 - невырожденное 139
 - нигде не плотное 275
 - ограниченное 16
 - сверху (снизу) 16
 - открытое 18, 83, 112, 113
 - предкомпактное 278
 - резольвентное 322
 - счётное 11
 - совершенно упорядоченное 340
- множество упорядоченное 339
 - элементарное 132
- Направление 122
- непрерывность функции в точке 35
- неравенство Гёльдера 57
 - — интегральное 283
 - Коши-Буняковского 57, 184
 - Минковского 57
 - — интегральное 283
 - Парсеваля 187
 - Шварца 57, 185
- норма 83, 178
 - евклидова 83
 - операторная 92
- носитель функции 181
- Область 214
 - звёздная 358
- объём тела вращения 80
- окрестность 17, 114
- \sim -окрестность 18
- оператор Гильберта-Шмидта 328
 - дифференцирования 320
 - замкнутый 317
 - замыкаемый 317
 - компактный 310
 - конечномерный 310
 - линейный 316
 - обратимый 287, 317
 - ограниченный 286
 - плотно заданный 316
 - самосопряжённый 306, 318
 - сопряжённый 305, 318
 - умножения на независимую
 - переменную 316, 320
 - унитарный 308
 - Фурье-Планшереля 309
 - эрмитовый 319
- ориентация области 219
- ориентация пространства 219
- ортогональная сумма пространств 300
- ортогональное дополнение 299
- ортопроектор 307
- отношение (бинарное) 339
 - антисимметричное 339
 - порядка 339
 - симметричное 339
 - рефлексивное 339
 - транзитивное 339
 - эквивалентности 339
- отображение 11
 - дифференцируемое 93, 332

- касательное 42, 93
- отображение линейное 90
 - 2-линейное 297
 - непрерывное 117
 - непрерывно дифференцируемое 98
 - сжимающее 276
- отрезок 17
- Параметризация кривой 213
- п.в. (почти всюду) 65
- первообразная 58
- пересечение топологий 119
- плоскость касательная 97
- площадь в полярной системе координат 78
 - криволинейной трапеции 63, 78
 - поверхности 148
 - – вращения 80
- поверхность гладкая 221
 - – ориентированная 223
- подпоследовательность 20
- поле векторное 214
 - комплексных чисел 345
 - потенциальное 216
- полиномы Чебышева 194
- полукольцо 229
- пополнение метрического пространства 274
 - нормированного пространства 288
- последовательность 12
 - векторная 86
 - Коши 23
 - монотонная 22
 - ограниченная 21, 86
 - фундаментальная 23, 113
- потенциал 216
- поток вектора 223
- правило Лопиталя 48
- предел вектор-функции 87
- предел по направлению 88
 - последовательности 20
 - – верхний 24
 - – нижний 24
 - функции (отображения) 31, 86, 123
- преобразование Фурье 200
- преобразование Фурье обобщённых функций 211
- признак Абеля 154, 163, 171
 - Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла 163
 - – – – ряда 171
 - Даламбера 26
 - Дирихле 154, 163, 171
 - Коши сходимости ряда 26
- принцип равномерной ограниченности 296
 - – – для гильбертова пространства 304
- сжимающих отображений 276
- принцип сжимающих отображений обобщённый 277
 - трансфинитной индукции 349
- произведение внешних форм 353
 - мер 267
 - операторов 306
 - скалярное 82, 182
 - топологических пространств 120
- производная вектор-функции 95
 - обобщённой функции 209
 - функции в точке 42
 - – n переменных 95
 - частная 94
- прообраз кольца 246
 - топологии 120
- пространство банахово 178
 - векторное 82
 - гильбертово 112, 186
 - – сепарабельное 302
 - евклидово 83
 - касательное 354
 - компактное 125
 - линейно-связное 131
 - локально компактное 128
 - метрическое 112
 - нормированное 178
 - основных функций \mathcal{D} 204
 - – – \mathcal{S} 204
 - отделимое 123
 - полное 113
 - регулярное 124
 - рефлексивное 296
 - с 1-й аксиомой счётности 122
 - со 2-й аксиомой счётности 119
 - сепарабельное 116, 178
 - связное 130
 - сопряжённое 290
 - топологическое 113
 - унитарное 183
 - цепей 361
- процесс ортогонализации Грама 302
- прямоугольник (в \mathbb{R}^2) 132
- Равенство Парсеваля 187, 193
- равностепенно непрерывное семейство 279
- радиус сходимости 174
- размерность гильбертова пространства 302
- расширение оператора 316
- ротор 217
- ряд 25
 - абсолютно сходящийся 27
 - гармонический 26

- двойной 28
- ряд Лейбница 25
 - повторный 30
 - степенной 174
 - Тейлора 51
 - Фурье 187
 - тригонометрический 189
 - числовой 25
- Сеть 122
- ε -сеть 278
- система замкнутая 188
 - образующих топологии 119
 - ортонормированная 186
 - полная 187
- спектр оператора 322
 - – ограниченного 323
 - – самосопряжённого 324
 - – унитарного 324
- сумма верхняя (нижняя) Дарбу 72, 140
 - прямая банаховых пространств 285
- суперпозиция функций 11
- сюръекция 11
- сходимость по мере 250
 - почти всюду 249
 - обобщённых функций 208
 - равномерная несобственных
 - интегралов 162
 - – последовательности функций 169
 - равномерная ряда 170
 - ряда 25
- Теорема Абеля 1-ая 174
 - – 2-ая 177
 - Александрова 129
 - Банаха 297
 - Банаха-Штейнгауза 296
 - Бэра 276
 - Вейерштрасса 18, 85, 346
 - Гильберта-Шмидта 327
 - Егорова 250
 - Коши 46
 - Лебега 66, 141
 - – о предельном переходе под знаком
 - интеграла 256
 - Леви 257
 - о вложенных шарах 275
 - о замене переменных 148
 - о замкнутом графике 298
 - о плотности 181, 185
 - о среднем значении 68, 144
 - о существовании неявной функции 108
 - об ортогональном разложении 299
- Пуанкаре 358
- теорема Радона-Никодима 263
 - Рисса 304
 - Рисса-Шаудера 326
 - Ролля 46
 - Стокса для цепи 363
 - Тихонова 127
 - Фату 257
 - Фредгольма 325
 - Фубини 268
 - Хана 261
 - Хана-Банаха 294
 - Цермело 347
 - Цорна 349
- топология 113
 - дискретная 114
 - индуцированная 120
 - порождённая системой множеств 119
 - тривиальная 114
 - финальная 121
- тор одномерный 121
- точка внутренняя 115
 - граничная 116
 - изолированная 18, 84
 - несобственная (∞) 19, 84
 - перегиба 55
 - предельная 18, 84, 116
 - – сети 122
 - прикосновения 115
- точка разрыва 1-го (2-го) рода 36
- Уравнение Вольтерра 278
 - неоднородное 329
 - однородное 329
 - Фредгольма 1-го рода 328
 - Фредгольма 2-го рода 277, 329
- Факторизация 180
- фактор-множество 339
- фактор-пространство 121, 285
- фактор-топология 121
- форма внешняя 352
 - дифференциальная 354
 - замкнутая 358
 - k -линейная 352
 - точная 358
- формула Гаусса-Остроградского 224
 - Грина 220
 - Лагранжа 46
 - – оценочная 100, 334
 - замены переменной 58, 71
 - интегрирования по частям 58, 71
 - Коши-Адамара 174
 - Лейбница 45

- Ньютона-Лейбница 70, 151, 335
- формула Ньютона-Лейбница обобщённая 70
 - прямоугольников 74
 - Симпсона 75
 - Стокса 227
 - Тейлора с остатком в интегральной форме 77
 - – – – форме Лагранжа 49, 105
 - – – – форме Пеано 50, 105, 337
 - трапеций 75
- функционал линейный 90
 - – ограниченный 290
- функция 11
 - абсолютно непрерывная 244
 - аналитическая 52, 176
 - вогнутая в точке 55
 - выпуклая в точке 55
- функция гладкая 70
 - Дирихле 66, 252
 - дифференцируемая 41
 - измеримая 246
 - – по Борелю (В-измеримая) 248
 - интегрируемая по Лебегу 253
 - интегрируемая по множеству 254
 - интегрируемая по Риману 64, 139
 - логарифмическая 40, 81
 - непрерывная 36, 88
 - – кусочно-гладкая 70
 - обобщённая 207
 - обратная 14
- функция ограниченная 32
 - 2π -периодическая 188
 - показательная 39, 81
 - полиномиального роста 205
 - простая 247
 - равномерно непрерывная 38, 88
 - Римана 37
 - сильно-аналитическая 321
 - степенная 40
 - характеристическая 12
 - Хэвисайда 210
 - элементарная 40
- Цепь k -мерная 362
- Число e 22
- числовая прямая 17
 - – расширенная 18
- Экстремум локальный 53, 101, 106
 - – относительный 109
 - – функционала 333
- элемент максимальный 347
 - минимальный 347
 - наилучшего приближения 281, 299
- Ядро вырожденное 331
 - Гильберта-Шмидта 328
 - оператора 316
 - симметричное 330

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

A°, A^-, A^Γ	115, 116 ⁶	$\ker(A)$	306, 316
$B_\varepsilon(x)$	83, 112	$L(E, F)$	286
$B_\varepsilon[x]$	112	$L(\mathfrak{S}, m)$	235
$\mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$	233	$L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$)	282
$B(\Omega)$	179	ℓ^p ($1 \leq p \leq \infty$)	284
$\mathcal{B}(H)$	306	$\text{Lip } \alpha$	192
\tilde{C}	189	$\mu^* X$	234
$C(\Omega)$	179	$M(E, \mathfrak{A})$	246
$C_0(\Omega)$	180	$\nu \ll \mu$	244
$C_{00}(\Omega)$	181	$\mathcal{R}(A)$	306, 316
\mathcal{D}	204	$\mathcal{R}_1(\Omega), \mathcal{R}_2(\Omega)$	181, 184
$D^*(f), D_*(f)$	72	$\widetilde{\mathcal{R}}_1, \widetilde{\mathcal{R}}_2$	189
$D(T)$	316	\mathcal{R}_1^{loc}	200
$f \mid A$	11	$\rho(T)$	322
$f_n \implies f$	169	\mathcal{S}	204
$f_n \xrightarrow{\text{П.В.}} f$	249	$S^*(\Delta), S_*(\Delta)$	72
$f_n \xrightarrow{\mu} f$	250	$\text{supp}(f)$	181
$f \wedge g$	353	$\sigma(T)$	322
$f^\sharp(x), f^\flat(x)$	200	$\check{U}(a)$	18
Φ^\sharp, Φ^\flat	211	χ_A	12
$\Gamma(T)$	316	$\varphi^* \omega$	357
$\psi * f$	354	ω_α	358
(E, \mathfrak{A}, μ)	249	$\ \cdot\ _\Omega$	169
K^\perp	299	$\ \cdot\ _p$ ($1 \leq p \leq +\infty$)	282

⁶Указаны страницы, где вводятся данные обозначения

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Программа	5
Понятие функции	11
Действительные числа.	16
Предел числовой последовательности	20
Числовые ряды	25
Предел и непрерывность функций	31
Дифференцирование	41
Приложения понятия производной	48
Первообразная и неопределенный интеграл	58
Интеграл Римана	63
Некоторые приложения интеграла Римана	77
Отображения в евклидовых пространствах	82
Линейные отображения	90
Дифференцирование отображений	93
Элементы общей топологии	112
Мера Жордана	132
Кратные интегралы Римана	139
Несобственные интегралы	150
Интегралы, зависящие от параметра.	159
Последовательности и ряды функций.	169
Пространства функций. Ряды Фурье.	178
Элементы теории обобщённых функций	202
Элементы интегрирования по многообразиям.	213
Мера Лебега.	229
Измеримые функции.	246
Интеграл Лебега.	252
Полные метрические пространства	274
Основные принципы линейного анализа.	281
Ограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве	299
Элементы теории неограниченных линейных операторов	316
Уравнения с компактными операторами.	325
Элементы нелинейного анализа в нормированных пространствах	332
Приложение 1. Модели числовой прямой.	339
Приложение 2. Комплексные числа.	345
Приложение 3. Порядковые структуры в множествах	347
Приложение 4. Дифференциальные формы и теорема Стокса	352
Указатель имён	365
Предметный указатель.	367
Указатель обозначений.	372

